МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кременчуцький льотний коледж

Циклова комісія аеронавігації

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни

Авіаційна географія (Геоінформаційні системи та картографія)

обов’язкових компонент освітньої програми першого рівня вищої освіти

Аеронавігація

За темою № 1 – Введення в сферичну тригонометрію

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Педагогічною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії аеронавігації

Протокол від 29.06.2023 №14

Розробник:
1. Викладач циклової комісії аеронавігації, спеціаліст 2-й категорії Ємець В.В.

Рецензенти:
1. Викладач циклової комісії аеронавігації, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, викладач-методист Тягній В.Г.
2. Професор кафедри аеронавігаційних систем навчально-наукового інституту Аеронавігації, електроніки та телекомунікації Національного авіаційного університету, доктор технічних наук, доцент Шмельова Т.Ф.

План лекції

1. Сферичні трикутники – основні визначення
2. Властивості сферичних трикутників
3. Формули для рішення сферичних трикутників
4. Формули для рішення прямокутних сферичних трикутників
5. Елементарні сферичні трикутники

Рекомендована література

Основна:

1. В.А. Кокорін, О.К. Шейгас, О.М. Шевченко та ін. Основи повітряної навігації. Навч. посібник, Харків: ХНУПС, 2019 р.

Додаткова:

2. Данилевський М.П., Колосов А.І., Якунін А.В. Основи сферичної геометрії та тригонометрії. Навч. посібник – Х.:ХНАМГ, 2011

Інформаційні ресурси в мережі Internet

1. Сферичні трикутники – основні визначення

Геометрія на поверхні шара є неевклідової.

Найкоротша відстань між двома точками на поверхні шара вимірюється вдовж окружності великого кола, тобто окружності, площина якої проходить через центр шара (так звана геодезична крива). Вершини сферичного трикутника – це точки перетинання трьох променів, які виходять з центру шара і сферичної поверхні.

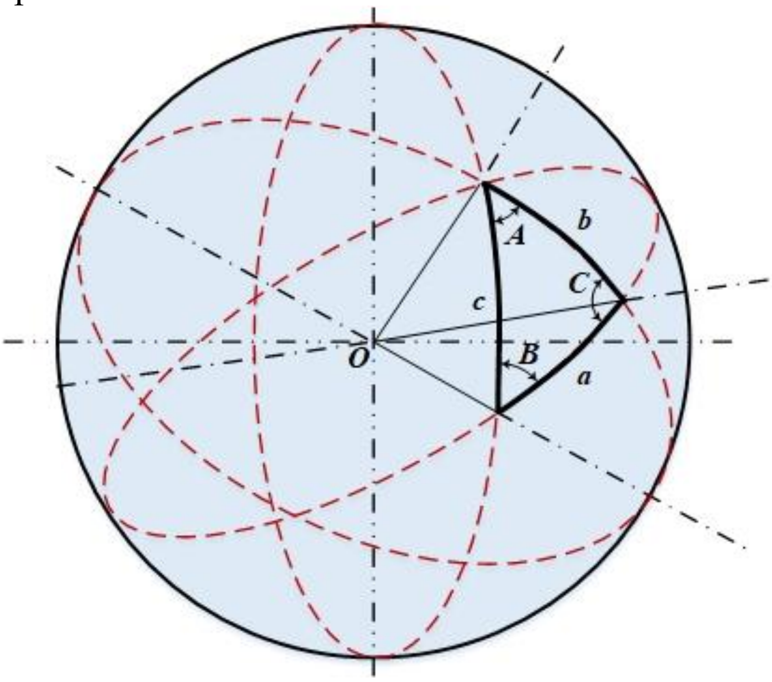

Рисунок 1. Сферичний трикутник

Сторони ***a,b,c*** сферичного трикутника – це кути між променями, які менше 180°. Кожної стороні трикутника відповідає дуга великого кола.

Кути ***A,B,C***, які протилежать сторонам трикутника, являють собою кути між дугами великих кіл.

2. Властивості сферичних трикутників

a) Сума сторін сферичного трикутника: $0^\circ < \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} < 360^\circ$;

b) Сума кутів сферичного трикутника: $180^\circ < \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} < 540^\circ$;

c) Сума будь-яких двох сторін більше третьої сторони;

d) Сума будь-яких двох кутів менше, чим 180°, плюс третя сторона.

Сферичний трикутник визначається:

a) трьома сторонами;

b) трьома кутами;

c) двома сторонами і кутом, який замкнутий між ними;

d) стороною і двома кутами, які прилеглі до неї.

Сферичний ексцес (збиток): $\varepsilon = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C} - \pi \left(\boldsymbol{рад} \right)$.

Сферичний дефект: $\boldsymbol{d} = 2\pi - \left(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} \right)$.

Площа сферичного трикутника: $\boldsymbol{S_R} = \boldsymbol{R}^2 \cdot \varepsilon$.

3. Формули для рішення сферичних трикутників

3.1. Теорема синусів:

$$\frac{\sin \boldsymbol{a}}{\sin \boldsymbol{A}} = \frac{\sin \boldsymbol{b}}{\sin \boldsymbol{B}} = \frac{\sin \boldsymbol{c}}{\sin \boldsymbol{C}};$$

3.2. Теорема косинусів (для сторін):

$$\cos \boldsymbol{a} = \cos \boldsymbol{b} \cos \boldsymbol{c} + \sin \boldsymbol{b} \sin \boldsymbol{c} \cos \boldsymbol{A};$$

3.3. Теорема косинусів (для кутів):

$$\cos \boldsymbol{A} = -\cos \boldsymbol{B} \cos \boldsymbol{C} + \sin \boldsymbol{B} \sin \boldsymbol{C} \cos \boldsymbol{a};$$

3.4. Формула п’яти елементів:

$$\sin \boldsymbol{a} \cdot \cos \boldsymbol{B} = \sin \boldsymbol{c} \cdot \cos \boldsymbol{b} - \cos \boldsymbol{c} \cdot \sin \boldsymbol{b} \cdot \cos \boldsymbol{A}$$

3.5. Формула чотирьох елементів (формула котангенсів):

$$\cos \boldsymbol{c} \cdot \cos \boldsymbol{B} = \sin \boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{ctga} - \sin \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{ctgA}$$

3.6. Аналогії Непєра:

$$\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2} = \boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{a}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2} \cdot \sin\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2} = \boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{a}}{2} \cdot \sin\frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} = \boldsymbol{ctg}\frac{\boldsymbol{A}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2} = \boldsymbol{ctg}\frac{\boldsymbol{A}}{2} \cdot \cos\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2};
\end{aligned}\right\}, \boldsymbol{або} \quad
\left.\begin{aligned}
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2} = \frac{\cos\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}}{\cos\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}} \cdot \boldsymbol{ctg}\frac{\boldsymbol{C}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{2} = \frac{\sin\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2}}{\sin\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2}} \cdot \boldsymbol{ctg}\frac{\boldsymbol{C}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}}{2} = \frac{\cos\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{2}}{\cos\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}} \cdot \boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{C}}{2},\\
&\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}}{2} = \frac{\sin\frac{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}{2}}{\sin\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}{2}} \cdot \boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{C}}{2},
\end{aligned}\right\}$$

3.7. Аналогії Деламбра і Гауса:

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\boldsymbol{A}}{2}\cdot\sin\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}&=\sin\frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot\cos\frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}{2},\\
\sin\frac{\boldsymbol{A}}{2}\cdot\cos\frac{\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}&=\cos\frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot\cos\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2},\\
\cos\frac{\boldsymbol{A}}{2}\cdot\sin\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2}&=\sin\frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot\sin\frac{\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}}{2},\\
\cos\frac{\boldsymbol{A}}{2}\cdot\cos\frac{\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}}{2}&=\cos\frac{\boldsymbol{a}}{2}\cdot\sin\frac{\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2};
\end{aligned}\right\}$$

3.8. Формули половинних кутів:

$$\boldsymbol{s}=\frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2};\ \boldsymbol{S}=\frac{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}}{2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\sin\frac{\boldsymbol{A}}{2}&=\sqrt{\frac{\sin(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b})\cdot\sin(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c})}{\sin\boldsymbol{b}\cdot\sin\boldsymbol{c}}}\\
\cos\frac{\boldsymbol{A}}{2}&=\sqrt{\frac{\sin\boldsymbol{s}\cdot\sin(\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a})}{\sin\boldsymbol{b}\cdot\sin\boldsymbol{c}}}\\
\sin\frac{\boldsymbol{a}}{2}&=\sqrt{\frac{-\cos\boldsymbol{S}\cdot\cos(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{A})}{\sin\boldsymbol{B}\cdot\sin\boldsymbol{C}}}\\
\cos\frac{\boldsymbol{a}}{2}&=\sqrt{\frac{\cos(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{B})\cdot\cos(\boldsymbol{S}-\boldsymbol{C})}{\sin\boldsymbol{B}\cdot\sin\boldsymbol{C}}}
\end{aligned}\right\}$$

3.9. Рівняння Люильє:

$$\boldsymbol{tg}\left(\frac{\boldsymbol{A}}{2}-\frac{\varepsilon}{2}\right)=+\sqrt{\frac{\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{b}}{2}\cdot\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{c}}{2}}{\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{s}}{2}\cdot\boldsymbol{tg}\frac{\boldsymbol{s}-\boldsymbol{a}}{2}}}$$

<u>4. Формули для рішення прямокутних сферичних трикутників</u>

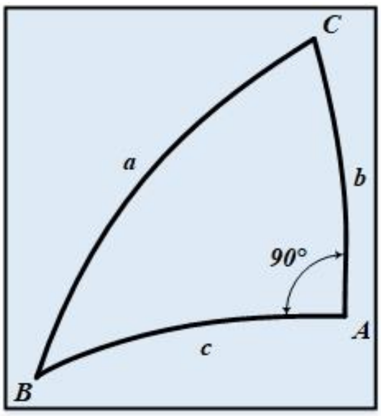

Рисунок 2. Прямокутний сферичний трикутник

Якщо три елемента трикутника лежать рядом, то косинус середнього елемента дорівнює добутку котангенсів крайніх елементів.

Приклад: елементи ***a***, ***B*** і ***c***, які лежать рядом, зв'язуються співвідношенням:

$$\cos \boldsymbol{B} = \boldsymbol{ctg\,a} \cdot \boldsymbol{ctg}\left(90^{\circ} - \boldsymbol{c}\right) = \boldsymbol{ctg\,a} \cdot \boldsymbol{tg\,c}$$

Якщо елементи лежать не рядом, то косинус елемента, який лежить окремо, дорівнює добутку синусів елементів, які лежать рядом.

Приклад: для елементів ***a***, ***b***, и ***c***, з яких ***b*** и ***c*** лежать рядом, а гіпотенуза ***a*** – окремо:

$$\cos \boldsymbol{a} = \sin\left(90^{\circ} - \boldsymbol{b}\right) \cdot \sin\left(90^{\circ} - \boldsymbol{c}\right) = \cos \boldsymbol{b} \cdot \cos \boldsymbol{c}$$

5. Елементарні сферичні трикутники

Елементарними сферичними трикутниками називають таки, у яких елементи є малими величинами. Вони бувають двох типів (рис. 3) – мали, у яких:
(a, b, c)* < *R*$_{сф}$ *, і вузькі – у яких кут ***C*** і протилежна йому сторона ***c*** є мали елементи.

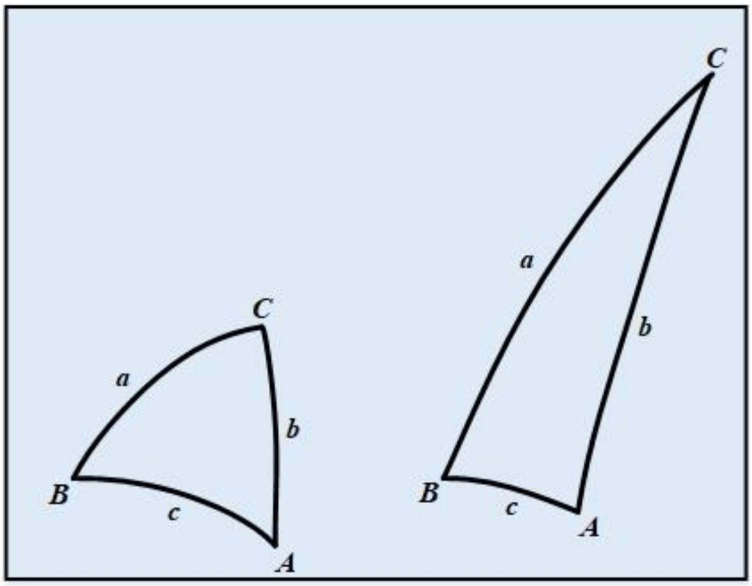

Рисунок 3. Елементарні сферичні трикутники

Мали сферичні трикутники вирішуються як пласкі за допомогою теореми Лежандра:
- *якщо випрямити сторони малого сферичного трикутника, то кожний кут в отриманому трикутнику буде менше відповідного кута сферичного трикутника на одну третину сферичного ексцесу, для обчислювання якого можна взяти площу плаского трикутника.*

Якщо після випрямлення сторін сферичного трикутника ***ABC*** *отримано плаский трикутник* ***A'B'C'****, в якому* $\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}' = \boldsymbol{b}; \boldsymbol{c}' = \boldsymbol{c}$*, то:*

$$\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}' = \frac{\varepsilon}{3}; \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}' = \frac{\varepsilon}{3}; \boldsymbol{C} - \boldsymbol{C}' = \frac{\varepsilon}{3}$$

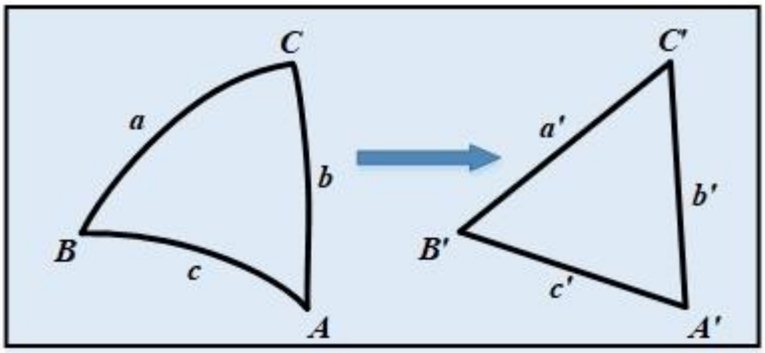

Рисунок 4. Заміна малого сферичного трикутника пласким