МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Кременчуцький льотний коледж

Циклова комісія аеронавігації

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни

Авіаційна географія (Геоінформаційні системи та картографія)

обов’язкових компонент освітньої програми першого рівня вищої освіти

<u>Аеронавігація</u>

за темою № 4 – Методика розрахунку ліній шляху і ліній положення ЛА на поверхні земної сфери

Харків 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Педагогічною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії аеронавігації

Протокол від 29.06.2023 №14

Розробник:
1. Викладач циклової комісії аеронавігації, спеціаліст 2-й категорії Ємець В.В.

Рецензенти:
1. Викладач циклової комісії аеронавігації, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, викладач-методист Тягній В.Г.
2. Професор кафедри аеронавігаційних систем навчально-наукового інституту Аеронавігації, електроніки та телекомунікації Національного авіаційного університету, доктор технічних наук, доцент Шмельова Т.Ф.

План лекції

1. Поняття о лініях шляху і лініях положення
2. Ортодромія
3. Локсодромія
4. Лінія рівних азимутів
5. Лінія рівних відстаней
6. Лінія рівних різниць відстаней

Рекомендована література:

Основна:

1. В.А. Кокорін, О.К. Шейгас, О.М. Шевченко та ін. Основи повітряної навігації. Навч. Посібник, Харків: ХНУПС, 2019 р.
2. Демін В.М. Теорія і практика використання карт в авіації. - М., Машинобудування, 1969
3. Аникін О.М., Малишевський О.В. Авіаційна картогрфія: навч. посіб. – Л..:ОЛАГА, 1987.

Додаткова:

4. Лебедев М.І. Літаководіння. Навч. посібник – Ставрополь, 2003

Інформаційні ресурси в мережі Internet

1. Поняття о лініях шляху і лініях положення

Однією з характеристик поступового руху ЛА є його траєкторія – просторова крива, по якої рухається його центр мас. Суттєвий інтерес являє собою не сама траєкторія, а форма її проекції на земну поверхню, яка називається ***лінією шляху***.

У теперішній час знайшли застосування таки основні лінії шляху: ***ортодромія*** і ***локсодромія***. Лінія шляху між заданими точками, може бути неоднорідною кривою, а при вирішуванні конкретної задачі проекція траєкторія може бути представлена як сукупність вказаних ліній.

Точка на земної поверхні, в яку проектується центр мас ЛА, називають його місце, координати якого вимірюються за допомогою навігаційної апаратури деяких параметрів. Ця задача вирішується або за допомогою обчислювальної технікі, або графічними прийомами. В останнім випадку використовуються так звані ***лінії положення***, які виражають зв’язок вимірюваного параметра з координатами місця апарату і координатами навігаційної точки.

В практиці авіаційної навігації використовуються таки основні лінії положення:
- лінія ортодромичного пеленгу;
- лінія рівних азимутів;
- лінія рівних відстаней;
- лінія рівних різниць відстаней.

Рішення різних задач лінії шляху і лінії положення виконується головним чином за допомогою карт, а прийоми побудови ліній залежать від геометричних властивостей ліній на поверхні Землі і від особливостей конкретного типу карти.

2. Ортодромія

Ортодромією називають лінію найкоротшої відстані між двома точками на поверхні земної сфери.

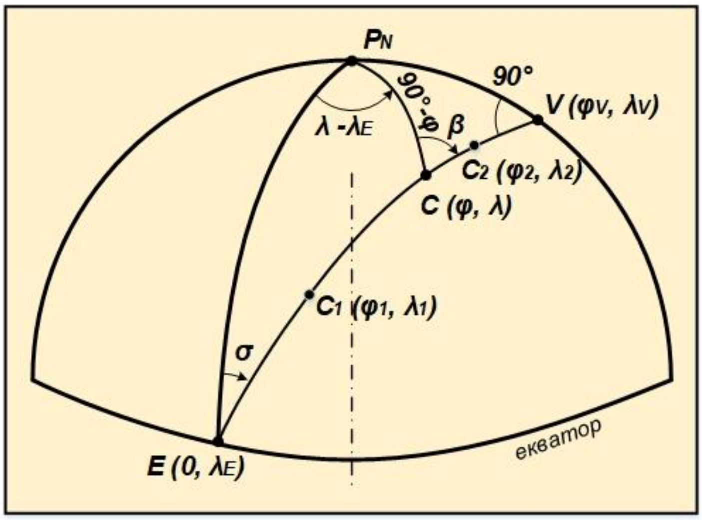

Рисунок 5.1 Ортодромія

Лінією найкоротшої відстані на поверхні будь-якого тіла є крива, кривина якої в кожної точці мінімальна, тобто, лінія, яку шукаємо, являє собою сукупність нескінченно малих дуг, які мають найбільші радіуси кривини. На сферичної поверхн найбільший радіус кривини має велике коло. Таким чином, ортодромія – це пласка крива, яка являє собою дугу великого кола, площина якого проходить через центр сфери.

Якщо проекція траєкторії руху ЛА співпадає з дугою великого кола, ортодромія розглядається як лінія руху. При рішенні задач, пов'язаних з прокладанням ортодромичного шляху, або пеленга, необхідно визначати <u>довжину ортодромії</u>, <u>шляховий кут</u> і <u>координати проміжних точок</u>.

2.1 Рівняння ортодромії.

На рис. 5.1 $\boldsymbol{C}_1(\varphi_1,\lambda_1)$ і $\boldsymbol{C}_2(\varphi_2,\lambda_2)$ - початкова і кінцева точки ортодромії, $\boldsymbol{C}(\varphi,\lambda)$ - поточна точка. Якщо продовжити дугу великого кола в обидві сторони, то $\boldsymbol{E}(0,\lambda_{\boldsymbol{E}})$ - точка пересічення дугі великого кола з екватором, σ - кут між екватором і меридіаном $\boldsymbol{P_N E}$. З'єднуючи полюс з поточною точкою ***C***, отримуємо сферичний трикутник $\boldsymbol{P_N EC}$, рішення якого за допомогою чотирьох елементів дає:

$$\cos \boldsymbol{P_N E}\cdot\cos(\lambda-\lambda_{\boldsymbol{E}}) = \sin \boldsymbol{P_N E}\cdot \boldsymbol{ctg}\left(90^\circ-\varphi\right) - \sin(\lambda-\lambda_{\boldsymbol{E}})\cdot \boldsymbol{ctg}\sigma$$

Підставив значення сторони $\boldsymbol{P_N E}=90^\circ$ і вирішуючи рівняння відносно поточної широти, отримуємо:

$$\boldsymbol{tg}\varphi = \boldsymbol{ctg}\sigma\cdot\sin(\lambda-\lambda_{\boldsymbol{E}})$$

Кут $\boldsymbol{\sigma}$ – величина постійна, отже, широта $\boldsymbol{\varphi}$ буде змінюватися за рахунок зміни $\sin(\lambda-\lambda_{\boldsymbol{E}})$ від -1 до +1. Таким чином, широта точок ортодромії змінюється в межах $-\left(90^\circ-\sigma\right)\le\varphi\le\left(90^\circ-\sigma\right)$.

Точка ***V*** (рис.5.1), в якої ортодромія досягає найбільшої широти $\varphi_{\boldsymbol{V}}=90^\circ-\sigma$, називається точкою ***вертекса***. Її довгота буде $\lambda_{\boldsymbol{V}}=\lambda_{\boldsymbol{E}}+90^\circ$. В цієї точці ортодромія підходить до полюса на сферичну відстань $\boldsymbol{\sigma}$**.**

Кут $\boldsymbol{\beta}$, під яким ортодромія пересікає меридіан в точці С, визначається за формулою:

$$\sin\beta=\frac{\sin\sigma}{\cos\varphi}$$

З цієї формули слідує, що ортодромія пересікає меридіани під різними кутами:

- в точці вертекса: $\varphi=\varphi_V, \cos\varphi_V=\sin\sigma, \sin\beta=1$ ***і*** $\beta=90^\circ$, тобто ортодромія пересікає меридіан під прямим кутом;
- при $\sigma=0, \sin\beta=0$ ***і*** $\beta=0$ - ортодромія співпадає з меридіаном;
- якщо $\sigma=90^\circ$, то ортодромія співпадає з екватором.

<u>**Висновки:**</u>

- положення ортодромії визначається координатами точці вертекса, в якої вона ближче всього підходить до полюсу;
- ортодромія пересікає меридіани під різними кутами;
- в точці вертекса ортодромія складає з меридіаном кут 90°;
- меридіани і екватор є частинними випадками ортодромії.

2.2 Розрахунок напряму ортодромії

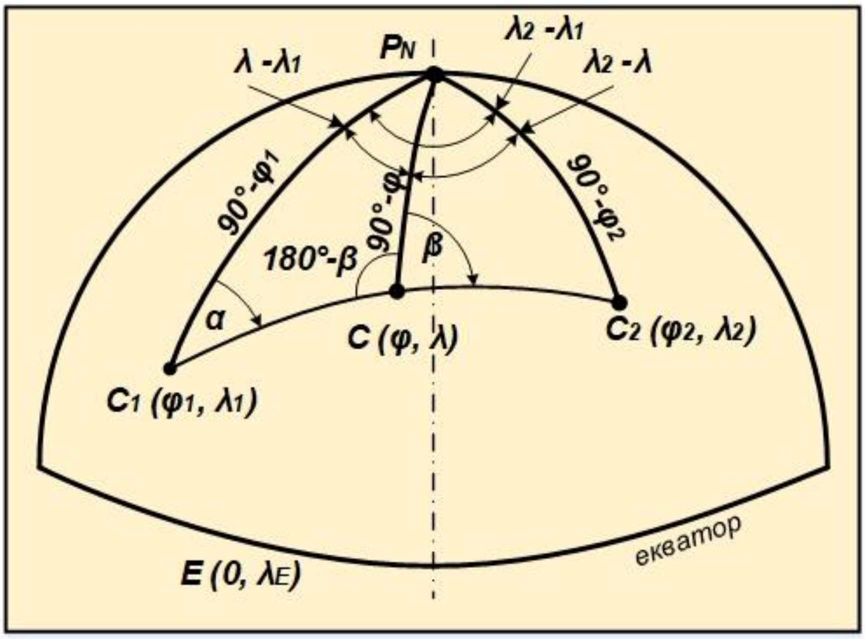

Рисунок 5.2 Напрям ортодромії в початкової точці

Визначимо напрям найкоротшого шляху на земної сфері з точці $\boldsymbol{C_1}$ в точку $\boldsymbol{C_2}$, тобто, знайдемо математичний вираз для розрахунку кута пересічення ортодромії з меридіаном в точці $\boldsymbol{C_1}$ по координатам крайніх точок.

Маємо сферичний трикутник (рис.5.2) $\boldsymbol{P_N C_1 C_2}$, в якому відомі сторони $\boldsymbol{P_N C_1}$ і $\boldsymbol{P_N C_2}$ і кут між ними ($\boldsymbol{\alpha}$). За допомогою формули котангенсів отримуємо:

$$\cos\left(90^\circ-\varphi_1\right)\cdot\cos\left(\lambda_2-\lambda_1\right)=\sin\left(90^\circ-\varphi_1\right)\cdot \boldsymbol{ctg}\left(90^\circ-\varphi_2\right)-\sin\left(\lambda_2-\lambda_1\right)\cdot \boldsymbol{ctg}\alpha,$$

звідки: $\boldsymbol{ctg}\alpha=\cos\varphi_1\cdot \boldsymbol{tg}\varphi_2\cdot\cos\boldsymbol{ec}\left(\lambda_2-\lambda_1\right)-\sin\varphi_1\cdot \boldsymbol{ctg}\left(\lambda_2-\lambda_1\right)$.

Напрям ортодромії у довільної точці $\boldsymbol{C(\varphi, \lambda)}$, тобто кут $\boldsymbol{\beta}$, якщо є відомий кут $\boldsymbol{\alpha}$, можливо визначити зі сферичного трикутника $\boldsymbol{P_N C_1 C_2}$ по формулі синусів:

$$\sin\beta=\sin\alpha\cdot\frac{\cos\varphi_1}{\cos\varphi}$$

2.3 Розрахунок довжини ортодромії

Якщо відомі координати крайніх точок $\boldsymbol{C_1(\varphi_1, \lambda_1)}$ і $\boldsymbol{C_2(\varphi_2, \lambda_2)}$ і розрахований напрям ортодромії у початкової точці, то згідно з формулою синусів:

$$\sin \boldsymbol{S}_{opm}=\frac{\cos\varphi_2\sin\left(\lambda_2-\lambda_1\right)}{\sin\alpha}$$

де $S_{орт}$ – довжина дуги ортодромії C_1C_2 в градусах і мінутах дуги великого кола.

Для отримання результату в кілометрах:

$$S_{орт}(км) = 1{,}853 \cdot S'_{орт},$$

де $S'_{орт}$ - довжина дугі в мінутах великого кола.

2.4 Розрахунок координат проміжних точок ортодромії через координати точки вертекса

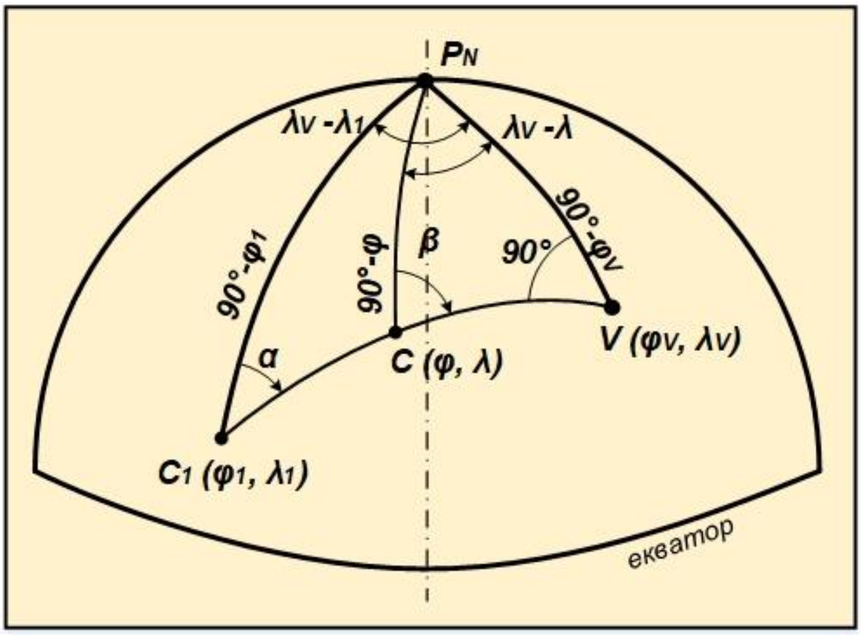

Рисунок 5.3 Координати точці вертекса ортодромії

Ортодромію великої довжини будується на картах по точкам. Найбільш просто координати проміжних точок можливо визначити, якщо попередньо було розраховано координати точці вертекса.

З прямокутного сферичного трикутника P_NVC_1 (рис.5.3) розглядаючи три елемента (α, $90°-\varphi_1$, $\lambda_V-\lambda_1$), що лежать рядом, отримуємо:

$$\cos\left(90^\circ - \varphi_1\right) = \boldsymbol{ctg}\alpha \cdot \boldsymbol{ctg}\left(\lambda_V - \lambda_1\right),$$

або, рішення відносно довготи вертекса:

$$\boldsymbol{ctg}\left(\lambda_V - \lambda_1\right) = \sin\varphi_1 \cdot \boldsymbol{tg}\alpha$$

В тому же трикутнику розглянемо елементи $\left(\alpha, 90^\circ - \varphi_1, 90^\circ - \varphi_2\right)$, які також лежать рядом, можна записати:

$$\cos\left[90^\circ - \left(90^\circ - \varphi_V\right)\right] = \sin\left(90^\circ - \varphi_1\right) \cdot \sin\alpha \Rightarrow \cos\varphi_V = \cos\varphi_1 \cdot \sin\alpha$$

Для визначення координат проміжної точці ортодромії $C(\varphi, \lambda)$ з прямокутного сферичного трикутника P_NVC знайдемо зв’язок між координатами точці C і координатами вертекса $V\left(\varphi_V, \lambda_V\right)$:

$$\cos(\lambda_V - \lambda) = \boldsymbol{ctg}(90^\circ - \varphi) \cdot \boldsymbol{ctg}\left[90^\circ - (90^\circ - \varphi_V)\right];$$

$$\boldsymbol{tg}\varphi = \boldsymbol{tg}\varphi_V \cdot \boldsymbol{ctg}(\lambda_V - \lambda)$$

Якщо, ортодромія розташовується ближче до паралелі, то задаючи значення довготи $\boldsymbol{\lambda}$ проміжної точці, по останньої формулі можливо розрахувати її широту $\boldsymbol{\varphi}$. Якщо ортодромія ближче по напряму до меридіану, то більш зручно задаючи широту $\boldsymbol{\varphi}$ розрахувати довготу $\boldsymbol{\lambda}$.

Таким чином, для визначення координат проміжних точок необхідно вирішувати послідовність рівнянь:

$$\begin{cases} \boldsymbol{ctg}\alpha = \cos\varphi_1 \cdot \boldsymbol{tg}\varphi_2 \cdot \cos\boldsymbol{ec}(\lambda_2 - \lambda_1) - \sin\varphi_1 \cdot \boldsymbol{ctg}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \boldsymbol{ctg}(\lambda_V - \lambda_1) = \sin\varphi_1 \cdot \boldsymbol{tg}\alpha \\ \cos\varphi_V = \cos\varphi_1 \cdot \sin\alpha \\ \boldsymbol{tg}\varphi = \boldsymbol{tg}\varphi_V \cdot \cos(\lambda_V - \lambda) \end{cases}$$

Широти проміжних точок також можливо визначати за формулою, задаючи довготи цих точок:

$$\boldsymbol{tg}\varphi = \boldsymbol{A}_2 \sin(\lambda - \lambda_1) + \boldsymbol{A}_1 \sin(\lambda_2 - \lambda),$$

де: $$\begin{matrix} \boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{tg}\varphi_2 \cdot \cos\boldsymbol{ec}(\lambda_2 - \lambda_1) \\ \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{tg}\varphi_1 \cdot \cos\boldsymbol{ec}(\lambda_2 - \lambda_1) \end{matrix}.$$

*) Методика розрахунку елементів ортодромії на поверхні земної сфери дається в сферичних координатах. Для урахування стискання Землі геодезичні широти пунктів $\boldsymbol{C_1}$ і $\boldsymbol{C_2}$ необхідно перерахувати в сферичні по формулі:

$$\varphi = \boldsymbol{B} - 9' \cdot \sin 2\boldsymbol{B}$$

Отримані сферичні широти проміжних точок необхідно перевести в геодезичні:

$$\boldsymbol{B} = \varphi + 9' \cdot \sin 2\varphi,$$

після чого ортодромію можливо перевести на карту.

3. Локсодромія

Локсодромією називають лінію, яка пересікає меридіани під одним і тим же кутом. По локсодромії рухається ЛА при утриманні в польоті постійного значення істинного шляхового кута (ИПУ).

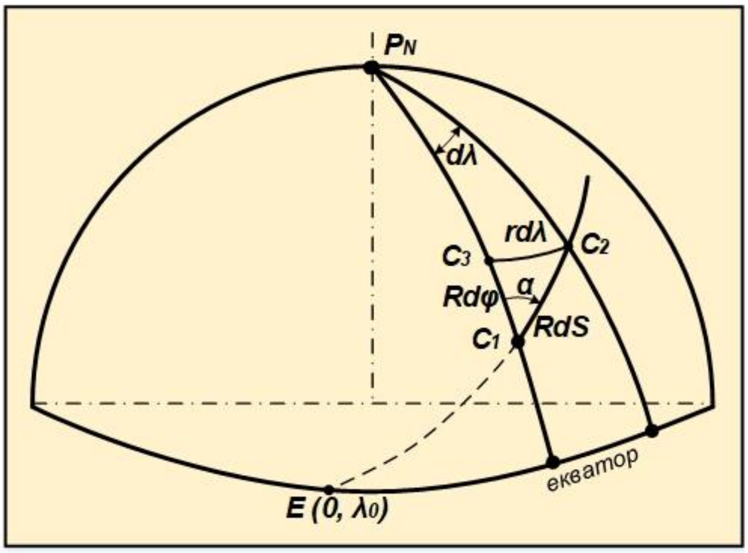

Рисунок 5.4 Елементарна ділянка локсодромії

Для отримання рівняння локсодромії на поверхні земної сфери, розглянемо елементарний трикутник $C_1C_2C_3$, який утворений елементарними відрізками:

- $rd\lambda$ - відрізок паралелі C_2C_3;
- RdS - відрізок локсодромії C_1C_2;
- $Rd\varphi$ - відрізок меридіану C_1C_3.

Від елементарного прямокутного трикутника кут α між локсодромією і меридіаном:

$$tg\alpha = \frac{rd\lambda}{Rd\varphi} = \frac{R\cos\varphi d\lambda}{Rd\varphi},$$

звідки:

$$d\lambda = tg\alpha \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \quad (*)$$

Інтегруючи цей вираз, отримуємо: $\lambda - \lambda_0 = tg\alpha \cdot \ln\left[tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\right]$,

$$\text{або: } tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) = e^{-(\lambda_0 - \lambda)\cdot ctg\alpha} \quad (**)$$

Отримана формула являє собою рівняння локсодромії на поверхні земної сфери, яка є <u>*просторовою логарифмічною спіраллю*</u>.

Якщо в рівнянні (**) збільшувати поточну довготу λ на $2\pi n$ ($n=1,2,3...$) то буде збільшуватися широта перетину локсодромією меридіану, а при $n \to \infty, \varphi \to 90^\circ$ локсодромія нечисленне кількість разів обертається навколо земної сфери, асимптотичне наближаючись до полюсу. У поодинокому випадку, при $\alpha = 0^\circ$ ***або*** $180^\circ \to \lambda = \lambda_0$, при будь-яких значеннях широти і співпадає з меридіаном.

Інтегруючи вираз (*) в межах від φ_1, λ_1 до φ_2, λ_2:

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} d\lambda = tg\alpha \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

отримуємо:

$$\lambda_2-\lambda_1=tg\alpha\left[\ln tg\left(45^\circ+\frac{\varphi_2}{2}\right)-\ln tg\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)\right], \text{ або}$$

$$tg\alpha=\frac{\lambda_2-\lambda_1(рад)}{\ln tg\left(45^\circ+\frac{\varphi_2}{2}\right)-\ln tg\left(45^\circ+\frac{\varphi_1}{2}\right)}.$$

3.1 Розрахунок довжини локсодромії

З елементарного трикутника (рис.5.4) буде:

$$Rd\varphi=RdS\cdot\cos\alpha$$

Після інтегрування від φ_1,λ_1 до φ_2,λ_2 (від ИПМ до КПМ), отримуємо значення довжини локсодромії в залежності від різниці широт:

$$S_{локс}=\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\cos\alpha} \text{ (в кутових градусах і мінутах), або}$$

$$S_{локс}=1{,}853\cdot\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\cos\alpha} \text{ (в км)}$$

У випадку, коли $\alpha\to 90^\circ, \boldsymbol{або}\, 270^\circ$, а різниця широт близька до нуля, отримана формула ні дає досить точний результат. В цьому випадку доцільно використовувати різницю довгот, для чого з елементарного трикутника будемо мати:

$$rd\lambda=RdS\cdot\sin\alpha\Rightarrow dS=d\lambda\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} \quad (***)$$

Приймаючи до уваги невелику різницю широт при $\alpha\to 90^\circ, \boldsymbol{або}\, 270^\circ$, вважаємо, що $\varphi=\varphi_{ср}=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$. Після інтегрування виразу (***) отримуємо:

$$S_{локс}=(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\cos\varphi_{ср}}{\sin\alpha} \text{ (в кутових градусах і мінутах), або}$$

$$S_{локс}=1{,}853\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\frac{\cos\varphi_{ср}}{\sin\alpha} \text{ (в км)}$$

3.2 Розрахунок шляхового кута локсодромії

Прирівняємо праві частини виразів:

$$\frac{\varphi_2-\varphi_1}{\cos\alpha}=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\sin\alpha}\cdot\cos\varphi_{ср}$$

З цього виразу отримуємо значення шляхового кута:

$$tg\alpha=\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\varphi_2-\varphi_1}\cos\varphi_{ср}$$

Різниці координат повинні бути виражені в однакових одиницях (градусах або мінутах).

Більш зручним є розрахунки з використанням <u>*меридіональної частини (D)*</u>:

$$D = 7915{,}705 \cdot \lg\left[tg\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

Різниця D_2-D_1 називається <u>*меридіональною різницею широт*</u> (МРШ), тоді:

$$tg\alpha = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'}{D_2 - D_1} = \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)'}{МРШ}$$

де $(\lambda_2 - \lambda_1)' = 60 \cdot 57{,}3 \cdot (\lambda_2 - \lambda_1)(рад)$.

3.3 Визначення координат проміжних точок локсодромії

Представимо формулу для проміжної точки у вигляді:

$$D = D_1 + (\lambda - \lambda_1)' \cdot ctg\alpha$$

де D – меридіональна частина проміжної точки з координатами φ і λ.

Задаючи довготу λ визначають D, а по її величині з таблиці меридіональних частин вибирають широту φ – в тому випадку, якщо локсодромія за напрямом знаходиться ближче до паралелі. Якщо локсодромія розташована ближче до меридіану, то зручніше обчислювати довготу λ проміжної точці по її широті φ по формулі:

$$\lambda = \lambda_1 + (D - D_1) \cdot tg\alpha$$

При переході від меридіональної частини до геодезичної широті спочатку по D визначається сферична широта, а далі по формулі:

$$B = \varphi + 9' \cdot \sin 2\varphi$$

перераховують її в геодезичну широту.

3.4 Порівняння ортодромії і локсодромії

Практичний інтерес є порівняння довжин ортодромії і локсодромії і бічне ухилення локсодромії від дуги великого кола. В загальному випадку шлях по локсодромії довше шляху по ортодромії. Найбільша різниця довжин має місце, коли локсодромія співпадає з паралеллю.

Візьмемо на паралелі з широтою φ точки C_1 і C_2 – початковий і кінцевий пункти польоту (рис.5.5) і з'єднуємо їх з полюсом P_N. Зображемо ортодромію і меридіан, на якому знаходиться точка вертексу V. Визначимо елементи прямокутного сферичного трикутника P_NVC (рис.5.5). Взявши три його елемента, які не лежать рядом, отримуємо довжину ортодромії:

$$S_{орт} = 2R\arcsin\left(\sin\frac{\Delta\lambda}{2} \cdot \cos\varphi \right)$$

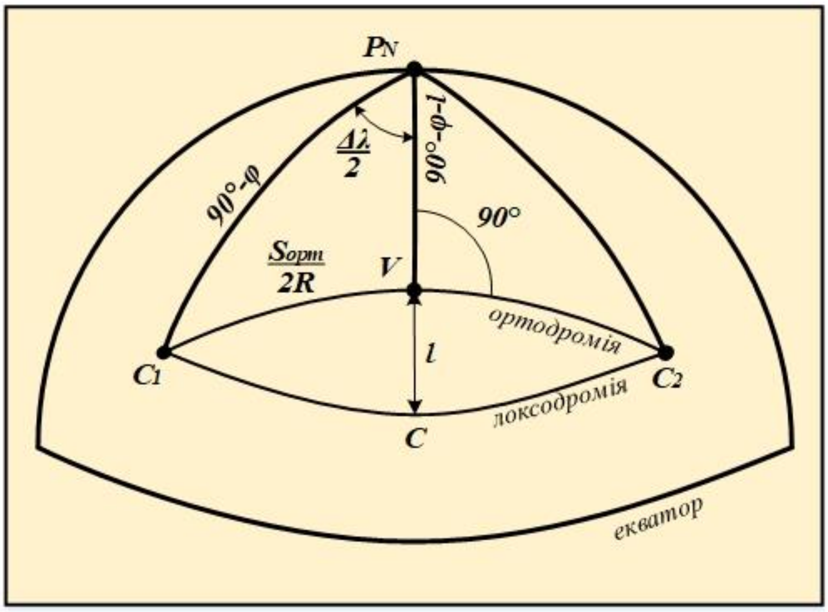

Рисунок 5.5 Найбільше ухилення локсодромії від ортодромії

Довжина локсодромії, як дуга паралелі $\boldsymbol{C_1C_2}$ визначається виразом:

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{локс}} = \boldsymbol{R} \cdot \Delta\lambda \cdot \cos\varphi$$

Найбільша різниця цих довжин на широті $\boldsymbol{\varphi}$:

$$\Delta\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{локс}} - \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{орт}} = \boldsymbol{R}\left[\Delta\lambda\cos\varphi - 2\arcsin\left(\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cos\varphi\right)\right]$$

На екваторі ортодромія співпадає з локсодромією, тобто при широті $\varphi = 0 \to \Delta\boldsymbol{S} = 0$. На полюсі обидві лінії шляху обертаються в точку, тому $\Delta\boldsymbol{S} = 0$.

Більш наочну картину дає не абсолютне подовження шляху при польоті по локсодромії, а відносно збільшення довжини, яке виражене у відсотках:

$$\frac{\Delta\boldsymbol{S}}{\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{орт}}} = 50\Delta\lambda\frac{\cos\varphi}{\arcsin\left(\sin\frac{\Delta\lambda}{2}\cdot\cos\varphi\right)} \;(\%)$$

Визначимо найбільші можливі бічні ухилення $\boldsymbol{l}$ (рис.5.5) від ортодромічної лінії шляху при польоті по локсодромії. З прямокутного сферичного трикутника $\boldsymbol{P_NVC}$ маємо:

$$\cos\frac{\Delta\boldsymbol{l}}{2} = \boldsymbol{ctg}\left(90^\circ - \varphi\right)\cdot\boldsymbol{ctg}\left[90^\circ - \left(90^\circ - \varphi - \boldsymbol{l}\right)\right] \Rightarrow \boldsymbol{ctg}\left(\varphi + \boldsymbol{l}\right) = \boldsymbol{ctg}\varphi\cdot\cos\frac{\Delta\boldsymbol{l}}{2}$$

Звідси: $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{arcctg}\left(\boldsymbol{ctg}\varphi\cdot\cos\frac{\Delta\lambda}{2}\right) - \varphi.$

4. Лінії рівних азимутів (ЛРА)

Лінія рівних азимутів (ЛРА) це лінія, во всіх точках якого між меридіаном ЛА і ортодромічних напрямом на наземну радіостанцію має одну і ту же величину, яка рівна $\boldsymbol{П}$ – істинному пеленгу радіостанції. ЛРА знаходить застосування в повітряної навігації при визначенні місця ЛА по пеленгам наземних радіостанцій, які вимірюються за допомогою радіокомпаса. Лінії рівних азимутів на поверхні земної сфери являють собою складні криви, які називаються *просторовими лемніскатами*.

Рівняння ЛРА на сфері має вигляд:

$$\boldsymbol{ctg\Pi} = \cos\varphi \boldsymbol{tg}\varphi_{\boldsymbol{T}} \cos \boldsymbol{ec}\left(\lambda_{\boldsymbol{T}} - \lambda\right) - \sin\varphi \boldsymbol{ctg}\left(\lambda_{\boldsymbol{T}} - \lambda\right)$$

Це рівняння є формула напряму ортодромії в початкової точці, в якої:

- $\boldsymbol{\varphi}$ і $\boldsymbol{\lambda}$ – координати ЛА;
- $\boldsymbol{\varphi_T}$ і $\boldsymbol{\lambda_T}$ – координати радіостанції Т;
- $\boldsymbol{\Pi}$ – пеленг (азимут) радіостанції, що є постійна величина для даної лінії.

Властивості ЛРА:

1. Усі лінії рівних азимутів незалежно від величини пеленга обов'язково проходять через чотири характерні точки на поверхні земної сфери – місце радіостанції ***T***, діаметрально протилежну ей точку радіостанції ***T′*** і полюса Землі.
2. Екватор пересікають тільки ті ЛА, у яких пеленг менше або більше доповненню до 90° широти радіостанції, тобто $\boldsymbol{\Pi} \le 90^{\circ} - \varphi_{\boldsymbol{T}}$.
3. Кожна лінія рівних азимутів складається з двох гілок. Якщо $\boldsymbol{\Pi} < 90^{\circ} - \varphi_{\boldsymbol{T}}$, то одна гілка ЛРА проходить від радіостанції до протилежного полюсу, інша – від точки, діаметрально протилежної радіостанції до другого полюсу.

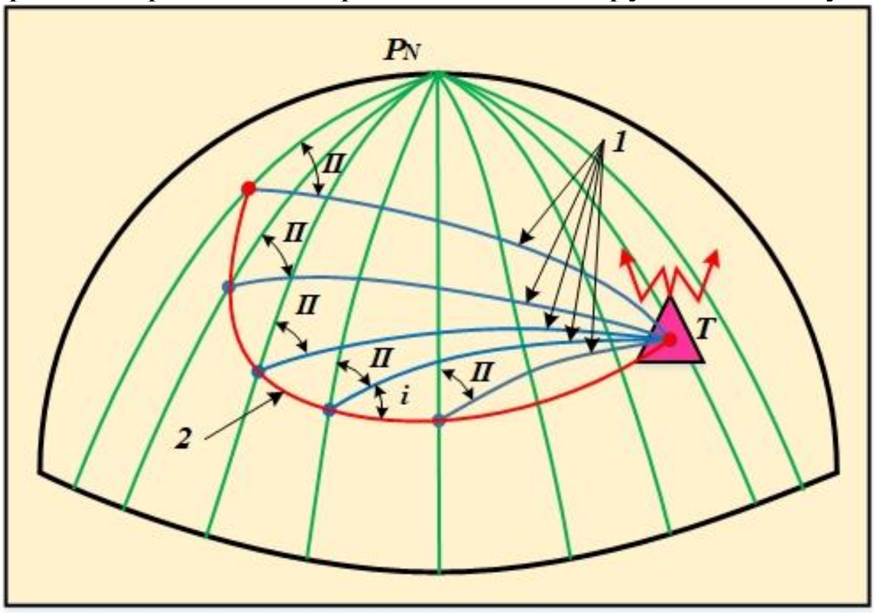

Рисунок 5.6 Лінія рівних азимутів (ЛРА):
1 – ортодромії; 2 – локсодромії

4. Сімейство ліній рівних азимутів, які розташовані західніше меридіана радіостанції, є дзеркальне відображення ліній положення, що проходять східніше цього меридіана. Дзеркальної площиною слугує площина меридіану радіостанції. Наприклад, ЛРА в західної півкулі, що відповідає 30°, має своїм дзеркальним відображенням в східної півкулі ЛРА, що відповідає азимуту 330° (360°-30°=330°), рис.5.7.

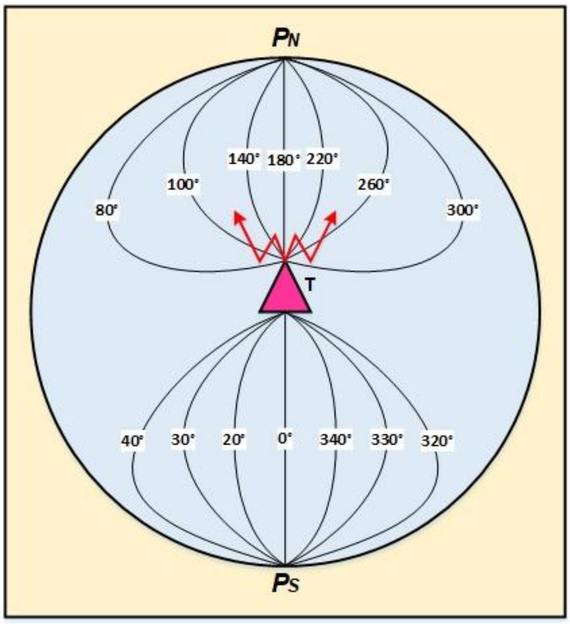

Рисунок 5.7 Дзеркальне відображення ліній рівних азимутів

5. Лінія рівних азимутів перетинає меридіани під різними кутами. Кут $\boldsymbol{i}$ між ортодромією і ЛРА в деякої точці визначається співвідношенням:

$$\boldsymbol{tg}\,\boldsymbol{i} = \boldsymbol{tg}\,\Delta\lambda \cdot \sin\varphi$$

де $\Delta\lambda$ – різниця довгот радіостанції і даної точці,

φ – широта цієї же точці.

При $\Delta\lambda=0$ кут $i=0$. Отже, ЛРА перетинає меридіан радіостанції під кутом, рівним пеленгу Π.

Кут $\boldsymbol{i}$ за величиною дорівнює так званому куту сходження ($\boldsymbol{\delta}$) двох меридіанів на сфері (рис. 5.8).

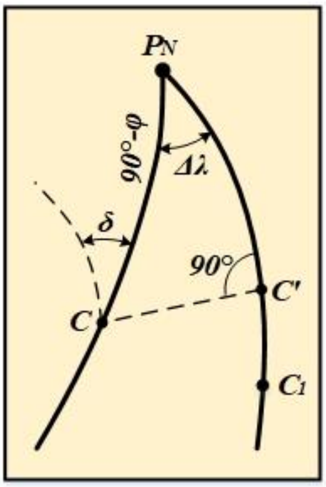

Рисунок 5.8 Кут сходження меридіанів на сфері

З прямокутного сферичного трикутника $P_N CC'$:

$$\cos\left(90^\circ - \varphi\right) = \boldsymbol{ctg}\left(90^\circ - \delta\right)\boldsymbol{ctg}\lambda,$$

$$\text{звідки: } \boldsymbol{tg}\delta = \boldsymbol{tg}\Delta\lambda \cdot \sin\varphi$$

де φ – широта точки C, $\Delta\lambda$ – різниця довгот точок C і C'.

Для рішення задач визначення місця ПС по радіопеленгам для невеликих відстань (до кілька сотень км) від радіостанції можливо знехтувати кривиною земної поверхні без втрати практичної точності.

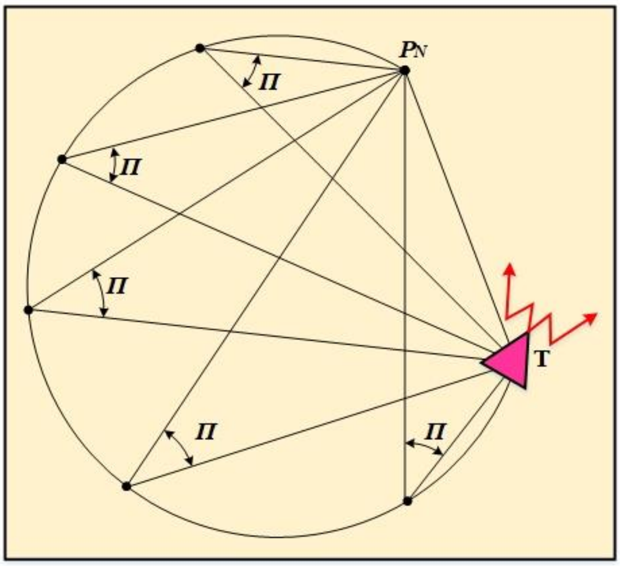

Рисунок 5.9 Лінія рівних азимутів на площині

В цьому випадку можливо прийняти її обмежену ділянку за площину, на якої меридіани відображаються відрізками прямих, що виходять з полюсу, а ортодромії – прямими, які сходяться до радіостанції (рис.5.9).

Тоді ЛРА являє собою коло, що проходить через радіостанцію і полюс. В кожної точці кола пеленг радіостанції постійний, так як усі вписані кути П опираються на хорду $\boldsymbol{P_N T}$.

5. Лінія рівних відстаней (ЛРР)

Лінією рівних відстаней (ЛРР) називають геометричне місце точок, рівновіддалених від деякої точці на земної поверхні. ЛРР використовується при розв’язанні навігаційних задач по даним вимірюваній за допомогою радіотехнічних і астрономічних засобів.

На поверхні сфери ЛРР являє собою окружність малого кола радіусу $\boldsymbol{r}$ (рис.5.10), центр якого знаходиться в точці 0 з координатами $\boldsymbol{\varphi_0, \lambda_0}$.

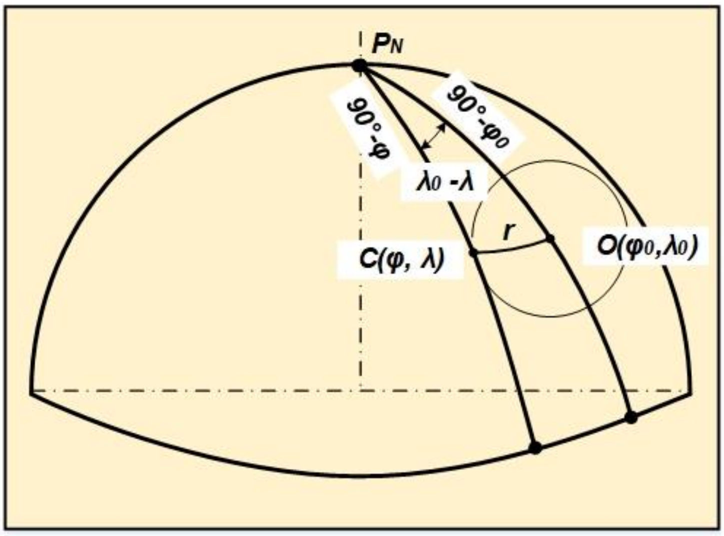

Рисунок 5.10 Лінія рівних відстаней

Рівняння лінії положення можливо отримати рішення сферичного трикутника $\boldsymbol{P_N OC}$:

$$\cos \boldsymbol{r} = \sin\varphi \sin\varphi_0 + \cos\varphi \cos\varphi_0 \cos(\lambda_0 - \lambda)$$

Для побудування ЛРР необхідно розрахувати координати проміжних точок (рис.5.11).

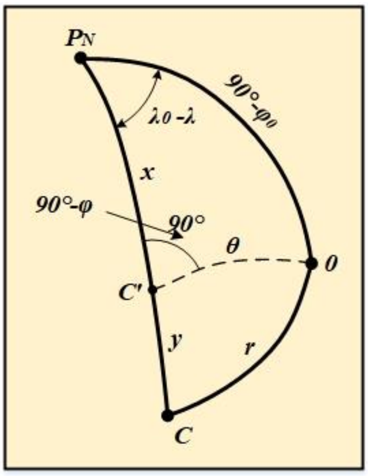

Рисунок 5.11 До розрахунку широти проміжної точці ЛРР

Для визначення довготи точці $\boldsymbol{\lambda}$ по широті $\boldsymbol{\varphi}$ зручно використовувати рівняння:

$$\cos(\lambda_0 - \lambda) = \frac{\cos \boldsymbol{r}}{\cos\varphi \cdot \cos\varphi_0} - \boldsymbol{tg}\varphi \cdot \boldsymbol{tg}\varphi_0$$

Для ділянок ЛРР, які розташовані вздовж паралелі, зручніше задаватися довготою $\boldsymbol{\lambda}$ і розраховувати широту $\boldsymbol{\varphi}$.

Розрахункові формули для цього можуть бути отримані рішенням трикутників $\boldsymbol{P_N OC'}$ і $\boldsymbol{OC'C}$, де $\boldsymbol{\theta}$ – сферичний перпендикуляр, який опущений з центру кола на сторону $\boldsymbol{P_N C}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{tg}\,\boldsymbol{x} = \boldsymbol{ctg}\varphi_0 \cdot \cos\left(\lambda_0 - \lambda\right); \\ \sin\theta = \cos\varphi_0 \cdot \sin\left(\lambda_0 - \lambda\right); \\ \cos\boldsymbol{y} = \cos\boldsymbol{r} \cdot \sec\theta; \\ \varphi = 90^\circ - \left(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\right). \end{cases}$$

6. Лінія рівних різниць відстаней (ЛРРР)

Визначення різниці відстаней від ПС до двох наземних радіостанцій використовується в радіонавігаційних системах далекої навігації (РСДН). В цьому випадку лінією положення буде лінія рівних різниць відстаней, тобто, така лінія, від кожної точки якої різниця відстаней до двох точок на земної поверхні є величиною постійною.

На площині лінія положення, що розглядається, являє собою гіперболу, рівняння якої має вигляд:

$$\frac{\boldsymbol{x}^2}{\boldsymbol{a}^2} - \frac{\boldsymbol{y}^2}{\boldsymbol{b}^2} = 1,$$

де $\boldsymbol{a}$ і $\boldsymbol{b}$ - дійсна та уявна півосі гіперболи, фокусна відстань якої $\boldsymbol{c} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2}$.

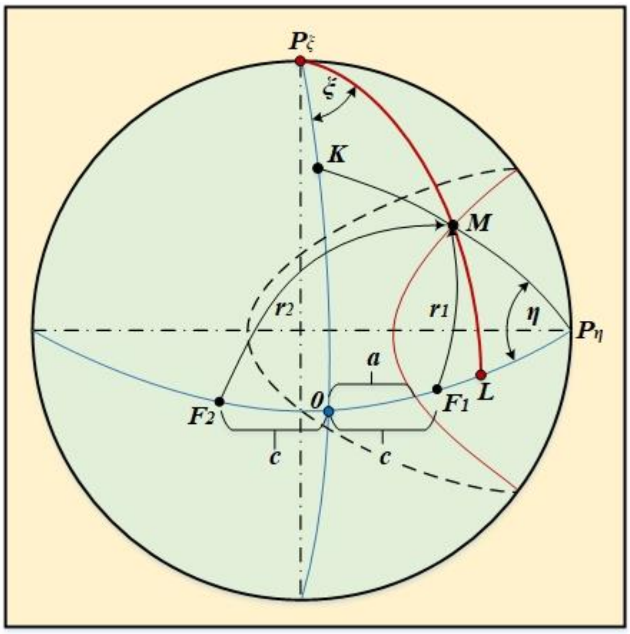

Рисунок 5.12 Лінія рівних різниць відстаней

На поверхні сфери ЛРРР являє собою сферичну гіперболу, найпростіше рівняння можливо отримати в сферичних координатах з наступними координатними осями: одна ось проходить через фокуси гіперболи $\boldsymbol{F_1}$ і $\boldsymbol{F_2}$ (точки розташування наземних радіостанцій), друга ось проходить перпендикулярно до першої посередині між фокусами.

Перша, ось $\boldsymbol{\xi}$, є велике коло з полюсом $\boldsymbol{P_\xi}$, друга, ось $\boldsymbol{\eta}$, зображена великим колом з полюсом $\boldsymbol{P_\eta}$ (рис.5.12). Рівнянням сферичної гіперболи в цих координатах:

$$\frac{\boldsymbol{tg}^2\xi}{\boldsymbol{tg}^2\boldsymbol{a}} - \frac{\boldsymbol{tg}^2\eta}{\boldsymbol{tg}^2\boldsymbol{b}} = 1$$

де $\boldsymbol{tg}^2\boldsymbol{b} = \dfrac{\sin^2\boldsymbol{c} - \sin^2\boldsymbol{a}}{\cos^2\boldsymbol{a}}$.