

МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кафедра кібербезпеки та DATA технологій

Факультет №6

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

з навчальної дисципліни «**Математика для економістів (вища математика)**»
обов'язкових компонент
освітньої програми першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

072 «Фінанси, банківська справа, страхування та фондовий ринок» (фінансова безпека та фінансові розслідування)

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол № від 21.12 . 2023р.

СХВАЛЕНО

Вченою радою факультету № 6
Протокол № 11 від 20.12.2023 р.

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол №11 від 21.12 .2023р.

Розглянуто на засіданні кафедри кібербезпеки та DATA технологій
факультету № 6
(протокол №12 від 15.12 .2023р.

Розробники:

1. *професор кафедри д.е.н., професор Луччик Василь Єфрімовіч.*
2. *професор кафедри д.т.н., професор Можєєв Олександр Олександрович*

Рецензенти:

1. *Професор кафедри обчислювальної техніки та програмування НТУ ХПІ, д.т.н., професор Кучук Г. А.*
2. *Доцент кафедри боротьби з кіберзлочинністю ХНУВС к.т.н., доцент Клімушин П.С.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами Семестр №1

| Номер та найменування теми | Кількість годин відведених на вивчення навчальної дисципліни | | | | | | Вид контролю |
|---|--|--------|---------------------|-------------------|---------------------|-------------------|--------------|
| | Всього | з них: | | | | | |
| | | лекції | Семінарські заняття | Практичні заняття | Лабораторні заняття | Самостійна робота | |
| Тема № 1. «Матриці та визначники». | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 2 «Системи лінійних алгебраїчних рівнянь» | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 3. «Аналітична геометрія на площині». | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 4.«Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної». | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 5.«Похідна функції та її обчислення ». | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 6. «Діференціальне числення дійсних функцій багатьох змінних». | 18 | 4 | | 4 | | 10 | |
| Тема № 6. «Інтегральне числення функції однієї змінної.» | 12 | 4 | | 4 | | 4 | |
| Всього за семестр №1 | 120 | 28 | | 28 | | 64 | залік |

2. Методичні вказівки до практичних занять

Тема № 1: Матриці та визначники.

Практичне заняття №1.

Навчальна мета заняття –навчитись додавати матриці, множити матриці на число, перемножувати матриці, опанувати методи знаходження визначника матриці. Навчитись обчислювати обернену матрицю.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Поняття матриці.
2. Освоєння дій з матрицями.
3. Види матриць.
4. Відшукування рангу матриці.
5. Поняття визначників 2-го та 3-го порядку та їх обчислення.
6. Поняття мінору та алгебраїчного доповнення елементів квадратної матриці.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Конспект лекцій по курсу "Высшая математика", часть 1 "Линейная алгебра и аналитическая геометрия"/ Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. – Харьков: ХНУВД, 2007. – 62 с.
3. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1 Обчислити $C=A+B$, $K=A-B$, $I=3A$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix},$$

Розв'язання.

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+0 & 3+1 & 0+4 \\ 5+(-2) & 5+5 & 6+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-0 & 3-1 & 0-4 \\ 5-(-2) & 5-5 & 6-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$I = 3 \begin{pmatrix} 7 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 0 \\ 15 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

$$\text{Отже, } C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 3 & 10 & 7 \end{pmatrix} K = \begin{pmatrix} 7 & 2 & -4 \\ 7 & 0 & 5 \end{pmatrix} I = \begin{pmatrix} 21 & 12 & 0 \\ 15 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Приклад 2 . Обчислити добуток матриць $A \cdot B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

1. Знайдемо розмір матриці-добутку (якщо множення матриць можливо):

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3}.$$

2. Обчислити елементи матриці-добутку C , для цього перемножимо елементи кожного рядка матриці A на відповідні елементи стовпців матриці B в такий спосіб:

$$C = \begin{pmatrix} 1(-1) + 0 \cdot 5 + 2(-2) & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \\ 3(-1) + 1 \cdot 5 + 0(-2) & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 & 3 \cdot 1 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Одержуємо } C = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Приклад №3. Знайти AB , якщо $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

1. Добуток AB можна утворити, оскільки матриця A має розмір 2×4 , а матриця B — розмір 4×3 .
2. Матриця $C=AB$ матиме розмір 2×3 . Щоб знайти C_{11} , утворимо алгебраїчну суму добутків елементів першого рядка матриці A на елементи першого стовпця матриці B : $C_{11} = 5 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -11$.

Аналогічно:

$$C_{12} = 5 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot 0 + (-1)(-1) = 11, \quad C_{13} = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 3(-2) + (-1)(-2) = -4; \quad C_{21} = (-1)(-2) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 4 \cdot 4 = 19,$$

$$C_{22} = (-1)2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 4(-1) = 0, \quad C_{23} = (-1)0 + 2 \cdot 1 + 1(-2) + 4(-2) = -8.$$

Отже, $C = AB = \begin{pmatrix} -11 & 11 & -4 \\ 19 & 0 & -8 \end{pmatrix}$.

Утворити ВА — неможливо.

Приклад №4. Обчислити визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = 4 - 6 = -2$$

Приклад №5. Обчислити визначник за правилом трикутників $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-4) \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 - (-4) \cdot 1 \cdot 5 = 30 - 32 + 1 - 6 - 8 + 20 = 5.$$

Приклад №6. Обчислити визначник за правилом Саррюса $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Випишемо перші два стовпця за визначником:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 0 + 0(-4) \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 2 - (-2) \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-4) \cdot 2 - 0 \cdot 3 \cdot 0 = -12 + 4 + 8 = 0.$$

Приклад №7. Побудувати матрицю, обернену до матриці $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Розв'язання.

Обчислимо:

$$\Delta(A) = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 10 & -5 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 10 & -5 \end{vmatrix} = 15 - 10 = 5. \quad \Delta(A) \neq 0 \text{ — обернена матриця існує.}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 12,$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

Переконаємося, що матриця A^{-1} , побудована нами, справді є оберненою до матриці A .

Знайдемо AA^{-1} :

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти матрицю $A = (2B - 3C)D$, якщо

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & -5 & 0 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 5 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Знайти значення $f(A) = 3A^2 - 2A + 5$ і, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Обчислити визначники:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} -3 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ -6 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема 3: Аналітична геометрія на площині

Практичне заняття №2.

Навчальна мета заняття –вивчити векторні та скалярні величини. Ознайомитися зі скалярним, векторним та мішаним добутком.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Скалярний, векторний та змішаний добуток векторів.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Конспект лекцій по курсу "Высшая математика", часть 1 "Линейная алгебра и аналитическая геометрия"/ Боцюра О.А., Гнусов Ю.В., Шеховцов С.Б. – Харьков: ХНУВД, 2007. – 62 с.
3. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв’язування прикладів за темою заняття.

Приклад №1. Дано: $\text{pr}_{\vec{l}} \vec{a} = 3$; $\text{pr}_{\vec{l}} \vec{b} = -1$. Обчислити: 1) $\text{pr}_{\vec{l}} (3\vec{a} + 2\vec{b})$; 2) $\text{pr}_{\vec{l}} (\vec{a} - 2\vec{b})$.

Розв’язання.

Використавши властивості проекцій, дістанемо:

- 1) $\text{pr}_{\vec{l}} (3\vec{a} + 2\vec{b}) = 3\text{pr}_{\vec{l}} \vec{a} + 2\text{pr}_{\vec{l}} \vec{b} = 3 \cdot 3 + 2(-1) = 7$.
- 2) $\text{pr}_{\vec{l}} (\vec{a} - 2\vec{b}) = \text{pr}_{\vec{l}} \vec{a} - 2\text{pr}_{\vec{l}} \vec{b} = 3 - 2(-1) = 5$.

Приклад №2. Знайти проекції вектора \vec{a} на вісь l , яка утворює з вектором кут: 1) 45° ,
2) 120° , 3) 150° , якщо довжина вектора дорівнює 4.

Розв'язання.

$$1) \quad np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 45^\circ = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2};$$

$$2) \quad np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -2;$$

$$3) \quad np_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi = 4 \cdot \cos 150^\circ = 4 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2\sqrt{3}.$$

Приклад №3. Знайти периметр трикутника, вершинами якого є точки $A(8;0;6)$,
 $B(8;-4;6)$, $C(6;-2;5)$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів, що створюють трикутник, та їх довжини:

$$\vec{AB} = (8 - 8; -4 - 0; 6 - 6), \quad \vec{AB} = (0; -4; 0);$$

$$\vec{AC} = (6 - 8; -2 - 0; 5 - 6), \quad \vec{AC} = (-2; -2; -1);$$

$$\vec{BC} = (6 - 8; -2 - (-4); 5 - 6), \quad \vec{BC} = (-2; 2; -1);$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{0^2 + (-4)^2 + 0^2} = 4;$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3;$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3.$$

Тоді периметр трикутника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Приклад №4. Обчислити довжину вектора $3\vec{a} + 2\vec{b}$, якщо $\vec{a} = 2\vec{i}$, $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів:

$$3\vec{a} = (3 \cdot 2; 3 \cdot 0; 3 \cdot 0), \quad 3\vec{a} = (6; 0; 0);$$

$$2\vec{b} = (2 \cdot 1; 2 \cdot 1; 2 \cdot (-1)), \quad 2\vec{b} = (2; 2; -2);$$

$$3\vec{a} + 2\vec{b} = (6 + 2; 0 + 2; 0 - 2), \quad 3\vec{a} + 2\vec{b} = (8; 2; -2).$$

Тоді довжина шуканого вектора дорівнює:

$$|3\bar{a} + 2\bar{b}| = \sqrt{(8)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = 6\sqrt{2}.$$

Приклад №5.. Знайти скалярний добуток векторів $\bar{a} = 4\bar{k} - \bar{i}$, $\bar{b} = 3\bar{j} + \bar{i} - \bar{k}$.

Розв'язання.

Знайдемо координати векторів: $\bar{a}(-1; 0; 4)$, $\bar{b}(1; 3; -1)$. Тоді скалярний добуток дорівнює $\bar{a} \cdot \bar{b} = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) = -1 - 4 = -5$.

Приклад №6. Знайти площу паралелограма, який побудований на векторах

$$\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}, \bar{b} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}.$$

Розв'язання.

Модуль векторного добутку двох векторів дорівнює площі паралелограма, який побудований на цих векторах. Знайдемо векторний добуток:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \cdot (2 - 1) - \bar{j} \cdot (2 + 2) + \bar{k} \cdot (-1 - 2) = \bar{i} - 4\bar{j} - 3\bar{k}. \end{aligned}$$

Площа паралелограма дорівнює:

$$S = |\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + (-3)^2} = \sqrt{26} \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад №7.. Знайти площу трикутника за координатами його вершин: $A(1; -2; 8)$, $B(0; 0; 4)$, $C(6; 2; 0)$.

Розв'язання.

Розглянемо два вектори, на яких побудовано трикутник, наприклад, $\overline{AB} \perp \overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (-1; 2; -4), \overline{AC} = (5; 4; -8).$$

Векторний добуток дорівнює:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & -4 \\ 5 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i} \cdot (-16 + 16) - \bar{j} \cdot (8 + 20) + \bar{k} \cdot (-4 - 10) = -28\bar{j} - 14\bar{k}. \end{aligned}$$

Тоді площа трикутника дорівнює:

$$S = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \sqrt{(-28)^2 + (-14)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 14^2} = 7\sqrt{5} (\text{кв. од.}).$$

Приклад №8. Обчислити об'єм паралелепіпеду і піраміди, які побудовані на векторах $\overline{a} = 3\overline{i} - 4\overline{j}$, $\overline{b} = \overline{k} - 3\overline{j}$, $\overline{c} = 2\overline{j} + 5\overline{k}$.

Розв'язання.

Об'єм паралелепіпеду дорівнює модулю мішаного добутку векторів \overline{a} , \overline{b} , \overline{c} :

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-15 - 2) = -51.$$

Тоді об'єми паралелепіпеду і піраміди дорівнюють:

$$V_{\text{нар}} = |\overline{abc}| = |-51| = 51 (\text{куб. од.});$$

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\overline{abc}| = \frac{1}{6} V_{\text{нар}} = \frac{51}{6} = \frac{17}{2} = 8,5 (\text{куб. од.}).$$

Приклад №9. Довести, що точки $A(2; -1; -2)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; 3; 0)$, $D(5; 0; -6)$ лежать в одній площині.

Розв'язання.

Щоб довести, що ці чотири точки лежать в одній площині, доведемо, що в одній площині лежать вектори \overline{AB} , \overline{AC} , \overline{AD} , тобто ці три вектори компланарні.

Умова компланарності трьох векторів має вигляд:

$$\overline{AB} \ \overline{AC} \ \overline{AD} = 0.$$

Знайдемо координати векторів:

$$\overline{AB} = (-1; 3; 3); \ \overline{AC} = (0; 4; 2); \ \overline{AD} = (3; 1; -4).$$

Обчислимо мішаний добуток векторів:

$$\overline{AB} \ \overline{AC} \ \overline{AD} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -1(-16 - 2) + 3 \cdot (6 - 12) = 18 - 18 = 0$$

Таким чином, точки A , B , C , D лежать в одній площині.

Завдання для перевірки знань.

1. Знайти кут між векторами $\vec{a} = -\vec{i} + \vec{j}$ і $\vec{b} = \vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k}$, а також площу паралелограма, побудованого на них.

2. Дано вектори: $\vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}$, $\vec{c} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k}$.

Довести:

1) вектори \vec{a} і \vec{b} перпендикулярні;

2) вектори \vec{a} і \vec{c} колінеарні;

3) вектори \vec{a} , \vec{b} і \vec{c} компланарні.

3. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах: $\vec{a} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$.

4. Дано координати вершин піраміди: $O(0; 0; 0)$, $A(1; 2; -1)$, $B(-2; 3; 4)$, $C(1; 0; -2)$. Обчислити: кут ABC ; площу грані ABC ; об'єм піраміди $OABC$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема №43: Функція однієї змінної. Границя функції однієї змінної

Практичне заняття №3

Навчальна мета заняття – опанувати методи знаходження границь функції, навчитися розкривати невизначеності, ознайомитись із застосуванням чудових границь.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Границя функції та її властивості.
2. Розкриття невизначеностей.
3. Дві особливі границі.
4. Застосування нескінченно малих величин при обчисленні границь.

Література:

1. Конспект лекцій.

2. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
3. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2002. – 288 с., с ил.
4. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Перша чудова границя: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

Друга чудова границя: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \right\} = e$ або $\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ (1+x)^{1/x} \right\} = e.$

Наслідки:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\mu - 1}{x} = \mu \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}.$$

Шкала еквівалентних нескінченно малих величин

1. $\sin x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

2. $\ln(1+x) \sim x, \log_a(1+x) \sim (\log_a e)x, \quad x \rightarrow 0.$

3. $e^x - 1 \sim x, a^x - 1 \sim x \ln a, \quad x \rightarrow 0.$

4. $(1+x)^\mu - 1 \sim \mu x, \quad x \rightarrow 0.$

5. $\arcsin x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

6. $\operatorname{tg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

7. $\operatorname{arctg} x \sim x, \quad x \rightarrow 0.$

Приклад №1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x}$.

Розв'язання.

Тут чисельник та знаменник дробу прямують до нуля при $x \rightarrow 3$ (невизначеність вигляду

$\left[\frac{0}{0}\right]$). Оскільки $\frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \frac{(x-3)(x+3)}{x(x-3)} = \frac{x+3}{x}$ при $x \neq 3$, то $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x} = 2$. Звідси

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 3x} = 2.$$

Приклад №2. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$.

Розв'язання.

Помножимо чисельник та знаменник дробу на суму $\sqrt{x+4} + 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+4} - 2)(\sqrt{x+4} + 2)}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4-4}{x(\sqrt{x+4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4} + 2} = \frac{1}{4}.$$

Приклад №3. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Розв'язання.

Поділимо чисельник та знаменник на старший степінь x , тобто на x^3 :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 3x + 4}{4x^3 + 3x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3}}{4 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3}} = \frac{1}{4}.$$

Приклад №4. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) = [\infty - \infty]$.

Розв'язання.

Помножимо та поділимо заданий вираз на $\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3}) &= \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 8x + 3} - \sqrt{x^2 + 4x + 3})(\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3})}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8x + 3 - x^2 - 4x - 3}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt{x^2 + 8x + 3} + \sqrt{x^2 + 4x + 3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{1 + \frac{8}{x} + \frac{3}{x^2}} + \sqrt{1 + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}}} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Приклад №5. Знайти $\lim_{x \rightarrow 3 \pm 0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1}$.

Розв'язання.

Якщо $x \rightarrow 3-0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow -\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow 0; \lim_{x \rightarrow 3-0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1} = \frac{1}{3}$.

Якщо $x \rightarrow 3+0$, то $\frac{1}{x-3} \rightarrow +\infty, 2^{\frac{1}{x-3}} \rightarrow +\infty; \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(x + 2^{\frac{1}{x-3}}\right)^{-1} = 0$.

Приклад №6. . Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right]$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{5x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{5x}{2}}{x} \right)^2 = 2 \left(\frac{5}{2} \right)^2 = \frac{25}{2}.$$

Приклад №7. . Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = [1^\infty]$.

Розв'язання.

Діленням чисельника дробу на знаменник виділяємо цілу частину

$$\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} = 1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7}.$$

Таким чином,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right)^{\frac{x(8x - 3)}{x^2 - 3x + 7}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} \right)^{1 - \frac{3}{x} + \frac{7}{x^2}}; \end{aligned}$$

оскільки $\frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \infty$, то $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{8x - 3}{x^2 - 3x + 7} \right)^{\frac{x^2 - 3x + 7}{8x - 3}} = e$.

Зауважимо, що $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 - 3/x}{1 - 3/x + 7/x^2} = 8$. Дістанемо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 5x + 4}{x^2 - 3x + 7} \right)^x = e^8.$$

Завдання для перевірки знань

1. Знайти $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$.

2. Знайти $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

3. Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2 - 1}$.

4. . Знайти $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2} \right)$.

5. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}$.

6. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$.

7. Знайти $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x}$.

8. . Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.

9. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2}$.

10. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$.

11. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

12. Знайти $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\operatorname{cosec} x}$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема №4 Похідна функції та її обчислення

Практичне заняття №4.

Навчальна мета заняття — засвоїти поняття похідної функції, правил диференціювання, навчитись диференціювати алгебраїчні, тригонометричні, обернені тригонометричні, показникові та логарифмічні функції.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Знаходження похідних функцій.
2. Похідна складної функції.
3. Похідна неявної функції.
4. Правило Лопітала.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.

4. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Основні правила диференціювання

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x).$$

$$(uv)' = u'v + uv'.$$

$$(cu)' = cu', \text{ де } c = \text{const}.$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}.$$

Похідні від основних елементарних функцій

$$1. (x)' = 1;$$

$$2. (x^m)' = mx^{m-1};$$

$$3. (e^x)' = e^x;$$

$$4. (a^x)' = a^x \ln a;$$

$$5. (\ln x)' = \frac{1}{x};$$

$$6. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$$

$$7. (\sin x)' = \cos x;$$

$$8. (\cos x)' = -\sin x;$$

$$9. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$10. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$11. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$12. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$13. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$14. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Приклад № 1. Знайти похідні функцій:

Розв'язання.

$$1) y = 5x^4,$$

$$2) y = \frac{7}{x},$$

$$3) y = 10 \sqrt[3]{x},$$

$$4) y = \frac{8}{x^4}, \quad 5) y = \frac{9}{\sqrt{x^7}}.$$

1) Внесемо сталий множник за знак похідної, а потім застосуємо формулу 2 таблиці похідних

$$y' = 5(x^4)' = 5 \cdot 4x^{4-1} = 20 \cdot x^3.$$

Аналогічно дістанемо:

$$2) y' = 7\left(\frac{1}{x}\right)' = 7\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7}{x^2}.$$

$$3) y' = 10\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = 10 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{10}{3} \cdot x^{-\frac{2}{3}} = \frac{10}{3 \cdot \sqrt[3]{x^2}}.$$

$$4) y' = 8\left(\frac{1}{x^4}\right)' = 8(x^{-4})' = 8 \cdot (-4) \cdot x^{-4-1} = -\frac{32}{x^5}.$$

$$5) y' = 9\left(x^{-\frac{7}{2}}\right)' = 9\left(-\frac{7}{2}\right) \cdot x^{-\frac{7}{2}-1} = -\frac{63}{2\sqrt{x^9}}.$$

Приклад № 2. Знайти похідні функції:

$$1) y = 4 + 5x^2 + \frac{8}{x^2} - \frac{4\sqrt{x}}{3} - \frac{2}{\sqrt{x}};$$

$$2) y = 2x\sqrt{x} + \frac{x}{\sqrt[5]{x}} - 5;$$

$$3) y = x^4 \sin x;$$

$$4) y = \frac{8x - 7}{2x^3 + x^2};$$

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від алгебраїчної суми як алгебраїчну суми похідних доданків:

$$y' = (4)' + (5x^2)' + \left(\frac{8}{x^2}\right)' - \left(\frac{4\sqrt{x}}{3}\right)' - \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right)' = 5 \cdot 2x + 8 \cdot (-2) \cdot x^{-2-1} -$$

$$- \frac{4 \cdot 1}{3 \cdot 2\sqrt{x}} - 2\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot x^{-\frac{1}{2}-1} = 10x - \frac{16}{x^3} - \frac{2}{3\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^3}};$$

$$2) y' = 2\left(x^{1+\frac{1}{2}}\right)' + \left(x^{1-\frac{1}{5}}\right)' - (5)' = 2 \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} + \frac{4}{5} \cdot x^{-\frac{1}{5}} = 3\sqrt{x} + \frac{4}{5\sqrt[5]{x}}.$$

$$3) y' = (x^4)' \sin x + x^4 \cdot (\sin x)' = 4x^3 \sin x + x^4 \cos x.$$

$$4) y' = \frac{(8x-7)' \cdot (2x^3+x^2) - (8x-7) \cdot (2x^3+x^2)'}{(2x^3+x^2)^2} = \frac{8 \cdot (2x^3+x^2) - (8x-7) \cdot (6x^2+2x)}{(2x^3+x^2)^2} =$$

$$= \frac{16x^3+8x^2-48x^3+42x^2-16x^2+14x}{(2x^3+x^2)^2} = \frac{-32x^3+34x^2+14x}{(2x^3+x^2)^2}.$$

Приклад № 3. Знайти похідні складених функцій:

$$1) y = \ln \sin x + \sqrt{\arctg x};$$

$$2) y = e^{\frac{1}{x} \operatorname{tg} x} + \cos^3 x;$$

$$3) y = (4x^2+1)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3-1}};$$

Розв'язання.

1) Знайдемо похідну від першого доданку за формулою:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x, \text{ де } y = \ln u, u = \sin x.$$

Тоді

$$y'_x = \ln u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (\sin x)'_x = \frac{1}{\sin x} \cos x = \operatorname{ctg} x.$$

Похідну від другого доданку знайдемо аналогічно:

$$y = \sqrt{u}, \quad u = \arctg x$$

$$y'_u = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'_x = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot (\arctg x)'_x = \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

Загалом

$$y'_x = \operatorname{ctg} x + \frac{1}{2\sqrt{\arctg x}} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$2) y' = \left(e^{3 \operatorname{tg} \frac{1}{x}} \right)' + (\cos^3 x)' = e^{3 \operatorname{tg} \frac{1}{x}} \left(3 \operatorname{tg} \frac{1}{x} \right)' + 3 \cos^2 x (\cos x)' = e^{3 \operatorname{tg} \frac{1}{x}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{x} \right)' +$$

$$= 3 \cos^2 x (-\sin x) = e^{3 \operatorname{tg} \frac{1}{x}} \cdot \frac{3}{\cos^2 \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) - 3 \cos^2 x \sin x.$$

$$3) y' = \left((4x^2 + 1)^2 \right)' \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}} - (4x^2 + 1)^2 \cdot \left(5^{\sqrt{x^3 - 1}} \right)' =$$

$$= 2 \cdot (4x^2 + 1) (4x^2 + 1)' \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}} + (4x^2 + 1)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}} \cdot \ln 5 \cdot (\sqrt{x^3 - 1})' =$$

$$= 2 \cdot (4x^2 + 1)^2 \cdot 8x \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}} + (4x^2 + 1)^2 \cdot 5^{\sqrt{x^3 - 1}} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^3 - 1}} \cdot 3x^2.$$

Приклад № 4. Знайти похідну параметрично заданої функції:

$$x = e^t \sin t, \quad y = e^t \cos t.$$

Розв'язання.

$$y_t' = e^t \cdot \cos t + e^t \cdot (-\sin t) = e^t (\cos t - \sin t);$$

$$x_t' = e^t \cdot \sin t + e^t \cdot \cos t = e^t (\sin t + \cos t);$$

$$y_x' = \frac{y_t'}{x_t'} = \frac{e^t (\cos t - \sin t)}{e^t (\sin t + \cos t)} = \frac{\cos t - \sin t}{\sin t + \cos t}.$$

Приклад № 5. Знайти похідну неявно заданої функції: $x^2 + 4y^3 + 2xy = 0$;

Розв'язання.

Диференціюємо по x ліву і праву частину рівняння, враховуючи, що y – це функція

$$\text{від } x: 2x + 12y^2 \cdot y_x' + 2y + 2x \cdot y_x' = 0.$$

$$\text{Розв'язуємо рівняння відносно } y_x' \cdot y_x' (12y^2 + 2x) = -2x - 2y; \quad y_x' = \frac{-2x - 2y}{12y^2 + 2x} = -\frac{x + y}{6y^2 + x}.$$

Завдання для перевірки знань

Знайти похідну y' :

$$1) y = \frac{2(3x^2 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}}; \quad 2) y = \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1});$$

$$3) y = \sqrt{x} \cdot \ln(\sqrt{x} + \sqrt{x+7}); \quad 4) y = \arctg \frac{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}{\sqrt{2}};$$

$$5) y = (x^2 + 8)\sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^4}{16} \arcsin \frac{2}{x}.$$

$$6) y = e^{\arccos \frac{1}{x}}; \quad 7) y \cdot \ln y = x^3.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №5.

Навчальна мета заняття – опанувати техніку дослідження функції однієї змінної.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Дослідження функції та побудова її графіка

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
3. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
4. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. 1 часть. – М.: Рольф, 2002. – 288 с., с ил.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

При дослідженні функції та побудові її графіка скористатися наступною схемою:

1. Знайти область визначення функції.
2. Встановити парність (непарність) і періодичність функції.
3. Визначити точки перетину графіка функції з осями координат.
4. Знайти точки екстремуму та обчислити значення функції у цих точках. Визначити інтервали зростання й спадання функції.
5. Знайти точки перегину, інтервали випуклості й вгнутості.
6. Знайти асимптоти.

Приклад №1. Дослідити функцію $y = x^3 - 6x^2 - 36x + 41$ та побудувати її графік.

1) Область визначення функції $D(y) = (-\infty; +\infty)$, тобто функція існує при всіх значеннях.

2) Парність, періодичність:

$$y(-x) = -x^3 - 6x^2 + 36x + 41, \quad y(-x) \neq \pm y(x).$$

Функція загального виду, ні парна, ні непарна, неперіодична.

3) Точки перетину з осями координат:

$$- \text{ з віссю } OX: y = 0 \Rightarrow x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = 0.$$

Легко перевірити, що $x_1 = 1$ є корінь рівняння, тому

$$x^3 - 6x^2 - 36x + 41 = (x - 1)(x^2 - 5x - 41).$$

Знайдемо дві інші точки перетину графіка з віссю OX :

$$x^2 - 5x - 41 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{5 + \sqrt{189}}{2} \approx 9,37;$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{189}}{2} \approx -4,37.$$

Точки перетину графіка з віссю OX — $A(1; 0)$, $B(-4,37; 0)$, $C(9,37; 0)$;

– точка перетину графіка з віссю OY ($x=0$) — $D(0; 41)$.

4) Інтервали зростання та спадання функції, точки екстремуму:

$$y' = 3x^2 - 12x - 36; \quad y' = 0 \Rightarrow x^2 - 4x - 12 = 0.$$

Тоді $x_1 = 6$, $x_2 = -2$ — критичні точки.

Здобуті дані заносимо до таблиці.

| | | | | | |
|---------|-----------------|------|-----------|------|----------------|
| x | $(-\infty; -2)$ | -2 | $(-2; 6)$ | 6 | $(6; +\infty)$ |
| $f'(x)$ | + | 0 | – | 0 | + |
| $f(x)$ | (зростає) | 81 | (спадає) | -175 | (зростає) |

Точка максимуму функції $M(-2; 81)$, точка мінімуму $N(6; -175)$.

5) Точка перегину, інтервали опуклості та вгнутості:

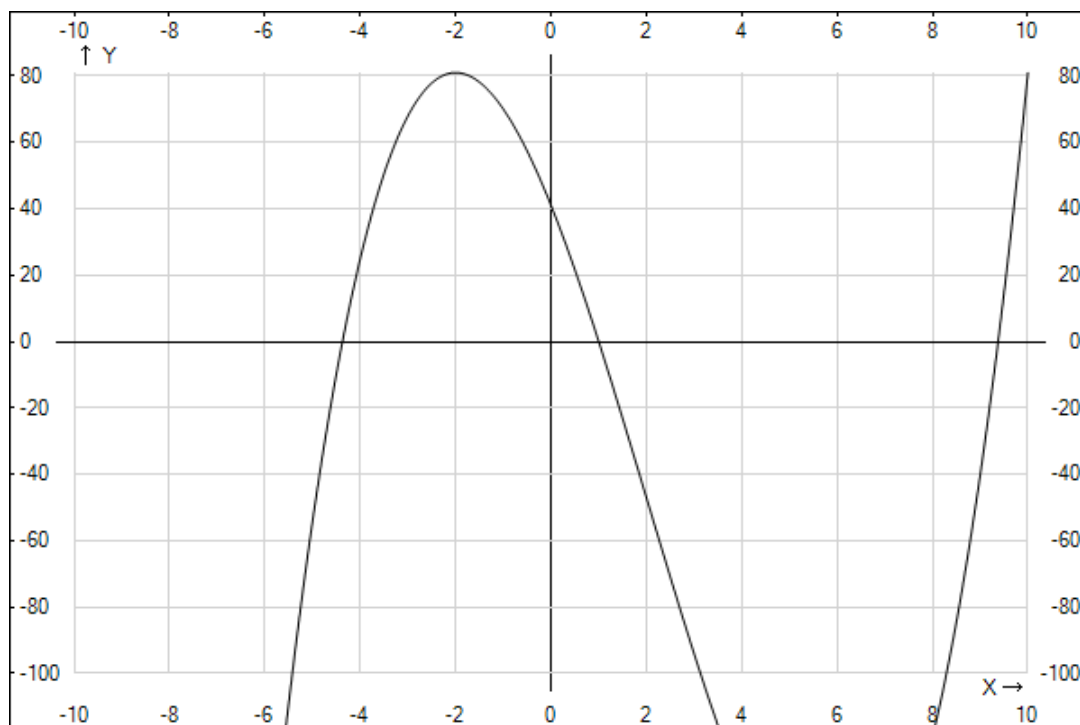
$$y'' = 6x - 12, \quad y'' = 0, \quad 6x - 12 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ — критична точка другого роду.}$$

Дані заносимо до таблиці

| | | | |
|---------|-----------------|-----|-----------------|
| x | $(-\infty; 2)$ | 2 | $(2; +\infty)$ |
| $f'(x)$ | – | 0 | + |
| $f(x)$ | \cap (опукла) | -47 | \cup (вгнута) |

Точка перегину $E(2; -47)$.

б) Функція не має асимптот. Використовуючи здобуті дані, будуємо графік функції.



Приклад 2. Дослідити функцію $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$ і побудувати її графік.

1. Знаходимо область визначення функції. Функція існує при всіх значеннях x за винятком значення $x = 1$. Звідси її область визначення $\{-\infty < x < 1; 1 < x < +\infty\}$.

Точка $x = 1$ є точкою розриву функції. Дослідимо її характер:

$$\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} y = \lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 1 \pm 0} (x-1)^2} = +\infty.$$

Як ліворуч, так і праворуч точки $x = 1$ маємо нескінченний розрив.

Точка $x = 1$ — точка розриву другого роду.

Вертикальні асимптоти. Пряма $x = 1$ є вертикальною асимптотою.

2. Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат: з віссю Ox : $y = 0$, $\frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0$, $2x-1 = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $(\frac{1}{2}; 0)$; з віссю Oy : $x = 0$, $y = \frac{-1}{1} = -1$, $(0; -1)$.




3. Знаходимо точки екстремуму та інтервали зростання і спадання функції, результати заносимо у табл. 4.3:

$$y' = \frac{2(x-1)^2 - 2(x-1)(2x-1)}{(x-1)^4} = -\frac{2x}{(x-1)^3}; \quad y' = 0 \Rightarrow$$

$-2x = 0 \Rightarrow x = 0$ — критична точка. При $x = 1$ y' не існує, але у цій точці сама функція теж не існує. Дослідимо критичну точку $x = 0$ на екстремум:

$$\text{при } x = -1 \quad y' = \frac{2}{-8} = -\frac{1}{4} < 0(-);$$

$$\text{при } x = \frac{1}{2} \quad y' = \frac{-1}{-1/8} = 8 > 0(+).$$

| x | $(-\infty, 0)$ | 0 | $(0, 1)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
|------|---|-----------------|---|----------|---|
| y' | — | 0 | + | Не існує | — |
| y |  | $y_{\min} (-1)$ |  | Не існує |  |

Проходячи через критичну точку зліва направо, похідна змінює знак з «—» на «+», через це в точці $x = 0$ функція має мінімум:

$$y_{\min} = \frac{-1}{1} = -1.$$

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'(x) < 0$, отже, функція на цьому інтервалі спадає.

4. Точки перегину та інтервали опуклості й вгнутості графіка функції знаходимо за допомогою другої похідної:

$$y'' = \frac{-2(x-1)^3 + 6x(x-1)^2}{(x-1)^6} = \frac{2(2x+1)}{(x-1)^4}; \quad y'' = 0 \Rightarrow$$

$2(2x+1) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$; при $x = 1$ y'' не існує, але в цій точці не існує і сама функція.

Дослідимо точку $x = -\frac{1}{2}$:

при $x = -1$ $y'' = \frac{2(-2+1)}{(-2)^4} = -\frac{1}{8} < 0(-)$; при $x = 0$ $y'' = \frac{2}{1} = 2 > 0(+)$.

Друга похідна, проходячи через $x = -\frac{1}{2}$, змінює знак, отже, точка перетину кривої з цією абсцисою є точкою перегину.

Знайдемо її ординату:

$$y = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right) - 1}{\left(-\frac{1}{2} - 1\right)^2} = -\frac{8}{9} \approx -0,9.$$

Таким чином, точка $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9}\right)$ — точка перегину.

У точці $x = 1$ функція не визначена. При $1 < x < +\infty$ $y'' > 0$, значить, графік функції вгнутий.

| | | | | | |
|-------|--------------------------------------|--------------------|--------------------------------|----------|----------------|
| x | $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ | $-\frac{1}{2}$ | $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ | 1 | $(1, +\infty)$ |
| y'' | + | 0 | + | Не існує | + |
| y | \cap | Перегин (- 8/9) | \cup | Не існує | \cup |

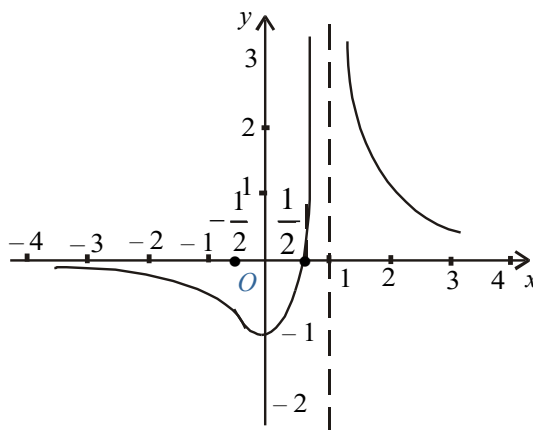
5. Рівняння похилої асимптоти знаходимо у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x(x-1)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{(x-1)^2} = 0.$$

Таким чином, похилою асимптотою є $y = 0$ (вісь Ox).

На підставі результатів дослідження будуємо графік функції.



Завдання для перевірки знань.

Дослідити функцію та побудувати її графік:

1. $y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$; 2. $y = x^4 - 2x^2 - 5$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 6: Диференціальне числення дійсних функцій багатьох змінних»..

Практичне заняття №6.

Навчальна мета заняття –засвоїти поняття функції багатьох змінних, опанувати техніку знаходження частинних похідних. Навчитись застосовувати повний диференціал до наближених обчислень.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Частинні похідні і їх властивості.
2. Похідні й диференціали старших порядків.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самот. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. — К.: Вища школа, 1993
4. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. — Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад №1. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функції $z = x^3 y + \sin(x^2 + \sqrt{y}) + \operatorname{tg} x + \ln y$.

Розв'язання. Знайдемо $\frac{\partial z}{\partial x}$. Вважаючи, що $y = \operatorname{const}$, дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \cdot 2x + \frac{1}{\cos^2 x}.$$

При знаходженні $\frac{\partial z}{\partial y}$ вважаємо, що $x = \operatorname{const}$. Дістанемо:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + \cos(x^2 + \sqrt{y}) \frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{1}{y}.$$

Приклад №2. Знайти dz , якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

Розв'язання. $dz = z'_x dx + z'_y dy$, де

$$z'_x = \frac{1}{x + \ln y};$$

$$z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже,}$$

$$dz = \frac{1}{x + \ln y} \left(dx + \frac{1}{y} dy \right).$$

Приклад №3. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад №4. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$

Приклад №5. Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ для функції $z = \sin(x^2 + y^2)$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -4xy \sin(x^2 + y^2),$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2y \cos(x^2 + y^2), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = -2xy \sin(x^2 + y^2).$$

Приклад №5. Знайти du , якщо $u = x^{y^2 z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2 z - 1}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2 z} \ln x 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2 z} \ln x y^2.$$

Отже, $du = y^2 z x^{y^2 z - 1} dx + 2yz x^{y^2 z} \ln x dy + y^2 x^{y^2 z} \ln x dz.$

Приклад №6. Знайти dz , якщо $z = \ln(x + \ln y)$.

$$dz = z'_x dx + z'_y dy, \text{ де } z'_x = \frac{1}{x + \ln y}; \quad z'_y = \frac{1}{x + \ln y} \cdot \frac{1}{y}, \text{ отже, } dz = \frac{1}{x + \ln y} \left(dx + \frac{1}{y} dy \right).$$

Приклад №7. Знайти $d^2 z$, якщо $z = \sin x \cdot \sin y$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\sin x \sin y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \cos x \cos y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin x \sin y,$$

$$d^2 z = -\sin x \sin y dx^2 + 2 \cos x \cos y dx dy - \sin x \sin y dy^2.$$

Приклад №8. Знайти $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ для функції $z = x^2 y^3$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 6xy^2, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = 12xy.$$

Завдання для перевірки знань.

Знайти частинні похідні першого порядку.

- 1) $u = xy + yz + zx$;
- 2) $u = \frac{z}{x} + \frac{x}{z}$;
- 3) $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$;
- 4) $u = \frac{y}{z} + \arctg \frac{z}{x} + \arctg \frac{x}{z}$;

Знайти повний диференціал функції $f(x; y)$ у заданій точці, якщо:

- 1) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$, а задана точка $(1; 1); (0; 1)$;

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №7.

Навчальна мета заняття – опанувати технологію дослідження функцій двох змінних на екстремум.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Локальний екстремум функції двох змінних та його дослідження.
2. Умовний екстремум функції двох змінних і метод Лагранжа його дослідження.
3. Знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції на замкненій обмеженій множині.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. — К.: Вища школа, 1993
4. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог;

МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.

5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад 1. Знайти екстремум функції $f(x, y) = 2x + 8y - x^2 - 2y^2$.

Розв'язання

1. Знайдемо $\frac{\partial f}{\partial x} = 2 - 2x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 8 - 4y$.

2. Необхідна умова існування екстремуму полягає в тому, що $\begin{cases} 2 - 2x = 0 \\ 8 - 4y = 0 \end{cases}$. Розв'язком цієї системи є точка з координатами $x=1$, $y=1$. Таким чином, у точці (1; 2) функція може мати екстремум.

3. Знайдемо похідні другого порядку $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$, звідки дістаємо, що $\Delta = 8$.

4. Як впливає з пункту 5 алгоритму знаходження екстремуму — екстремум у точці (1; 2) існує. Це максимум, бо $\Delta < 0$.

Приклад 2. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:

$$z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b} \quad (a > 0, b > 0).$$

Розв'язання.

Знайдемо z'_x і z'_y : $z'_x = \frac{x}{a}$, $z'_y = \frac{y}{b}$.

2. Необхідна умова екстремуму: $\begin{cases} \frac{x}{a} = 0 \\ \frac{y}{b} = 0 \end{cases}$.

Отже, $(0; 0)$ — стаціонарна точка.

3. Знайдемо z''_{xx} , z''_{xy} , z''_{yy} :

$$z''_{xx} = \frac{1}{a}, \quad z''_{xy} = 0, \quad z''_{yy} = \frac{1}{b}.$$

4. У точці $(0; 0)$

$$a_{11} = \frac{1}{a}, \quad a_{12} = 0, \quad a_{22} = \frac{1}{b}.$$

$$\Delta = \frac{1}{ab} > 0.$$

Точка $(0;0)$ — мінімум, хоча це ясно і безпосередньо

Приклад 3. Знайти умовний екстремум функції $u = f(x; y) = 6 - 5x - 4y$ відносно рівняння зв'язку $\varphi(x; y) = x^2 - y^2 - 9 = 0$.

Розв'язання Функції f і φ подвійно неперервно диференційовні. Матриця Якобі в даному випадку має вигляд $(2x \ -2y)$, і її ранг дорівнює 1 в усіх точках, що задовольняють рівняння зв'язку. Отже, можна скористатися методом Лагранжа. Запишемо функцію Лагранжа

$$L(x; y) = 6 - 5x - 4y + \lambda(x^2 - y^2 - 9).$$

Згідно з необхідними умовами дістанемо систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = -5 + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = -4 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 - y^2 - 9 = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $x = -5$, $y = 4$ при $\lambda = -\frac{1}{2}$; $x = 5$, $y = -4$ при $\lambda = \frac{1}{2}$. Таким чином, функція f може мати умовний екстремум тільки в двох точках $(-5; 4)$ і $(5; -4)$.

Обчислимо другий диференціал функції Лагранжа: $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$, тоді $d^2 L = 2\lambda(dx^2 - 2y^2)$.

Знайдемо перший диференціал функції $\varphi(x; y)$.

У точках $(-5; 4)$ і $(5; -4)$ диференціали dx і dy пов'язані рівністю: $5dx + 4dy = 0$, $dy = -\frac{5}{4}dx$. При виконанні цієї умови другий диференціал функції Лагранжа в точці $(-5; 4)$ є додатно визначеною квадратичною формою $d^2L = \frac{9}{16}dx^2$, а в точці $(5; -4)$ — від'ємно визначеною формою $d^2L = -\frac{9}{16}dx^2$.

Отже, функція f у точці $(-5; 4)$ має умовний мінімум $u(-5; 4) = 15$, а в точці $(5; -4)$ — умовний максимум $u(5; -4) = -3$.

Приклад 4. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області, обмеженій прямими $x = -1$, $x = 2$, $y = -1$, $y = 3 - x$ (рис. 1).

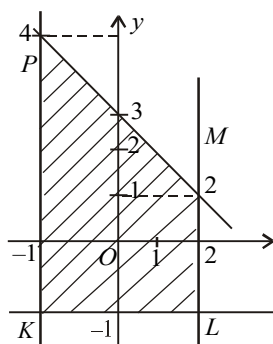


Рис. 1

1. Дослідимо поведінку функції всередині області $KLMP$. Знайдемо перші частинні похідні функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Прирівнявши їх до нуля, дістанемо стаціонарні точки $O(0; 0)$ та $E(1; 1)$.

2. Дослідимо поведінку функції на межі області. Відрізок KL має рівняння $y = -1$, $-1 \leq x \leq 2$. Підставивши $y = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = x^3 - 1 + 3x$. Треба знайти найбільше та найменше значення цієї функції на відрізку $[-1; 2]$.

Маємо $z' = 3x^2 + 3 > 0$, отже, функція зростає і тому досягає найбільшого значення на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1; -1)$ і $L(2; -1)$.

Відрізок LM має рівняння $x = 2$, $-1 \leq y \leq 1$. Підставивши $x = 2$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної y : $z = 8 + y^3 - 6y$. Маємо $z' = 3y^2 - 6 < 0$ на відрізку $[-1; 1]$.

Отже, функція $z = 8 + y^3 - 6y$ досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $L(2; -1)$ і $M(2; 1)$.

Відрізок PM має рівняння $y = 3 - x$, $-1 \leq x \leq 2$. Підставивши $y = 3 - x$ у задану функцію, дістанемо функцію z як функцію від змінної x : $z = x^3 + (3 - x)^3 - 3x(3 - x)$, тобто $z = 27 - 36x + 12x^2$. Маємо $z' = 24x - 36$, звідки $z' = 0$ при $x = \frac{3}{2}$. Отже, на відрізку PM функція може досягати найбільшого та найменшого значень у точках $M(2; 1)$, $P(-1; 4)$ та $T\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Відрізок KP має рівняння $x = -1$, $-1 \leq y \leq 4$. Підставивши $x = -1$ у задану функцію, дістанемо $z = -1 + y^3 + 3y$. Маємо $z' = 3y^2 + 3 > 0$, отже, функція досягає найбільшого та найменшого значень на кінцях відрізка, тобто в точках $K(-1; -1)$, $P(-1; 4)$.

Таким чином, функція $z = x^3 + y^3 - 3xy$ може досягти найбільшого та найменшого значень тільки в таких точках: $O(0; 0)$, $E(1; 1)$, $K(-1; -1)$, $L(2; -1)$, $M(2; 1)$, $P(-1; 4)$, $T\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Знаходимо $f(0; 0) = 0$, $f(1; 1) = -1$, $f(-1; -1) = -5$, $f(2; -1) = 13$, $f(2; 1) = 3$, $f(-1; 4) = 75$, $f\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = 0$.

Отже, $z_{\min} = -5$, і це значення досягається в точці $(-1; -1)$, $z_{\max} = 75$, і це значення досягається в точці $(-1; 4)$.

Завдання для перевірки знань

1. Знайти екстремум функції .
2. Знайти точки умовного екстремуму функції $z = xy$, якщо $x + y = 1$.
3. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 - xy + y^2 - 4x$ у замкненій області, що обмежена прямими $x = 0$, $y = 0$, $2x + 3y - 12 = 0$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Тема № 7: Інтегральне числення функції однієї змінної

Практичне заняття №8-9.

Навчальна мета заняття –засвоїти поняття первісної та невизначеного інтеграла. Опанувати техніку обчислення інтегралів за допомогою таблиці та методом заміни змінної. Набути навиків підбору підстановок, засвоїти формулу інтегрування частинами.

Кількість годин - 4.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Методи інтегрування невизначеного інтеграла.
2. Інтегрування раціональних функцій.
3. Інтегрування тригонометричних функцій.
4. Інтегрування ірраціональних функцій.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самот. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
4. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Таблиця основних інтегралів

$$1. \int 0 \cdot dx = C; \quad 2. \int dx = x + C; \quad 3. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1;$$

$$4. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C; \quad 5. \int e^x dx = e^x + C; \quad 6. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, a \neq 1;$$

$$7. \int \sin x dx = -\cos x + C; \quad 8. \int \cos x dx = \sin x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad 10. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$11. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C; \quad 12. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C;$$

$$13. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C; \quad 14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$$

$$15. \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C;$$

$$16. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C = -\arccos \frac{x}{a} + C;$$

$$17. \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arcctg} x + C;$$

$$18. \int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a} \operatorname{arcctg} \frac{x}{a} + C;$$

$$19. \int \frac{xdx}{x^2+a} = \frac{1}{2} \ln|x^2+a| + C;$$

$$20. \int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a \neq 0;$$

$$21. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C.$$

Приклад №1. $\int (6x^2 - 3x + 5) dx$.

Розв'язання.

$$\int (6x^2 - 3x + 5) dx = \int 6x^2 dx + \int (-3x) dx + \int 5 dx = 6 \int x^2 dx - 3 \int x dx + 5 \int dx =$$

$$= 6 \frac{x^3}{3} - 3 \frac{x^2}{2} + 5x + c = 2x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + c.$$

Приклад №2. $\int \sqrt[7]{x^2} dx$.

Розв'язання.

$$\int \sqrt[7]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{7}} dx = \frac{x^{1+\frac{2}{7}}}{1+\frac{2}{7}} + c = \frac{7}{9} x^{\frac{9}{7}} + c.$$

Приклад №3. $\int \frac{2}{3x^5} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{2}{3x^5} dx = \int \frac{2}{3} x^{-5} dx \stackrel{\text{правило 1}}{=} \frac{2}{3} \int x^{-5} dx \stackrel{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} + c = -\frac{1}{6} x^{-4} + c = -\frac{1}{6x^4} + c.$$

Приклад №4. $\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx$.

Розв'язання.

$$\frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{6} x^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} - \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3} - \frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} x^{\frac{3}{4} - \frac{1}{3}} = \frac{1}{6} x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} x^{\frac{5}{12}}.$$

$$\int \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x^2} + 4\sqrt[4]{5x^3}}{6\sqrt[3]{x}} dx = \int \left(\frac{1}{6} x^{\frac{1}{6}} - \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} x^{\frac{5}{12}} \right) dx \stackrel{\text{правила 1,2}}{=} \frac{1}{6} \int x^{\frac{1}{6}} dx - \frac{1}{3} \int x^{\frac{1}{3}} dx + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} \int x^{\frac{5}{12}} dx =$$

$$\stackrel{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} \frac{1}{6} \cdot \frac{x^{\frac{1}{6}+1}}{\frac{1}{6}+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + \frac{2\sqrt[4]{5}}{3} \cdot \frac{x^{\frac{5}{12}+1}}{\frac{5}{12}+1} + c = \frac{1}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{8\sqrt[4]{5}}{17} \cdot x^{\frac{17}{12}} + c =$$

$$= \frac{1}{7} \sqrt[6]{x^7} - \frac{1}{4} \sqrt[3]{x^4} + \frac{8}{17} \sqrt[12]{125x^{17}} + c.$$

Приклад №5. $\int (2x^2 + 1)^3 dx$.

Розв'язання.

Скористуємося для підінтегральної функції формулою скороченого множення:

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Отримаємо:

$$(2x^2 + 1)^3 = 8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1.$$

$$\int (2x^2 + 1)^3 dx = \int (8x^6 + 12x^4 + 6x^2 + 1) dx = 8 \int x^6 dx + 12 \int x^4 dx + 6 \int x^2 dx + \int dx =$$

$$= \frac{8}{7} x^7 + \frac{12}{5} x^5 + 2x^3 + x + c.$$

Приклад №6. $\int \frac{dx}{2x-7}$.

Розв'язання.

Введемо заміну $t = 2x - 7$, $\frac{1}{2} dx = dt$:

$$\int \frac{dx}{2x-7} = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} t + c = \frac{1}{2} \ln|2x-7| + c.$$

Приклад №7. $\int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} dx.$

Розв'язання.

Розкриємо дужки в чисельнику підінтегральної функції і поділимо чисельник на знаменник:

$$\begin{aligned} \int \frac{(e^x - 1)(e^{2x} + 1)}{e^x} dx &= \int \frac{e^{3x} - e^{2x} + e^x - 1}{e^x} dx = \int (e^{2x} - e^x + 1 - e^{-x}) dx \quad \text{правило 2} \\ &= \int e^{2x} dx - \int e^x dx + \int dx - \int e^{-x} dx \quad \text{правило 3, формули 5.2 ТОНІ} \\ &= \frac{1}{2} e^{2x} - e^x + x + e^{-x} + c. \end{aligned}$$

Приклад №8. $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}.$

Розв'язання.

Оскільки коефіцієнт при x^2 в знаменнику підінтегральної функції дорівнює 1, для рішення рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$ скористуємося теоремою Вієта: сума коренів дорівнює 5, а добуток 6. Корені — 2,3. Скористаємось формулою

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} &= \frac{1}{a-b} \ln \left| \frac{x+b}{x+a} \right| + c. \\ \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6} &= \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} \quad \text{формула (3.2)} = \ln \left| \frac{x-3}{x-2} \right| + c. \end{aligned}$$

Приклад №9. $\int \sin^3 x \cos x dx.$

Розв'язання.

Підінтегральний вираз поряд з $\sin x$ містить у якості множника $\cos x = (\sin x)'$. Це говорить на користь заміни: $t = \sin x$.

$$\int \sin^3 x \cos x dx = \left[\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{matrix} \right] = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + c = \left[\begin{matrix} \text{повернення до} \\ \text{старої змінної } x \end{matrix} \right] = \frac{\sin^4 x}{4} + c.$$

Приклад №10. $\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x}.$

Розв'язання.

Робимо заміну змінної: $t = \cos x$.

$$\begin{aligned}\int \frac{\sin x dx}{1 + \cos^2 x} &= \left[\begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \\ \sin x dx = -dt \end{array} \right] = \int \frac{-dt}{1+t^2} \stackrel{\text{правило 1}}{=} -\int \frac{dt}{1+t^2} \stackrel{\text{формула 11 ТОНІ}}{=} -\arctgt + c = \\ &= \left[\begin{array}{l} \text{повернення до} \\ \text{старої змінної } x \end{array} \right] = -\arctg(\cos x) + c.\end{aligned}$$

Приклад №11. $\int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx$.

Розв'язання.

Чисельник у шуканому інтегралі з точністю до постійного множника представляє похідну знаменника:

$$(e^{2x} + 1)' = 2e^{2x},$$

$$\text{тому } \int \frac{e^{2x}}{e^{2x} + 1} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2e^{2x} dx}{e^{2x} + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(e^{2x} + 1)}{e^{2x} + 1} \stackrel{\text{формула (3.4)}}{=} \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) + c.$$

Приклад №12 $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{x \ln^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{dx}{x} \end{array} \right] = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt \stackrel{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} -t^{-1} + c = \left[\begin{array}{l} \text{повернення до} \\ \text{старої змінної } x \end{array} \right] = -\frac{1}{\ln x} + c.$$

Приклад № 13. $\int (1 + 3x^2)^{11} x dx$.

Розв'язання.

$$\frac{1}{6} \int (1 + 3x^2)^{11} 6x dx = \left[\begin{array}{l} t = 1 + 3x^2 \\ dt = 6x dx \end{array} \right] = \int t^{11} dt \stackrel{\text{формула 3 ТОНІ}}{=} \frac{t^{12}}{12} + c = \left[\begin{array}{l} \text{повернення до} \\ \text{старої змінної } x \end{array} \right] = \frac{(1 + 3x^2)^{12}}{12} + c.$$

Приклад №14. $\int \frac{x dx}{1 + x^4}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{x dx}{1 + x^4} = \frac{1}{2} \int \frac{2x dx}{1 + (x^2)^2} = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{1 + t^2} \stackrel{\text{формула 11 ТОНІ}}{=} \frac{1}{2} \arctgt + c = \frac{1}{2} \arctg(x^2) + c.$$

Приклад №15. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Розв'язання.

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = \left[\begin{array}{l} t = \sqrt{x} \\ dt = \frac{1}{2\sqrt{x}} dx \end{array} \right] = 2 \int e^t dt = 2e^t + c = 2e^{\sqrt{x}} + c.$$

Приклад №16. $\int x \cos x dx$.

Розв'язання.

$$\int x \cos x dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = \cos x & dv(x) = x dx \\ du(x) = -\sin x & v(x) = \int x dx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right] \stackrel{\text{формула (3.10)}}{=} -\frac{x^2}{2} \sin x + \int \frac{x^2}{2} \sin x dx$$

Приклад №17. $\int x^2 \sin 3x dx$.

Розв'язання.

$$\int x^2 \sin 3x dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x^2 & dv(x) = \sin 3x dx \\ du(x) = 2x dx & v(x) = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{3} \int x \cos 3x dx.$$

Інтеграл в правій частині не є табличним, але він простіший за поданий інтеграл: показник степеня при x в підінтегральному виразі зменшився на 1. Для отриманого інтеграла ще раз скористуємося формулою інтегрування за частинами:

$$\frac{2}{3} \int x \cos 3x dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = x & dv(x) = \cos 3x dx \\ du(x) = dx & v(x) = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{3} x \sin 3x - \frac{1}{3} \int \sin 3x dx \right) = \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + c$$

Нарешті,

$$\int x^2 \sin 3x dx = -\frac{1}{3} x^2 \cos 3x + \frac{2}{9} x \sin 3x + \frac{2}{27} \cos 3x + c.$$

Приклад №18 $\int \ln x dx$.

Розв'язання.

$$\int \ln x dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & dv(x) = dx \\ du(x) = \frac{dx}{x} & v(x) = x \end{array} \right] = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + c.$$

Приклад №19. $\int \arctg x dx$.

Розв'язання.

$$\int \arctg x dx = \left[\begin{array}{ll} u(x) = \arctg x & dv(x) = dx \\ du(x) = \frac{dx}{1+x^2} & v(x) = x \end{array} \right] = x \arctg x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Для обчислення інтегралу в правій частині останньої рівності скористуємося методом заміни змінної:

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln|t| + c = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Остаточно отримуємо:

$$\int \arctg x dx = x \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c.$$

Завдання для перевірки знань

1. $\int (2x^3 - 3 \sin x + 5\sqrt{x}) dx$
2. $\int \cos 7x dx$
3. $\int \frac{dx}{x+3}$
4. $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$
5. $\int \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx.$
6. $\int \frac{dx}{x \ln^4 x}.$
7. $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$
8. $\int \arcsin x dx.$
9. $\int (2x+5)e^{-3x} dx.$

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

Практичне заняття №10.

Навчальна мета заняття – навчитися обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона-Лейбница. Ознайомитися із практичним застосуванням визначеного інтеграла.

Кількість годин - 2.

Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Обчислення визначених інтегралів.
2. Застосування визначеного інтеграла.

Література:

1. Конспект лекцій.
2. Вища математика: Навч.-метод. посібник для самот. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. — Вид. 2-ге, перероб. і доп. — К.: КНЕУ, 2002. — 606 с.
3. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. — К.: Вища школа, 1993
4. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
5. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Оголошення теми заняття та його мети. Опитування здобувачів вищої освіти з теоретичного матеріалу за темою заняття.

II. Порядок проведення основної частина заняття.

Розв'язування прикладів за темою заняття.

Приклад №1. Обчислити визначені інтеграли:

Розв'язання.

$$a) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \left| \begin{array}{lll} x = \sin t & x=0 & t=0 \\ dx = \cos t dt & x=1 & t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{aligned}
 \text{б) } \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}} & \left| \begin{array}{lll} \sqrt{x+1}=t & x=3 & t=2 \\ x=t^2-1 & x=8 & t=3 \\ dx=2tdt & & \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2 \int_2^3 (t^2-1)dt = \\
 & = 2 \left(\frac{t^3}{3} - t \right) \Big|_2^3 = \frac{32}{3}.
 \end{aligned}$$

Приклад №2. Обчислити визначені інтеграли:

Розв'язання.

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx \left| \begin{array}{ll} u=x & du=dx \\ dv=\cos x dx & v=\sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.$$

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln|1+x| \Big|_0^1 = \ln|1+1| - \ln|1+0| = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 - 0 = \ln 2$$

$$\begin{aligned}
 \int_2^3 (1+2x+3x^2) dx & = \left(x + 2 \cdot \frac{x^2}{2} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} \right) \Big|_2^3 = (x + x^2 + x^3) \Big|_2^3 = (3 + 3^2 + 3^3) - \\
 & - (2 + 2^2 + 2^3) = (3 + 9 + 27) - (2 + 4 + 8) = 39 - 14 = 25.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_1^8 \frac{2+5\sqrt[3]{x}}{x^3} dx & = \int_1^8 \frac{2+5x^{\frac{1}{3}}}{x^3} dx = \int_1^8 \left(2x^{-3} + 5x^{-\frac{8}{3}} \right) dx = \left(2 \cdot \frac{x^{-2}}{-2} + 5 \cdot \frac{x^{-\frac{5}{3}}}{-\frac{5}{3}} \right) \Big|_1^8 \\
 & = \left(-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^5}} \right) \Big|_1^8 = \left(-\frac{1}{64} - \frac{3}{\sqrt[3]{8^5}} \right) - \left(-1 - 3 \right) = -\frac{1}{64} - \frac{3}{32} + 4 = -\frac{7}{64} + 4 = 3\frac{57}{64}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \Big|_0^{\pi/2} = \\
 & = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot \frac{\pi}{2} \right) - \left(0 + \frac{1}{2} \sin 2 \cdot 0 \right) \right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.
 \end{aligned}$$

$$\int_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x + 10} = \int_2^5 \frac{dx}{x^2 + 2x + 1 + 9} = \int_2^5 \frac{dx}{(x+1)^2 + 9} = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{3} \Big|_2^5 =$$

$$= \frac{1}{3} \left[\operatorname{arctg} \frac{5+1}{3} - \operatorname{arctg} \frac{2+1}{3} \right] = \frac{1}{3} (\operatorname{arctg} 2 - \operatorname{arctg} 1) = \frac{1}{3} \left(\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{4} \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{12}.$$

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = \int_0^1 \frac{x dx}{1+(x^2)^2}.$$

Зробимо заміну $x^2 = t$. Тоді $2x dx = dt$, $x dx = \frac{1}{2} dt$.

Визначимо нові межі інтегрування. Якщо $x = 0$, то $t = 0^2 = 0$, при $x = 1$ $t = 1^2 = 1$.

Отримаємо:

$$\int_0^1 \frac{x dx}{1+x^4} = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{4} - 0 \right) = \frac{\pi}{8}.$$

$$\int_0^3 x \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x, \quad du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = x dx, \quad v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \left(\operatorname{arctg} x \cdot \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{x^2 dx}{1+x^2} =$$

$$= \left(\operatorname{arctg} 3 \cdot \frac{9}{2} - \operatorname{arctg} 0 \cdot 0 \right) - \frac{1}{2} \int_0^3 \frac{(1+x^2) - 1}{1+x^2} dx = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} \int_0^3 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx =$$

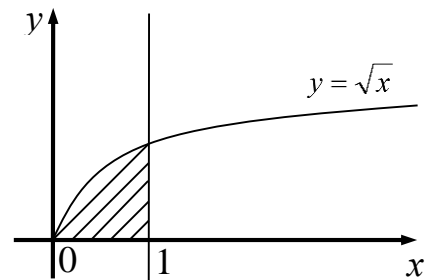
$$= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} (x - \operatorname{arctg} x) \Big|_0^3 = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{2} [(3 - \operatorname{arctg} 3) - 0] = \frac{9}{2} \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 = 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{3}{2}.$$

Приклад №3. Обчислити площу області, обмеженої

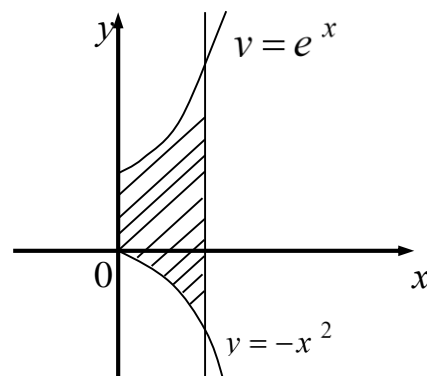
лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, $x = 1$.

Розв'язання.



$$S = \int_0^1 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3} \text{ (кв. од.)}$$

Приклад №4. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = -x^2$, $y = e^x$, віссю ординат і прямою $x = 1$.



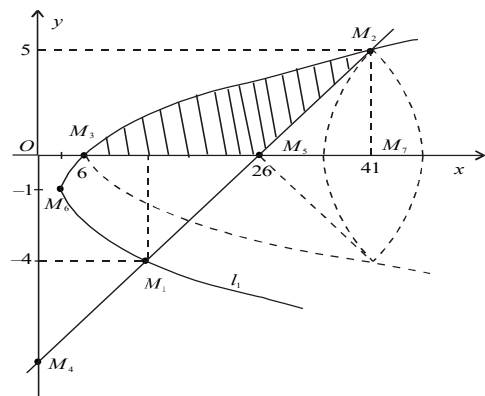
Розв'язання.

$$S = \int_0^1 [e^x - (-x^2)] dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3} \text{ (кв.од.)}$$

Приклад №5. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $x = y^2 + 2y + 6$, $x - 3y - 26 = 0$, $y = 0$, при $y > 0$.

Розв'язання.

Будуємо задані лінії на координатній площині аналогічно попередній задачі і штрихуванням визначаємо ту фігуру, яка за умовою задачі обертається навколо осі Ox . Це буде фігура $M_2M_3M_5$. Об'єм тіла обертання $V_{M_2M_3M_5} = V_{M_3M_2M_7}$ (об'єм конуса $V_{M_2M_5M_8}$).



У даному прикладі для знаходження функції $y = f(x)$ виконаємо такі перетворення:

$$\begin{cases} x = y^2 + 2y + 6 \\ y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 5 = (y + 1)^2 \\ y > 0 \end{cases} \Rightarrow y = \sqrt{x - 5} - 1 \Rightarrow f(x) = \sqrt{x - 5} - 1.$$

Знаходимо об'єми тіла обертання та конуса:

$$V_{M_3 M_2 M_7} = \pi \int_6^{41} (\sqrt{x-5} - 1)^2 dx = \pi \int_6^{41} (x - 2\sqrt{x-5} - 4) dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{4(\sqrt{x-5})^3}{3} - 4x \right) \Big|_6^{41} = 395,8\pi;$$

$$V_{M_2 M_5 M_8} = \frac{1}{3} \pi (M_2 M_7)^2 \cdot M_5 M_7 = \frac{\pi}{3} 25 \cdot 15 = 125\pi.$$

Отже, об'єм тіла обертання $V_{M_2 M_3 M_5}$ буде такий: $V_{M_2 M_3 M_5} = (395,8 - 125)\pi = 270,8\pi$.

Приклад №6.

Знайти довжину дуги кривої $x = e^t \cos t$, $y = e^t \sin t$ від $t = 0$ до $t = \ln \pi$.

Розв'язання.

$$\text{Знайдемо } dL: x'(t) = e^t \cos t + e^t \cdot (-\sin t) = e^t (\cos t - \sin t),$$

$$y'(t) = e^t \sin t + e^t \cos t = e^t (\sin t + \cos t).$$

$$\text{Тоді } dL = \sqrt{[e^t (\cos t - \sin t)]^2 + [e^t (\sin t + \cos t)]^2} dt =$$

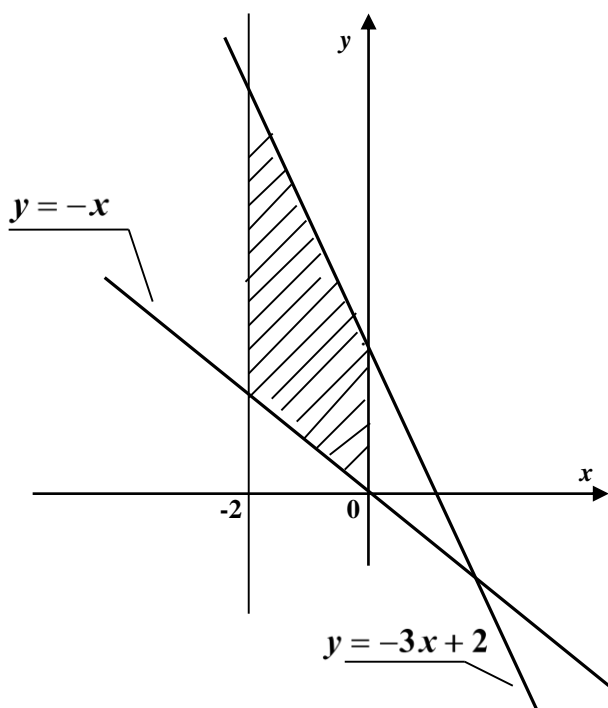
$$= \sqrt{e^{2t} (\cos^2 t - 2 \cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2 \sin t \cos t + \cos^2 t)} dt =$$

$$= e^t \sqrt{1+1} dt = \sqrt{2} e^t dt.$$

$$\text{Тоді } L = \int_0^{\ln \pi} \sqrt{2} e^t dt = \sqrt{2} e^t \Big|_0^{\ln \pi} = \sqrt{2} (e^{\ln \pi} - e^0) = \sqrt{2} (\pi - 1).$$

Приклад №7. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = -3x + 2$, $y = -x$, $x = -2$, $x = 0$.

Розв'язання.



$$\begin{aligned}
 V_{ox} &= \pi \int_{-2}^0 [(-3x+2)^2 - (-x)^2] dx = \\
 &= \pi \int_{-2}^0 (9x^2 - 12x + 4 - x^2) dx = \\
 &= \pi \int_{-2}^0 (8x^2 - 12x + 4) dx = 4\pi \int_{-2}^0 (2x^2 - 3x + \\
 &\quad + 1) dx = 4\pi \left(2 \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \cdot \frac{x^2}{2} + x \right) \Big|_{-2}^0 = \\
 &= 4\pi \left[0 - \left(-2 \cdot \frac{8}{3} - 3 \cdot \frac{4}{2} - 2 \right) \right] = 4\pi \cdot \frac{40}{3} = \\
 &= \frac{160}{3} \pi \text{ куб. од.}
 \end{aligned}$$

Завдання для перевірки знань

Обчислити площу фігури, обмеженої лініями.

1. $y = x^2 + 4x$, $y = x + 4$.

2. $y = -x^2 + 9$, $y = 2x + 1$.

Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями:

1. $y^2 = 1 - x$, $x = 0$ навколо осі Oy .

2. $x^2 - y^2 = 4$, $y = \pm 2$ навколо осі Oy .

3. $y = xe^x$, $y = 0$, $x = 1$ навколо осі Ox .

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Перевірити у декількох здобувачів вищої освіти результати розв'язання прикладів, виставити відповідні оцінки. Зазначити перелік задач для самостійної роботи, вказати час і спосіб перевірки результатів самостійної роботи.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна література.

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навчальний посібник. – К.: Вища школа, 1993
2. Єрмакова О. А. Вища математика: Навч. посіб. для дистанц. Форми навчання / За ред. В. М. Назаренка. – К.: Ун-т «Укрвіна», 2004. – 444 с.
3. Колодінська О.В. Вища математика у прикладах і задачах. Навчальний посібник.- К.: Вид-во Європ. Ун-ту, 2003.
4. Лавренчук В. П., Готинчан Т. І., Дронь В. С., Кондур О. С. Вища математика. Курс лекцій у трьох частинах. Частина 1: Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Чернівці: Рута, 2007. – 440 с.
5. Мелашенко, О. П. Вища математика: навч. посіб. / О. П. Мелашенко, В. Є. Рог; МВС України, Харків. нац. ун-т внутр. справ. - Харків: ХНУВС, 2019. - 100 с.
6. Міхайленко В.М., Федоренко Н.Д. Алгебра та геометрія для економістів. – К.:УФІМБ “Пошук”, 1998.
7. Навчально-методичні вказівки до самостійної роботи з дисципліни «Вища математика» : [галузь знань: Інформаційні технології; спец.: Кібербезпека; спец.: протидія кіберзлочинності; ступінь вищ. освіти: бакалавр; форма навчання: денна] / розроб. Ю.В. Гнусов. - Харків : ХНУВС. - 2016. - 14 с.

Допоміжна література.

1. Вища математика: Навч. – метод. посібник для самост. вивч. дисц. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова, О. І. Лютий та ін. – Вид. 2- ге, перероб. і доп. – К.: КНЕУ, 2002. – 606 с.
2. Чубатюк В. М. Вища математика. Навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей навчальних закладів III та IV рівнів акредитації. – К.: ВД «Професіонал», 2006. – 432 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті

1. Вища математика: Підручник / Домбровський В.А., Крижанівський І.М., Мацьків Р.С., Мигович Ф.М., Неміш В.М., Окрепкий Б.С., Хома Г.П., Шелестовська М.Я.; за редакцією Шинкарика М.І. –Тернопіль: Видавництво Карп'юка, 2003 - 480с. - ISBN 966-7946-15-0 [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://library.tneu.edu.ua/files/EVD/matematica/VM_pidr.pdf. - Назва з екрану.
2. Вища математика. Навчальний посібник. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://univer.nuczu.edu.ua/tmp_metod/148/Basmanov.pdf - Назва з екрану.
3. Рубіш В.В. Конспект лекцій з курсу "Вища математика": Частина І. – Ужгород: ДВНЗ УжНУ, 2015. – 96 с. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: https://dspace.uzhnu.edu.ua/jspui/bitstream/lib/3472/1/Methodychka_VM_Phys.pdf