

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

з навчальної дисципліни «Технічна механіка»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт  
Аеронавігація**

**за темою – Кручення**

**Кременчук 2023**

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

## **СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

## **ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол  
від 28.08.2023 № 1

### **Розробник:**

*Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії,  
Сіора А.С.*

### **Рецензенти:**

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

### План лекції:

1. Кручення. Крутний момент. Епюри крутних моментів.
2. Напруження при крученні стержня круглого поперечного перерізу.
3. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолук, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

#### Допоміжна

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.

### Текст лекції

#### 1. Кручення. Крутний момент. Епюри крутних моментів.

У найпростішому випадку деформація кручення викликається двома протилежно напрямленими парами сил з моментами  $T_e$  (індекс **e** від **external** (англ.) - зовнішній), що діють у площинах, перпендикулярних до осі стержня (рис. 1, б).

Для визначення внутрішніх сил, що виникають у поперечних перерізах стержня, застосуємо метод перерізів. Для цього уявно розрізаємо стержень

січною площиною, перпендикулярною до його осі, яка розділяє стержень на дві частини: I і II (рис. 1, б). Одну з частин, наприклад II, відкидаємо і замінюємо її дію на частину I моментом внутрішніх сил. Цей момент називається крутним моментом і позначається через **T** (рис. 1, в).

**Крутний момент** являє собою момент системи сил, що замінює в даному поперечному перерізі дію відкинутої частини стержня на його залишену частину, взятий відносно осі стержня.

З умови рівноваги між зовнішніми і внутрішніми силами випливає правило для вираження крутного моменту через моменти зовнішніх пар сил: крутний момент у довільному поперечному перерізі стержня чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно осі стержня всіх пар зовнішніх сил, розміщених з одного боку від розглядуваного перерізу. Додатними будемо вважати моменти, що обертають проти ходу стрілки годинника, коли дивитися вздовж зовнішньої нормалі до перерізу.

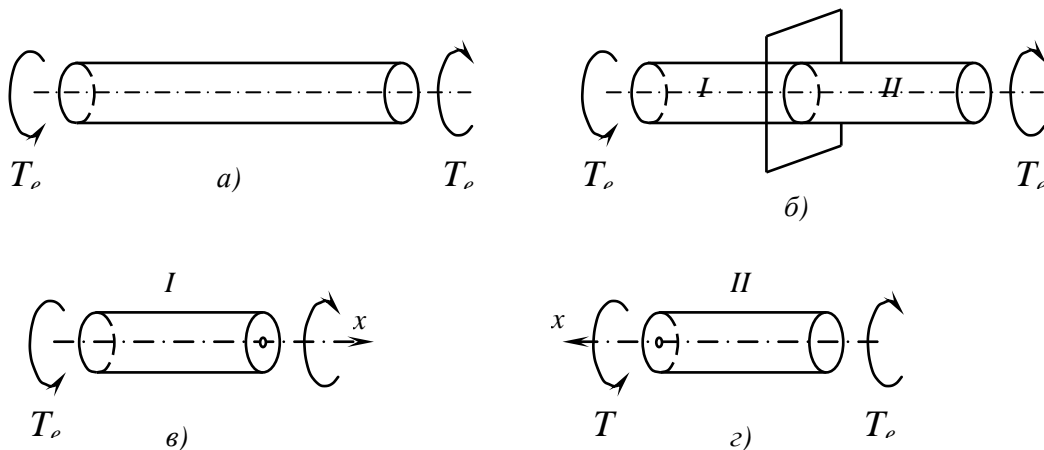


Рис. 1

На рис 1, в, г показані додатні крутні моменти при відкиданні частин I або II стержня.

Графік розподілу крутних моментів по довжині стержня називається їх **епюрою**. Приклад побудови епюри крутних моментів показаний на рис. 2. Перерізи стержня, до яких прикладаються моменти зовнішніх пар сил, розділяють його на чотири ділянки, для яких знаходимо: на ділянці а:  $T_a = 0$ ; на ділянці б:  $T_b = T_{e1} = 4 \text{ кНм}$ ; на ділянці в:  $T_c = T_{e1} - T_{e2} = -6 \text{ кНм}$ ; на ділянці д:  $T_d = 0$ .

За одержаними даними побудована епюра крутних моментів.

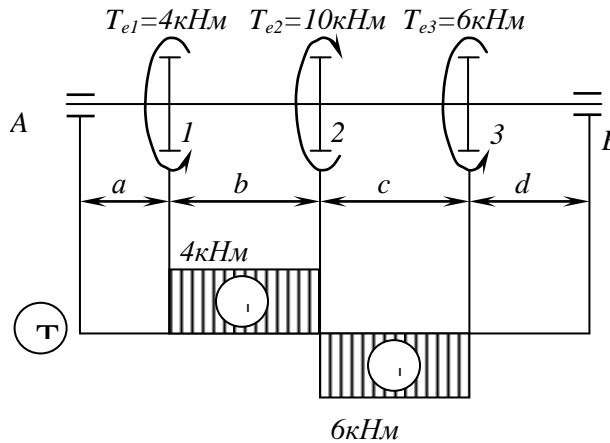


Рис. 2

## 2. Напруження при крученні стержня круглого поперечного перерізу.

У загальному випадку кручення стержня довільного перерізу поперечні перерізи стержня перестають бути плоскими, скривлюються. Ці скривлення називаються депланаціями поперечних перерізів. Лише при крученні стержнів круглого або кільцевого перерізу депланації немає.

Коли депланації однакові в усіх поперечних перерізах стержня і можуть вільно відбуватися або коли їх зовсім немає (круглий переріз), тоді кручення називається чистим.

Відсутність депланації дозволяє розв'язати задачу визначення напружень при крученні круглого стержня елементарним методом, що неможливо для стержнів інших перерізів.

Знайдемо напруження у поперечному перерізі крутного стержня, закрученого двома парами сил з моментами  $T_e$  (рис. 3, а).

Умовно розрізаємо стержень на дві частини, відкидаємо праву частину і замінюємо її дію на залишену ліву частину крутним моментом  $T$  (рис. 3, б). Крутний момент  $T$  являє собою сумарний момент елементарних пар внутрішніх зусиль, дотичних до площини перерізу:

$$T = \int_A \rho \tau_\rho dA, \quad (1)$$

де  $\tau_\rho$  – дотичне напруження, яке виникає на площині  $dA$  на відстані  $\rho$  від осі стержня (рис. 3, в).

Вираз (1) дає інтегральну залежність між крутним моментом і дотичними напруженнями у перерізі стержня, яка може задовольнятися при різних законах розподілу напружень. Який із цих законів дійсно має місце при крученні, можна встановити на основі дослідних даних.

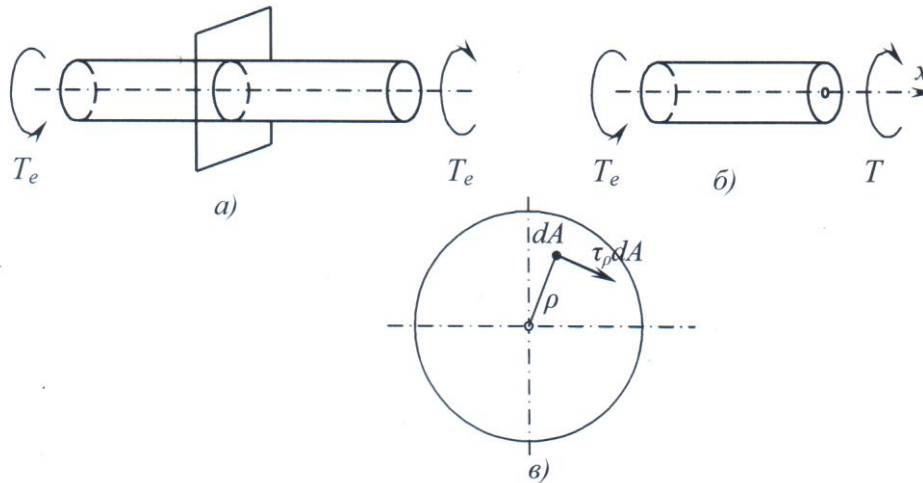


Рис.3

Експериментальне вивчення кручення стержня круглого поперечного перерізу дає такі результати: 1) поперечні перерізи стержня, залишаючись плоскими і перпендикулярними до його осі, повертаються один відносно одного на певний кут, що називається кутом закручування  $\varphi$ ; 2) відстані між перерізами не змінюються; 3) радіуси, проведені у поперечних перерізах стержня, залишаються прямими.

На основі цих експериментальних даних можна скласти рівняння переміщень при крученні стержня круглого перерізу.

Для цього виділимо із стержня циліндричний елемент довжиною  $dz$  (рис. 4, а, в). При вказаних вище умовах будь які дві твірні  $AB$  і  $CD$ , проведені на поверхні циліндричного елемента, перейдуть у положення  $A_1B_2$  і  $C_1D_2$ , а елемент  $ABCD$  зазнаватиме деформації чистого зсуву.

Виражаючи дугу  $B_1B_2$  один раз через кут зсуву  $\gamma_r$ , а другий – через елементарний кут закручування  $d\varphi$ , одержуємо

$$\gamma_r dz = r d\varphi,$$

$$\gamma_r = \frac{d\varphi}{dz} r.$$

Позначимо через  $\gamma_\rho$  кут зсуву на циліндричній поверхні радіуса  $\rho$ , проведений в середині елемента (рис. 4, г). З рівності відношень  $\gamma_\rho : \gamma_r = \rho : r$  і з останньої формули знаходимо

$$\gamma_\rho = \frac{d\varphi}{dz} \rho.$$

Використовуючи формулу закону Гука при зсуві, можемо тепер записати дотичне напруження  $\tau_\rho$  через кут зсуву  $\gamma_\rho$ :

$$\tau_\rho G \gamma_\rho = G \frac{d\varphi}{dz} \rho \quad (2)$$

Після підстановки останнього виразу у формулу (6.1) одержимо

$$G \frac{d\varphi}{dz} \int_A \rho^2 dA = T,$$

звідси

$$d\varphi = \frac{Tdz}{GI_p}, \quad (3)$$

де  $I_p = \int_A \rho^2 dA$  - полярний момент інерції поперечного перерізу стержня.

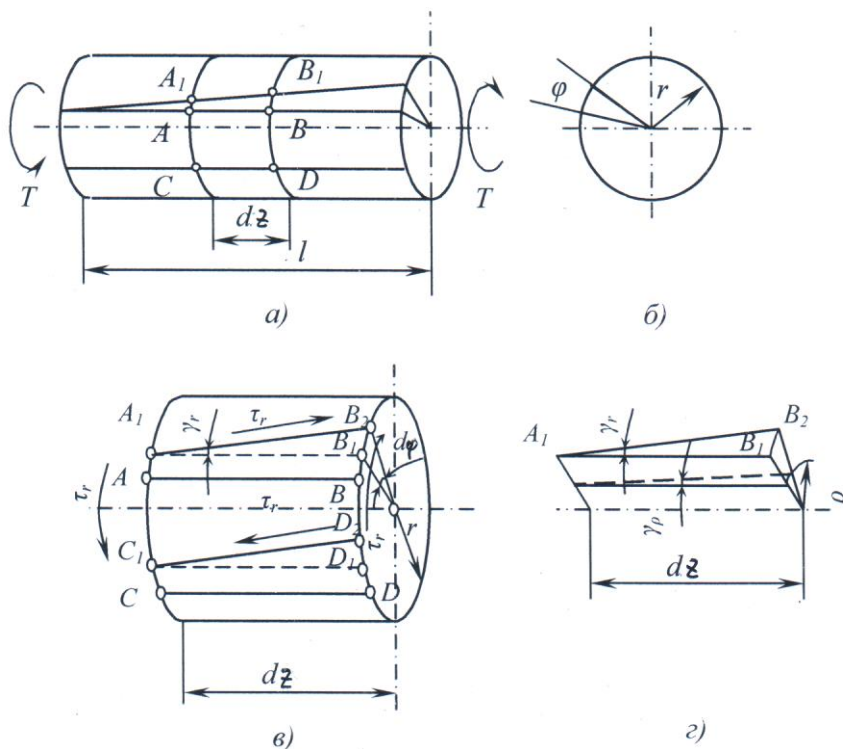


Рис.4

Формулою (3) виражається відносний кут закручування двох перерізів стержня на відстані  $dz$  один від одного. При довжині стержня  $l$  кут закручування  $\varphi$  одного кінцевого перерізу відносно другого одержимо, інтегруючи вираз (13) по довжині  $l$ :

$$\varphi = \frac{Tl}{GI_p}. \quad (4)$$

Останню формулу можна розглядати також як вираз закону Гука при крученні. Величина  $GI_p$  називається жорсткістю при крученні стержня круглого поперечного перерізу.

Нарешті, з формул (2) і (3) одержуємо формулу для дотичного напруження при крученні стержня круглого перерізу:

$$\tau_\rho = T\rho / I_p \quad (5)$$

Епюра дотичних напружень  $\tau_\rho$  показана на рис. 5.

Максимальне дотичне напруження виникає біля контуру перерізу при  $\rho_{\max} = r$  і дорівнює

$$\tau_{\max} = Tr / I_p,$$

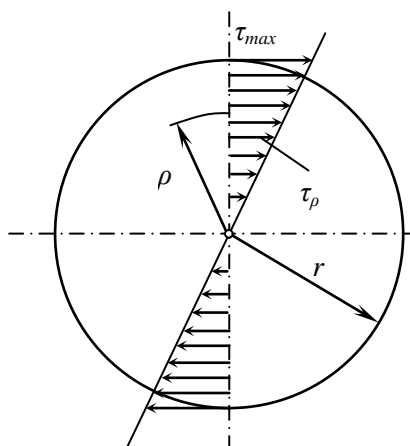


Рис.5

або

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho}, \quad (6)$$

де  $W_{\rho} = I_{\rho} / \rho_{\max} = I_{\rho} / r$  - геометрична характеристика, що називається полярним моментом опору перерізу стержня.

### 3. Розрахунки на міцність і жорсткість при крученні.

Міцність бруса, що працює на кручення, вважають забезпеченою, якщо найбільші дотичні напруження у його небезпечному перерізі, не перевершують допустимі:

$$\tau_{\max} \leq \tau_{adm}.$$

Як відомо з попереднього, ці найбільші напруження виникають у найбільш віддалених точках поперечного перерізу і вираховуються за формулою (6). Таким чином, одержимо слідувачу умову міцності:

$$\tau_{\max} = T / W_{\rho} \leq \tau_{adm} \quad (7)$$

Ця формула служить для перевірконого розрахунку на міцність.

При проектному розрахунку і при вивченні допустимого навантаження (моменту) з формули (7) відповідно знаходять  $W_{\rho}$  або  $[T]$ :

$$W_{\rho} \geq T / \tau_{adm}; \quad (8)$$

$$[T] \leq W_{\rho} \tau_{adm} \quad (9)$$

Крутний момент  $T$ , який входить у наведені розрахункові формули, за допомогою метода перерізів повинен бути виражений через зовнішні (скручувальні) моменти.

Розрахунок ведеться для небезпечного перерізу. Для бруса сталого діаметра небезпечним буде той переріз, у якому виникає найбільший крутний момент. Якщо діаметр бруса не сталий, може статися так. Що найбільші напруження виникають не там, де крутний момент максимальний. Отже, в цьому випадку питання про небезпечний переріз повинен бути досліджений додатково (див. нижче приклад).

Допустиме напруження  $\tau_{adm}$  для пластичних матеріалів назначають в залежності від їх границі текучості при крученні (при зсуві)  $\tau_y$ , тобто

$$\tau_{adm} = \tau_y / [n_y], \quad (10)$$

а для крихких – у залежності від границі міцності

$$\tau_{adm} = \tau_u / [n_u]. \quad (11)$$

Враховуючи, що за експериментальними даними границя текучості при крученні зв'язана з границею текучості при розтязі залежністю  $\tau_y \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_y$ , приймають для сталі  $\tau_{adm} \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_{adm}$ ; для чавунку  $\tau_{adm} \approx (1,0 \dots 1,2) \sigma_{adm}$ .

У деяких випадках є необхідність крім розрахунку на міцність, зробити ще розрахунок вала на жорсткість. Перевірка жорсткості полягає у порівнянні максимального кута закручування  $\phi_{\max}$ , віднесеного до одиниці довжини вала, з допустимим кутом закручування  $[\phi]$ :



$$\varphi_{\max} \leq [\varphi]. \quad (12)$$

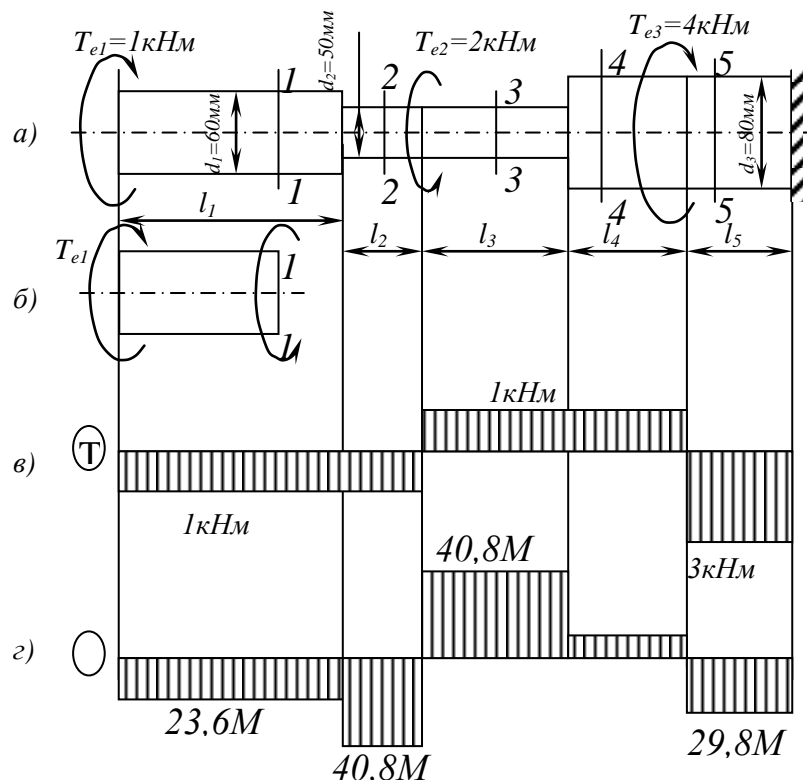
Оскільки допустимі кути закручування задаються звичайно в градусах на 1м, а у виразі кут обчислюється в радіанах, то цей вираз треба ще помножити на  $180/\pi$ . Тоді умова жорсткості набере вигляду

$$\frac{180T}{\pi G I_p} \leq [\varphi]. \quad (13)$$

Найбільш поширеними на практиці значеннями допустимих кутів закручування є  $[\varphi] = (0,25 \dots 1,0)$  град/м.

**Приклад.** Ступінчастий сталевий брус круглого поперечного перерізу жорстко закріплений одним кінцем і навантажений, як показано на рис. 6,а. Побудувати епюри крутних моментів та дотичних напружень, і перевірити міцність бруса при  $\tau_{\text{adm}} = 60 \text{ МПа}$ .

**Розв'язання.** Епюру крутних моментів будемо, починаючи з вільного (лівого) кінця, що дозволяє не визначати реактивний момент у затисненні. Провівши довільний переріз 1-1 на ділянці  $l_1$  і склавши для залишеної частини (рис. 6,б) рівняння рівноваги  $\sum M_z = 0$ , одержуємо  $T_1 = T_{e1} = 1 \text{ кНм}$ . Згідно з прийнятим правилом знаків вважаємо момент  $T_1$  від'ємним. Крутний момент зберігає стале значення ( $T_1 = -1 \text{ кНм}$ ) у всіх перерізах ділянки  $l_1$ . Якщо проведемо довільний переріз 2-2 на ділянці  $l_2$ , то матимемо той же результат, тобто  $T_2 = T_{e1} = -1 \text{ кНм}$ . Для решти ділянок знаходимо крутні моменти як алгебраїчну суму зовнішніх скручувальних моментів, прикладних по одну сторону (у нашому випадку – по ліву) від проведених перерізів. Відрізані частини окремо не зображуємо. Отже,  $T_3 = -T_{e1} + T_{e2} = 1 \text{ кНм}$ ;  $T_4 = T_3 = 1 \text{ кНм}$ ;  $T_5 = -T_{e1} + T_{e2} - T_{e3} = -3 \text{ кНм}$ . За одержаними даними будемо епюру крутних моментів (рис. 6,в).



*Рис. 6*

Для знаходження небезпечного перерізу будемо епюру дотичних напружень.

На ділянці  $l_1$ :

$$\tau_1 = \frac{T_1}{W_{\rho 1}} = \frac{1 \cdot 10^6}{42390} = 23,6 \text{ МПа},$$

де  $W_{\rho 1} = \pi d_1^3 / 16 = 3,14 \cdot 60^3 / 16 = 42390 \text{ мм}^3$  - полярний момент опору перерізів ділянки  $l_1$  з діаметром  $d_1 = 60 \text{ мм}$ .

Аналогічно знаходимо дотичні напруження на решті ділянок і будемо епюру  $\tau$  (рис. 6,г) Замітимо, що знак дотичного напруження при розрахунках на міцність ніякого значення не має, і прийнятий напрямок ординат епюри  $\tau$  умовний.

Небезпечними виявились поперечні перерізи на ділянках  $l_2$  і  $l_3$ . Таким чином, небезпечними виявились не ті перерізи, в яких крутний момент максимальний. Умова міцності  $\tau_{\max} < \tau_{\text{adm}}$  виконується. Очевидно, що матеріал бруса використаний іраціонально; навіть у небезпечних перерізах напруження на 32% нижче допустимого. Доцільно буде вибрати такий матеріал, допустиме напруження якого було б близьким до 40 МПа.