

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних  
та фундаментальних дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

з навчальної дисципліни

«Фізика»

обов'язкових компонент

освітньо-професійної програми першого(бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт  
(Аеронавігація)**

**за темою № 4 – Коливання і хвилі**

**Кременчук 2023**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою  
Кременчуцького льотного коледжу  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією Науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1.

**Розробник:** викладач циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Волканін Є.Є.

**Рецензенти:**

1. Інженер з технічного обслуговування, ремонту та діагностики авіаційної техніки ТОВ «ЕЙР ТАУРУС» Калінін О.В.
2. Професор циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії Гаврилюк Ю.М.

### **План лекції:**

1. Гармонічні коливання і їх характеристики.
2. Механічні гармонічні коливання.
3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники.
4. Вільні гармонічні коливання в коливальному контурі.
5. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакових частот. Биття.
6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.
7. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язування.
8. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс.
9. Змінний струм.
10. Резонанс напруг.

### **Рекомендована література:**

#### **Основна література:**

1. Фізика: Підручник / В.В. Бойко, Г.І. Булах, Я.О. Гуменюк, П.П. Ільїн. – К.: Видавництво Ліра-К, 2016. – 468 с.
2. Дмитрієва В. Ф. Фізика : навчальний посібник / В. Ф. Дмитрієва. – К.: Техніка, 2008. – 608 с.
3. Курс фізики модульно-рейтингова система навчання: підруч. Для студ. Вищ. Техн. Навч. Закл./ Андріяшик М.В., Вербицький Б.І., Король А.М. – К.: НВЦ «Фламенко», 2008. – 530 с.

#### **Допоміжна література:**

1. Фізика. Задачі з розв'язаннями: Навч. посібник І. П. Гаркуша, З. П. Мокляк, Ю. О. Буслов – Дніпропетровськ; Національна гірнича академія України, 2003.
2. Волков О. Ф. Курс фізики ; у 2-х т. – Т.1: Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика. Постійний струм. Електромагнетизм : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів / О. Ф. Волков, Т. П. Лумпієва. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – 224 с.
3. Волков О. Ф. Курс фізики ; у 2-х т. – Т.2: Коливання і хвилі. Хвильова і квантова оптика. Елементи квантової механіки. Основи фізики твердого тіла. Елементи фізики атомного ядра : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів / О. Ф. Волков, Т. П. Лумпієва. – Донецьк: ДонНТУ, 2009. – 208 с.

### **Інформаційні ресурси в Інтернеті:**

1. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=272&chapterid=11f>
2. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=296>
3. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=297>

4. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=299>
5. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=301>
6. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=302>

## Текст лекції

### 1. Гармонічні коливання і їх характеристики

Коливаннями називаються рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі. Коливальні процеси широко поширені в природі й техніці, наприклад, коливання маятника годинника, змінний електричний струм і т. д. При коливальному русі маятника змінюється координата його центра мас, а у випадку змінного струму – коливаються напруга й струм у колі. Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють коливання механічні, електромагнітні й ін. Однак різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й однаковими рівняннями. Звідси випливає доцільність єдиного підходу до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання будуть вільними (або власними), якщо вони відбуваються за рахунок деякої енергії, переданої коливальній системі в початковий момент часу, при відсутності в наступні моменти часу будь-яких зовнішніх впливів на цю систему. Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, при яких коливна величина змінюється з часом за законом косинуса або синуса. Вивчення гармонічних коливань важливе з двох причин:

1) коливання, які зустрічаються у природі й техніці, при певних наближеннях є гармонічними;

2) різні періодичні процеси (процеси, які повторюються через рівні проміжки часу), можна подавати як суперпозицію гармонічних коливань.

Гармонічні коливання деякої фізичної величини  $x$  описуються таким рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

де  $A$  – максимальне значення коливної величини  $x$ , яке називається *амплітудою коливань*;

$\omega_0$  – колова, або циклічна частота;

$\varphi$  – початкова фаза коливань для моменту часу  $t = 0$ ;

$(\omega_0 t + \varphi)$  – фаза коливань для довільного моменту часу  $t$ .

Оскільки косинус змінюється в межах від  $+1$  до  $-1$ , то  $x$  може набувати значень від  $+A$  до  $-A$ .

Певні стани системи в процесі гармонічних коливань повторюються через однаковий проміжок часу  $T$ , який називається *періодом коливань*. За цей час фаза коливання зростає на  $2\pi$ , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2)$$

Величина, обернена до періоду коливань

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

виконана коливною системою за одиницю часу, називається *частотою коливань*. Прирівнюючи (2) і (3), одержимо

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Одиницею частоти є герц (Гц), це частота такого періодичного процесу, при якому за 1 с відбувається одне повне коливання.

Запишемо першу й другу похідні фізичної величини  $x$  гармонічного коливання, тобто визначимо швидкість і прискорення коливання:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (5)$$

тобто маємо гармонічні коливання тієї ж циклічної частоти. Амплітуди величин (4) і (5) відповідно дорівнюють  $A\omega_0$  і  $A\omega_0^2$ . Фаза швидкості (4) відрізняється від фази фізичної величини (1) на  $\pi/2$ , а фаза прискорення (5) відрізняється від фази фізичної величини (1) на  $\pi$ .

Отже, у моменти часу, коли  $x = 0$ ,  $\frac{dx}{dt}$  має найбільші значення; коли ж  $x$  досягає максимальних від'ємних значень то в ці моменти часу  $\frac{d^2x}{dt^2}$  будуть мати найбільші додатні значення (рис. 1).

З рівняння (5) одержуємо диференціальне рівняння гармонічних коливань (де враховано, що  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ ),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

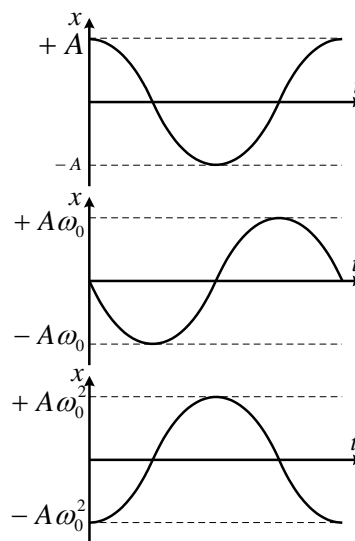


Рис. 1

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння (6) є вираз (1).

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою методу обертання вектора амплітуди або методу векторних діаграм. Для цього з довільної точки  $O$ , взятої на осі  $x$ , під кутом  $\varphi$ , який дорівнює початковій фазі коливання, відкладається вектор  $\vec{A}$ , модуль якого дорівнює амплітуді  $A$  гармонічного коливання (рис. 2).

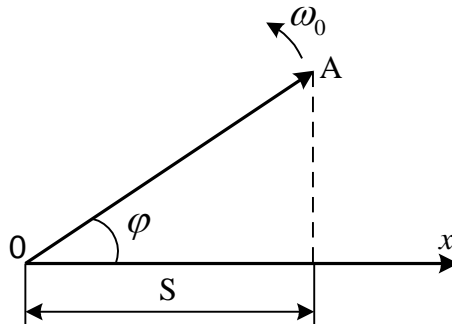


Рис. 2

Якщо цей вектор привести до обертання з кутовою швидкістю  $\omega_0$  то проекція кінця вектора буде переміщуватися по осі  $x$  і набувати значень від  $-A$  до  $+A$ , а коливна величина буде змінюватися з часом за законом  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ . У фізиці часто застосовується інший метод, який відрізняється від методу обертання вектора амплітуди лише за формою. У цьому методі коливну величину подають комплексним числом відповідно до формули Ейлера для комплексних чисел

$$e^{ix} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (7)$$

де  $i = \sqrt{-1}$  – уявна одиниця. Тому рівняння гармонічного коливання (1) можна записати також в експонентній формі так:

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (8)$$

Права частина рівняння (8) є рівнянням гармонічних коливань.

## 2. Механічні гармонічні коливання

Нехай матеріальна точка виконує прямолінійні гармонічні коливання уздовж осі координат  $x$  біля положення рівноваги, прийнятого за початок координат. Тоді залежність координати  $x$  від часу  $t$  задається рівнянням (1),

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9)$$

Відповідно до виразів (4) і (5) швидкість  $v$  і прискорення  $a$  коливної точки будуть дорівнювати:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2});$$

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (10)$$

Сила  $F = ma$ , що діє на коливну матеріальну точку масою  $m$ , у відповідності з рівнянням (1) дорівнює

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Отже, сила, яка діє на матеріальну точку при гармонічних коливаннях, пропорційна зміщенню матеріальної точки від положення рівноваги і спрямована в протилежну сторону.

Кінетична енергія матеріальної точки, яка здійснює прямолінійні гармонічні коливання, дорівнює

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (11)$$

або

$$K = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (12)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили  $F$ , дорівнює

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (13)$$

або

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (14)$$

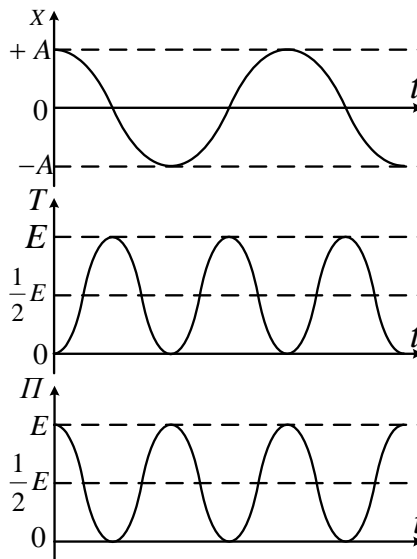


Рис. 3



Додавши (13) і (14), одержимо формулу для повної енергії гармонічного коливання:

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (15)$$

З формул (12) і (14) видно, що  $K$  і  $\Pi$  змінюються в часі з частотою, яка у два рази перевищує частоту гармонічного коливання. На рис. 3 показані графіки залежності  $x$ ,  $K$  і  $\Pi$  від часу.

Оскільки середні значення  $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$ , то з формул (11), (13) і (15) випливає, що

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} E.$$

### 3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники

Гармонічним осцилятором називається система, яка описується диференціальним рівнянням вигляду (6):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

Коливання гармонічного осцилятора є важливим прикладом періодичного руху і служать точною або наближеною моделлю в багатьох задачах класичної і квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники, коливальний контур (для струмів і напруг настільки малих, щоб елементи контуру можна було вважати лінійними).

**Пружинний маятник.** Пружинний маятник – невеличке тіло масою  $m$ , яке підвішене до абсолютно пружної пружини і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили  $F = -kx$ , де  $k$  - коефіцієнт пружності, у випадку пружини, названий жорсткістю (рис. 4).

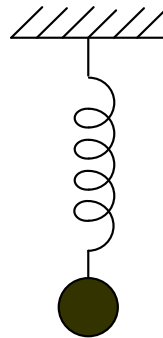


Рис.4

Диференціальне рівняння коливання маятника буде мати вигляд

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (17)$$

З виразів (16) і (1) випливає, що пружинний маятник виконує гармонічні коливання за законом  $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  з циклічною частотою  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  і періодом  $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

Формула (17) справедлива для пружних коливань у межах, для яких виконується закон Гука, тобто коли маса пружини мала в порівнянні з масою тіла.

В цьому випадку потенціальна енергія пружинного маятника, згідно з (13) дорівнює

$$П = \frac{kx^2}{2}. \quad (18)$$

**Фізичний маятник.** Фізичний маятник – тверде тіло, яке під дією сили тяжіння виконує гармонічні коливання відносно нерухомої горизонтальної осі, що проходить через точку підвішування і яка не збігається з центром мас  $C$  тіла (рис. 5).

Якщо маятник відхилений від положення рівноваги на деякий кут  $\alpha$ , то відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент  $M$  сили  $F_\tau$ , яка повертає маятник до положення рівноваги буде дорівнювати

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha, \quad (19)$$

де  $J$  – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку  $O$ ;

$l$  – відстань між точкою підвішування і центром мас маятника;

$F_\tau = -mg \sin \alpha \approx -mg \alpha$  – сила, яка повертає маятник у попереднє положення, (знак мінус обумовлений тим, що зростання  $F_\tau$  і швидкості  $v$  завжди протилежні;

$\sin \alpha \approx \alpha$  – відповідає малим коливанням маятника, тобто малим відхиленням маятника від положення рівноваги.

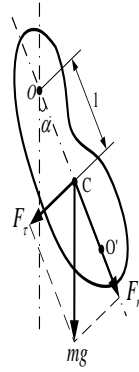


Рис. 5

Рівняння (19) можна записати у вигляді

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

або

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Приймаючи, що  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$  одержимо рівняння  $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$ , ідентичне з (16), розв'язком якого є функція:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20)$$

З виразу (20) випливає, що при малих коливаннях фізичний маятник виконує гармонічні коливання з циклічною частотою  $\omega_0$  і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (21)$$

де  $L = \frac{J}{ml}$  – зведена довжина фізичного маятника.

Точка  $O'$  на продовженні прямої  $OC$ , яка відстоїть від осі підвішування на відстані зведеної довжини  $L$ , називається центром коливань фізичного маятника (рис. 5). Застосовуючи теорему Штейнера, можна показати, що  $OO'$  завжди більше  $OC = l$ . Точка підвішування  $O$  і центр коливань  $O'$  мають властивість взаємозамінності, якщо вісь підвішування перенести в центр коливань, то точка  $O$ , в якій розміщувалась раніше вісь підвішування стане новим центром коливань і період коливань фізичного маятника не зміниться.

**Математичний маятник.** Математичний маятник – ідеалізована система, яка складається з матеріальної точки масою  $m$ , підвішеної на нерозтяжній невагомій нитці, і коливається під дією сили тяжіння (рис.6).

Гарним наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці. Момент інерції математичного маятника дорівнює

$$J = ml^2, \quad (22)$$

де  $l$  - довжина маятника.

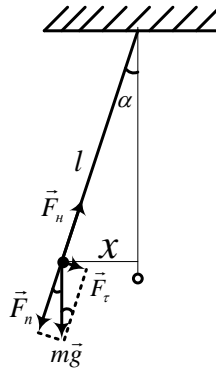


Рис. 6

Оскільки математичний маятник можна подати як окремий випадок фізичного маятника, припустивши, що вся маса фізичного маятника зосереджена в одній точці – центрі мас, то, підставивши вираз (22) у формулу (21), одержимо знайомий вираз для малих коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (23)$$

Порівнюючи формули (23) і (21), бачимо, що якщо зведена довжина  $L$  фізичного маятника дорівнює довжині  $l$  математичного маятника, то їх періоди коливань збігаються. Отже, зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливань якого збігається з періодом коливань даного фізичного маятника.

#### 4. Вільні гармонічні коливання у коливальному контурі

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких фізичні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) періодично змінюються. Для виникнення і підтримування електромагнітних коливань необхідні певні системи, найпростішою з яких є коливальний контур – ланцюг, який складається з увімкнених послідовно котушки індуктивністю  $L$ , конденсатора ємністю  $C$  і резистора опором  $R$ .

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого безмежно малий  $R \approx 0$ . Для виникнення в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди  $\pm Q$ . Тоді в початковий момент часу  $t=0$  (рис. 5, а) між обкладками конденсатора виникне електричне поле, енергія якого

$$W = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Замкнувши конденсатор на котушку індуктивності, він почне розряджатися й у контурі потече зростаючий з часом струм  $I$ . У результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки – зростати.

Оскільки  $R \approx 0$ , то, відповідно до закону збереження енергії, повна енергія контуру буде дорівнювати

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} LI^2 = \text{const},$$

тому що енергія на нагрівання провідників у такому коливальному контурі не витрачається. У момент часу  $t = \frac{1}{4}T$ , коли конденсатор повністю розрядиться, енергія електричного поля зменшується до нуля, а енергія магнітного поля, а отже і струм досягають найбільшого значення (рис. 5,б). Починаючи з цього моменту часу струм у контурі буде зменшуватися; отже, почне слабшати магнітне поле котушки й індукований у ній струм, який тече (відповідно до правила Ленца) у тому ж напрямку, що й струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, при цьому виникне електричне поле, яке намагатиметься послабити струм, який зрештою зменшується до нуля, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму (рис. 5, в). Далі ті ж процеси почнуть протікати в зворотному напрямку (рис. 5, г) і система до моменту часу  $t = T$  прийде в початковий стан (рис. 5, а). Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядки і зарядки конденсатора.

Якби втрат енергії не було, то в контурі відбувалися б періодичні незагасаючі коливання, тобто періодично змінювалися (коливалися) б заряд  $Q$  на обкладках конденсатора, напруга  $U$  на конденсаторі і сила струму  $I$ , яка тече через котушку індуктивності.

Отже, у контурі виникають електричні коливання з періодом  $T$ , причому протягом першої половини періоду струм тече в одному напрямку, протягом другої половини – у зворотному. Коливання супроводжуються перетвореннями енергій електричних і магнітних полів.

Електричні коливання у коливальному контурі можна зіставити з механічними коливаннями маятника (рис. 7), які супроводжуються взаємними перетвореннями потенціальної і кінетичної енергій маятника.

У даному випадку потенціальна енергія маятника  $\frac{kx^2}{2}$  аналогічна енергії електричного поля конденсатора  $\frac{Q^2}{2C}$ , кінетична енергія маятника  $\frac{mv^2}{2}$  – енергії магнітного поля котушки  $\frac{LI^2}{2}$ , а швидкість руху маятника – силі струму в контурі.

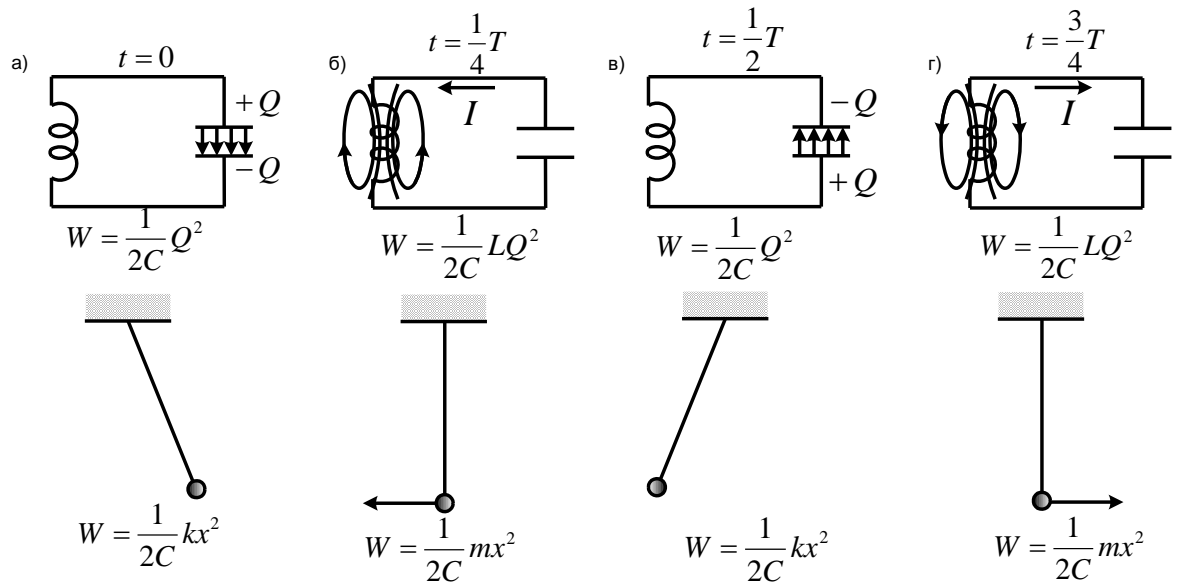


Рис.7

Роль інерції маятника буде зводитися до самоіндукції котушки, а роль сили тертя, яке діє на маятник – до опору контуру.

Відповідно до другого правила Кірхгофа, для контуру, який містить котушку індуктивністю  $L$ , конденсатор ємністю  $C$  і резистор опором  $R$  маємо

$$IR + U_C = \varepsilon_s,$$

де  $IR$  – спад напруги на резисторі;

$U_C = \frac{Q}{C}$  – напруга на конденсаторі;

$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$  – е.р.с. самоіндукції, яка виникає в котушці при протіканні в ній змінного струму ( $\varepsilon_s$  – єдина е.р.с. у контурі).

Отже,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (24)$$

Розділивши (24) на  $L$  і підставивши  $I = \dot{Q}$  і  $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$ , одержимо диференціальне рівняння коливань заряду  $Q$  у контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (25)$$

У даному коливальному контурі зовнішні е. р. с. відсутні, тому розглянуті коливання є вільними коливаннями. Якщо опір  $R = 0$ , то вільні електромагнітні коливання у контурі є гармонічними. Тоді з (25) одержимо диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду  $Q$  в контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (26)$$

З виразу (26) випливає, що заряд  $Q$  в коливальному контурі виконує гармонічні коливання за законом

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (27)$$

де  $Q_m$  – амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою  $\omega_0$ , яка називається власною частотою контуру:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (28)$$

і періодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (29)$$

Формула (29) вперше була отримана Томсоном і називається формулою Томсона.

Сила струму в коливальному контурі буде дорівнювати

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (30)$$

де  $I_m = \omega_0 Q_m$  – амплітуда сили струму.

Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (31)$$

де  $U_m = \frac{Q_m}{C}$  — амплітуда напруги.

З виразів (30) і (31) випливає, що коливання струму  $I$  випереджають за фазою коливання заряду  $Q$  на  $\pi/2$ , тобто коли струм досягає максимального значення, заряд (також і напруга) зменшуються до нуля і навпаки.

Цей взаємозв'язок був установлений при розгляді послідовних стадій коливального процесу в контурі і на підставі енергетичних міркувань. Вільні електромагнітні коливання в контурі є незгасаючими.

## 5. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку з однаковими періодами, які відбуваються з деякою різницею фаз і мають різні амплітуди. Нехай ці коливання відбуваються в напрямі осі  $x$ . Запишемо рівняння цих коливань

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{cases} \quad (1)$$

Циклічні частоти  $\omega$  в обох випадках однакові. Зміщення  $x$  від положення рівноваги, при участі тіла одночасно в двох коливаннях, виражається алгебраїчною сумою

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

або

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Для знаходження результуючої амплітуди  $A$  і початкової фази результуючого коливання  $\varphi$  використаємо векторну діаграму (рис.1).

Оскільки вектори  $\vec{A}_1$  і  $\vec{A}_2$  обертаються з однаковою циклічною частотою  $\omega$ , то різниця фаз  $(\varphi_2 - \varphi_1)$  між ними залишається постійною. Результуючу амплітуду  $A$  в цьому випадку визначають за теоремою косинусів, тобто

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3)$$

або з урахуванням того, що  $\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  одержуємо:

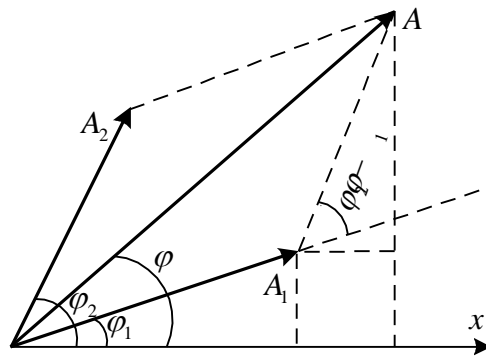


Рис.1

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

і

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5)$$

Початкова фаза результуючого коливання  $\varphi$  дорівнює

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6)$$

Значення амплітуди (5) і початкової фази (6) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos(\omega t + \operatorname{arctg} \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}). \quad (7)$$

Як видно з (7), сумарне коливання має такий же напрям і відбувається з тією ж циклічною частотою  $\omega$ . Амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз обох коливань.

Якщо  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi m$ , де  $(m = 0, 1, 2, \dots)$ , то  $A = |A_1 + A_2|$ ;

Якщо  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$ , де  $(m = 0, 1, 2, \dots)$ , то  $A = |A_1 - A_2|$ .



Оскільки  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$  може набувати значень від  $-1$  до  $+1$ , то межі зміни амплітуди будуть такими:

$$|A_1 + A_2| \geq A \geq |A_1 - A_2| \quad (8)$$

Окремим випадком можна розглядати додавання коливань з близькими циклічними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$  ( $\omega_1 \approx \omega_2$ ). Періодична зміна амплітуди з часом, яка відбувається в цьому випадку, називається *биттям*. Нехай додаються два гармонічних коливання з амплітудами  $A_1 = A_2 = A_0$  і близькими циклічними частотами  $\omega_1$  і  $\omega_2$ . Початкові фази таких гармонічних коливань можна вибрати однаковими, тому

$$x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (9)$$

$$x_2 = A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (10)$$

Різниця фаз двох коливань (9) і (10) буде дорівнювати  $(\omega_2 - \omega_1)t$ .

Скористаємось теоремою косинусів для визначення амплітуди биття

$$A^2 = 2A_0^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]. \quad (11)$$

Замінімо вираз в квадратних дужках у відповідності з формулою

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad (12)$$

Вираз (12) підставимо в (11)

$$A^2 = 4A_0^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \quad (13)$$

або

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \quad (14)$$

Фаза результуючого коливання для довільного проміжку часу знаходиться із графіка (рис.2)

$$\Delta\Phi = \frac{\omega_2 t + \varphi + \omega_1 t + \varphi}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi. \quad (15)$$

Результуюче коливання биття матиме вигляд:

$$x = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right), \quad (16)$$

де  $\left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$  – амплітуда биття.

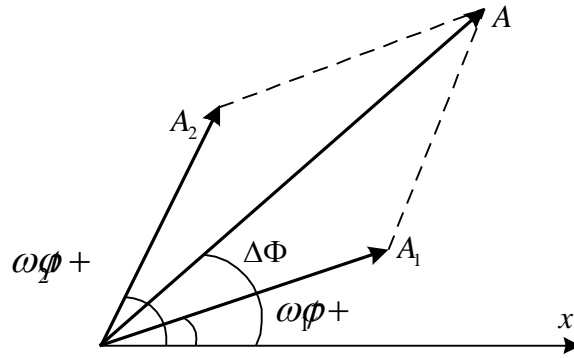


Рис.2

Графік залежності (16) має вигляд (рис 3):

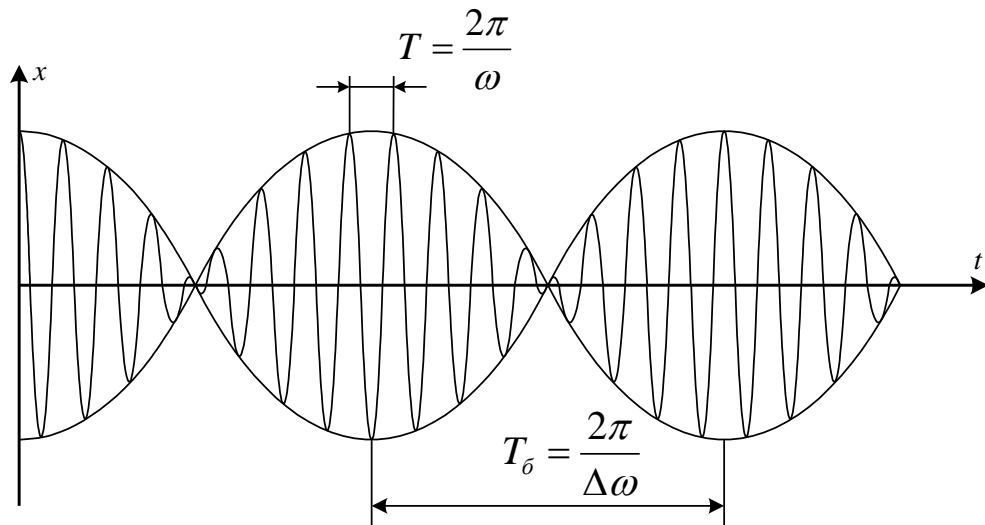


Рис. 3

Періодичність зміни амплітуди від максимуму до максимуму дає час, який називається *періодом биття*

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_б = \pi, \quad \text{звідки} \quad T_б = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (17)$$

Періодичність зміни амплітуди високочастотних коливань визначається за формулою

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} T = 2\pi, \quad \text{звідки} \quad T = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (18)$$

Оскільки циклічні частоти досить близькі, то наближено

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (19)$$

За час  $T_б$  відбувається  $n$  гармонічних високочастотних коливань, тому

$$T_6 = nT. \quad (20)$$

З урахуванням співвідношень (17) і (19) вираз (20) перепишеться

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = n \frac{2\pi}{\omega}, \quad (21)$$

звідки  $\Delta\omega = \frac{\omega}{n}$ , а для частот  $\Delta\nu = \frac{\nu}{n}$ .

В процесі биття частоти генераторів визначаються в таких межах:

$$\nu - \frac{\nu}{n} < \nu < \nu + \frac{\nu}{n}. \quad (22)$$

Биття використовується для градуювання шкал невідомих генераторів в процесі їх виготовлення. Додавання однаконо направлених коливань забезпечує амплітудну модуляцію в радіотехніці, а також проміжну частоту супергетеродинного прийому радіо- і телепередач.

## 6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

Нехай матеріальна точка  $C$  одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях з однаковою циклічною частотою у взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 4).

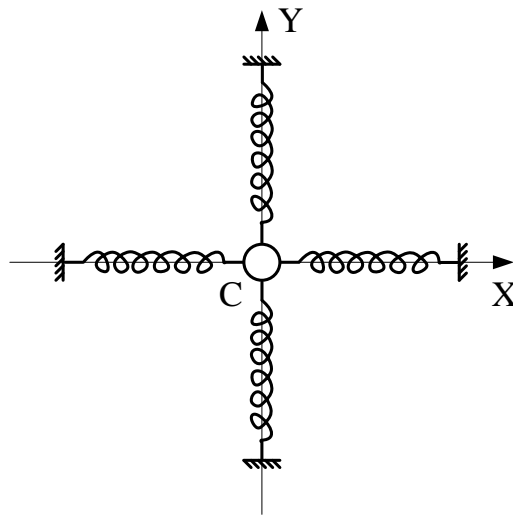


Рис.4

При збудженні коливань матеріальна точка  $C$  буде рухатись по деякій криволінійній траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Рівняння коливань точки в напрямках осі  $x$  і осі  $y$  матимуть вигляд

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi), \quad (23)$$

де  $\Delta\varphi$  – спільна різниця фаз цих коливань.

Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, треба виключити з цих рівнянь час  $t$ .

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}},$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi;$$

$$\left( \frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left( -\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi \right)^2,$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = -\frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

(24)

Рівняння (24) є рівнянням траєкторії результуючого коливання точки  $C$ . Це рівняння є еліпсом, осі якого повернуті відносно осей  $x$  і  $y$ . Орієнтація еліпса і величина його півосей залежить від амплітуд  $A_1$  і  $A_2$  і різниці фаз  $\Delta\varphi$ .

Замкнуті траєкторії, які рисуються одночасно коливальною точкою у взаємно перпендикулярних напрямках, називаються *фігурами Ліссажу*. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, які додаються.

На рис. 8 показана одна із найпростіших траєкторій, одержаних при додаванні взаємно перпендикулярних коливань з відношенням циклічних частот 1:2 і різниці фаз  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ . Рівняння коливань мають вигляд:

$$x = A_1 \cdot \cos \omega t, \quad y = A_2 \cdot \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (28)$$

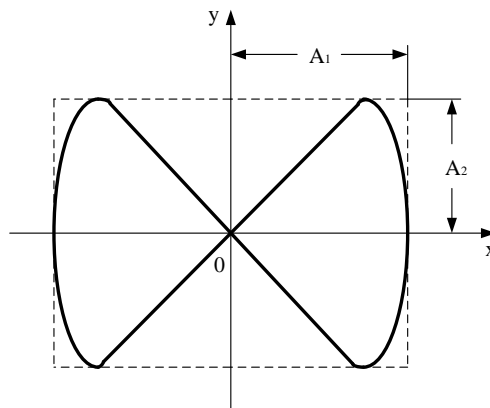


Рис. 8

Якщо відношення частот  $\omega_1:\omega_2$  дорівнює 1:2, а різниця фаз  $\Delta\varphi=0$ , то траєкторія коливань точки вироджується в незамкнуту криву (рис. 9), вздовж якої рухається точка то в одну то в протилежну сторону.

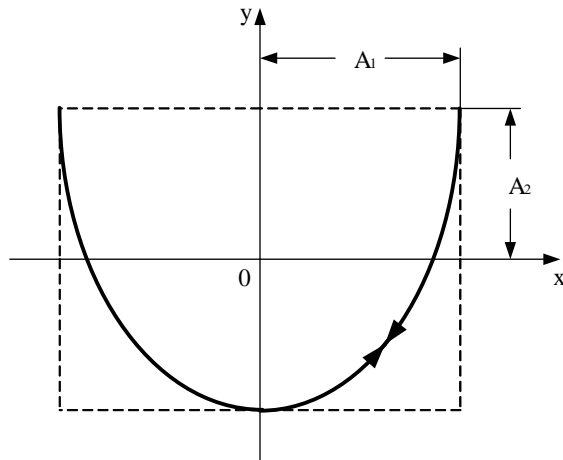


Рис. 9

Чим ближче до одиниці буде відношення частот  $\omega_1:\omega_2$ , тим складнішою буде фігура Ліссажу. Для прикладу на рис. 10 наведена крива фігури Ліссажу з відношенням частот 3:4 і різницею фаз  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$ .

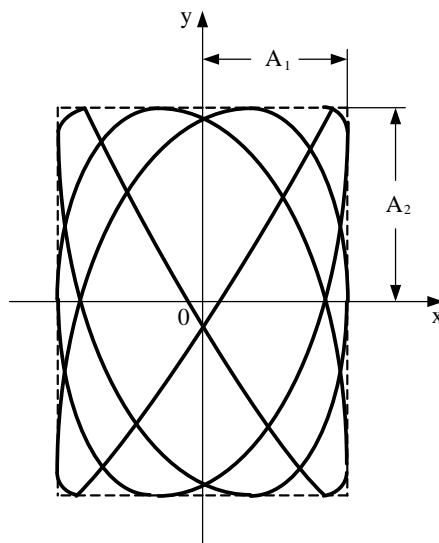


Рис. 10

## 7. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язування

Щоб у реальній коливальній системі одержати незгасаючі коливання, треба компенсувати цій системі втрати енергії. Таку компенсацію можна здійснити за допомогою будь-якого періодично діючого фактора  $X(t)$ , який змінюється за гармонічним законом:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Для механічних коливань пружинного маятника роль  $X(t)$  відіграє зовнішня вимушувальна сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

З урахуванням цієї сили закон руху пружинного маятника запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Якщо скористатися позначеннями  $\frac{k}{m} = \omega_0^2$ ,  $\frac{r}{m} = 2\beta$ , то прийдемо до рівняння

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (2)$$

Рівняння (2) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Розв'язок такого рівняння має складатися з двох частин, загального розв'язку відповідного рівняння без правої сторони і окремого розв'язку цього рівняння з правою стороною, тобто

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + A \cos(\omega t + \varphi),$$

де  $A_0$  — амплітуда зміщення в початковий момент часу ( $t=0$ );

$A$  — амплітуда коливань, які будуть усталені через деякий час.

Через деякий час  $t_1$ , завдяки дії вимушувальної сили  $F_0$ , амплітуда коливань досягне максимального значення (рис. 1).

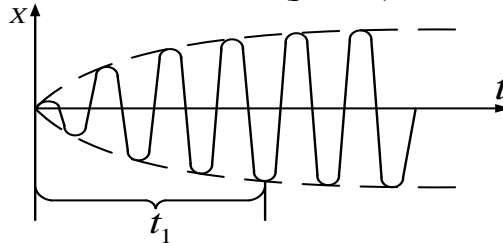


Рис. 1

З цього моменту часу розв'язком рівняння (2) буде лише функція

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Відповідні похідні від (3) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (4)$$

У виразі (4) сталі величини  $A$  і  $\omega$  повинні мати такі значення, щоб гармонічна функція  $\frac{F_0}{m} \cos \omega t$  дорівнювала сумі трьох гармонічних функцій, які стоять в лівій частині рівняння. Для виконання цієї умови, необхідно щоб сума трьох векторів при відповідних косинусах в лівій частині (4) дорівнювала вектору, який стоїть біля косинуса в правій частині. Однак вектори  $A\omega^2$  і  $A\omega_0^2$  напрямлені по одній лінії, але в різні боки. Вектор  $2\beta A\omega$  напрямлений

перпендикулярно до перших двох. Зазначена вище умова може бути реалізована за допомогою векторної діаграми (рис. 2).

Векторна діаграма дає можливість визначити амплітуду і початкову фазу вимушених коливань. З діаграми видно, що

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (2\beta A\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2. \quad (5)$$

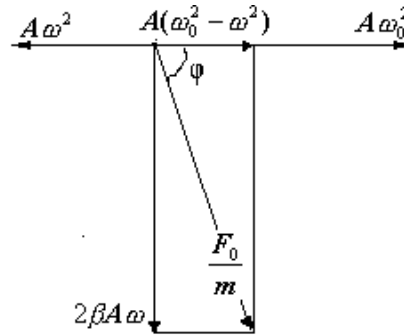


Рис. 2

Звідки амплітуда вимушених коливань буде дорівнювати

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (6)$$

Початкова фаза вимушених коливань, як видно з векторної діаграми, дорівнює

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (6) і (7) розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань (2) матиме вигляд

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}). \quad (8)$$

Якщо розглянути електричний коливальний контур, то змінною величиною в цьому випадку буде е.р.с., або змінна напруга

$$U = U_m \cos \alpha t. \quad (9)$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань в коливальному контурі, з урахуванням (9), буде мати вигляд

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_m}{L} \cos \alpha t. \quad (10)$$

Використовуючи позначення, аналогічні до (2), прийдемо до рівняння

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \alpha t. \quad (11)$$

Розв'язком рівняння (11) є функція, аналогічна до (3), тобто

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Амплітуда заряду вимушених електромагнітних коливань буде дорівнювати

$$Q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (13)$$

Підстановка значень  $\beta$  і  $\omega^2$  в (13) дає значення амплітуди електромагнітних коливань в такому вигляді

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (14)$$

Похідна за часом від (12) дає можливість одержати в коливальному контурі закон зміни електричного струму

$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}),$$

де  $I_m = Q_m \omega$  — максимальний струм у коливальному контурі.

## 8. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс

Розглянемо залежність амплітуди  $A$  вимушених механічних (6) або електромагнітних (13) коливань від частоти  $\omega$ . Механічні й електромагнітні коливання будемо розглядати одночасно, називаючи коливну величину або зміщенням ( $x$ ) коливного тіла від положення рівноваги, або зарядом ( $Q$ ) конденсатора.

З формули (6) випливає, що амплітуда  $A$  зміщення точок від положення рівноваги має максимум. Щоб визначити резонансну частоту  $\omega_{рез}$  — частоту, при якій амплітуда  $A$  зміщення досягає максимуму, — потрібно дослідити на максимум функцію  $A = f(\omega)$ . Диференціюємо підкореневий вираз цієї функції за  $\omega$  і прирівнюємо його до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] &= 0, \\ -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega &= 0 \end{aligned}$$

Ця рівність виконується при двох умовах  $\omega = 0$ , і  $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$ , фізичний зміст яких має лише додатне значення. Отже, резонансна частота буде дорівнювати

$$\omega_{рез} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$



Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушувальної сили до  $\omega_{рез}$ , називається *резонансом* (відповідно механічним або електричним). У випадку коли  $\beta^2 \ll \omega_0^2$ , значення  $\omega_{рез}$  практично збігається з власною частотою  $\omega_0$  коливної системи. Підставляючи (15) у формулу (6), одержимо

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (16)$$

На рис. 3 наведені залежності амплітуди вимушених коливань від частоти при різних значеннях коефіцієнта згасання  $\beta$ . З виразів (15) і (16) випливає, що чим менший коефіцієнт  $\beta$ , тим вище і правіше лежить максимум даної кривої. Якщо  $\omega_0 \rightarrow 0$ , то всі криві (див. рис.3) сходяться в одній точці, яка відповідає, відмінному від нуля граничному значенню амплітуди  $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , так званому статичному відхиленню.

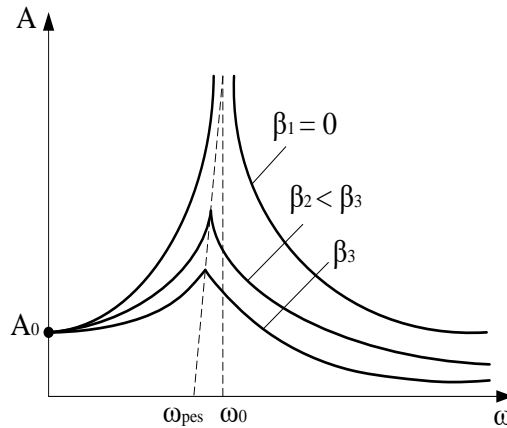


Рис.3

У випадку електромагнітних коливань  $A_0 = \frac{U_m}{L\omega_0^2}$ . Якщо  $\omega \rightarrow \infty$ , то всі криві мають асимптотичне наближення до нуля. Показані на рис. 3 криві називаються *резонансними кривими*.

З формули (16) випливає, що при малому згасанні ( $\beta^2 \ll \omega_0^2$ ) резонансна амплітуда зміщення буде мати вигляд

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (17)$$

Поділимо значення резонансної амплітуди (17) на статичне значення амплітуди  $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ , одержимо добротність коливальної системи

$$\theta = \frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (18)$$

де  $\delta$  — логарифмічний декремент згасання.

Як видно з (18), добротність коливальної системи характеризує її резонансні властивості. Чим більше число добротності, тим більша резонансна амплітуда.

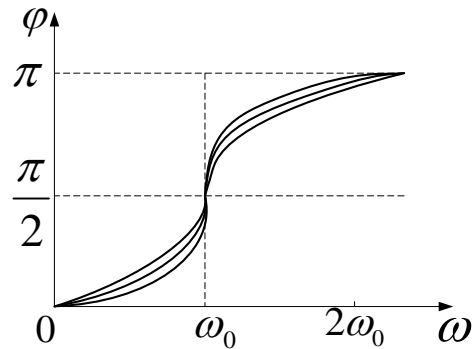


Рис. 4

Залежність  $\varphi$  від  $\omega$  при різних коефіцієнтах  $\beta$  графічно показана на рис. 4, з якого випливає, що при зміні  $\omega$  змінюється і зсув фаз  $\varphi$ . З формули (7) видно, що при  $\omega = 0$ ,  $\varphi = 0$ , а при  $\omega = \omega_0$  незалежно від значення коефіцієнта згасання  $\beta$ ,  $\varphi = \pi/2$ , тобто сила випереджає за фазою коливання на  $\pi/2$ . При подальшому збільшенні  $\omega$  зсув фаз зростає і при  $\omega \gg \omega_0$ ,  $\varphi \rightarrow \pi$ , тобто фаза коливань майже протилежна до фази зовнішньої сили. Сімейство кривих, зображених на рис. 4, називається *фазовими резонансними характеристиками*.

Зупинимось коротко на явищі *параметричного резонансу*. Виявляється, що існують інші види зовнішніх взаємодій, з допомогою яких можна значно збільшити амплітуду коливань. Цей вид взаємодій полягає в тому, що в такт коливань періодично змінюють один із параметрів коливальної системи. Так, наприклад, зменшують довжину математичного маятника  $l$ , коли він перебуває в крайніх положеннях і дещо збільшують її, коли маятник проходить положення рівноваги, від цього маятник почне сильно розгойдуватись, амплітуда коливань буде швидко зростати, тобто наступить *явище параметричного резонансу*.

Збільшення енергії маятника відбувається за рахунок зміни довжини маятника. Сила натягу нитки маятника в цьому випадку є різною, — меншою в крайніх положеннях і більшою в момент проходження маятником положення рівноваги. При зменшенні довжини маятника (крайні положення) — зовнішні сили виконують від'ємну роботу, а при збільшенні його довжини — додатну. Оскільки додатна робота за модулем є більшою за від'ємну, то сумарна робота за час одного повного коливання (період коливань) є більшою за нуль.

Прикладом параметричного резонансу є коливання гойдалки. Без будь-яких зовнішніх впливів дитина, перебуваючи на гойдалці, сама здатна збільшувати амплітуду коливань. Потрібно лише в крайніх положеннях підніматись, а в положенні рівноваги – трохи присідати. В цьому випадку коливальна система поповнюється енергією за рахунок мускульної сили ніг дитини.

Явища резонансу можуть бути як шкідливими, так і корисними. Наприклад, при конструюванні машин і різного роду споруд необхідно, щоб їх власна частота коливань не збігалася з частотою можливих зовнішніх впливів, інакше можуть виникнути вібрації, які призведуть до значних руйнувань. З іншого боку, наявність резонансу дозволяє знайти навіть дуже слабкі коливання, якщо їх частота збігається з частотою власних коливань приладу. Так, телебачення, радіотехніка, прикладна акустика, що сприймають електричні коливання, основані на використанні явища резонансу.

## 9. Змінний струм

Вимушені електромагнітні коливання, які виникають в колі, що містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, можна розглядати як змінний струм. В той же час змінний струм вважають квазістаціонарним, оскільки миттєві значення сили струму в усіх перетинах кола практично однакові. У порівнянні із швидкістю світла будь-які зміни в колі відбуваються досить повільно. Для миттєвих значень квазістаціонарних струмів виконуються закон Ома і правила Кирхгофа.

Розглянемо послідовно процеси, які відбуваються в колі, яке містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор при вмиканні його до джерела змінної напруги

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (19)$$

де  $U_m$  – амплітуда напруги.

1. Розглянемо коло, в яке ввімкнули лише резистор  $R$ , а індуктивність  $L$  і ємність  $C$  – відсутні (рис.5,а).

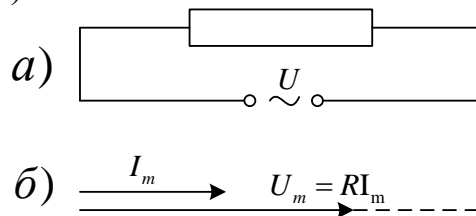


Рис.5, а,б

При виконанні умови квазістаціонарності струм через резистор  $R$  визначається законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t,$$

де амплітуда сили струму дорівнює

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

На векторній діаграмі (рис. 5,б) показано, що зсув фаз між напругою і струмом в колі, в якому є лише резистор  $R$ , дорівнює нулю.

2. Розглянемо випадок, коли змінний струм тече через котушку індуктивності  $L$ , в цьому випадку резистор  $R$  і ємність  $C$  в колі відсутні (рис. 6,а).

Якщо до кола прикладена змінна напруга (19), то через котушку потече змінний струм, в результаті чого в ній виникне е.р.с. самоіндукції  $E = -L \frac{dI}{dt}$ .

Тоді закон Ома для даного замкнутого кола буде мати вигляд

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

звідки

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (20)$$

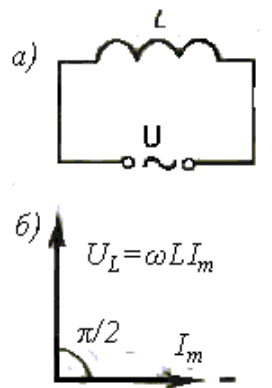


Рис. 6, а,б

Оскільки зовнішня напруга прикладена до котушки індуктивності, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (21)$$

визначає спад напруги на котушці. З рівняння (20) випливає, що

$$dI = \left( \frac{U_m}{L} \right) \cos \omega t dt,$$

або після інтегрування, з урахуванням того, що постійна інтегрування дорівнює нулю, одержимо

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}), \quad (22)$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}.$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (23)$$

називається *реактивним індуктивним опором* (або індуктивним опором).

З виразу (22) випливає, що для постійного струму, коли  $\omega = 0$ , котушка індуктивності опору не чинить. Підстановка значення  $U_m = \omega L I_m$  у вираз (20) з врахуванням (21) приводить до наступного значення спаду напруги на котушці індуктивності:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (24)$$

Порівнюючи вирази (22) і (24) приходимо до висновку, що спад напруги  $U_L$  випереджає за фазою струм  $I$ , який тече через котушку, на  $\pi/2$ , що й показано на векторній діаграмі (рис. 6, б).

3. Нехай змінний струм у колі тече через конденсатор ємністю  $C$ , в цьому випадку активний опір  $R$  і котушка індуктивності  $L$  відсутні, (рис. 7, а).

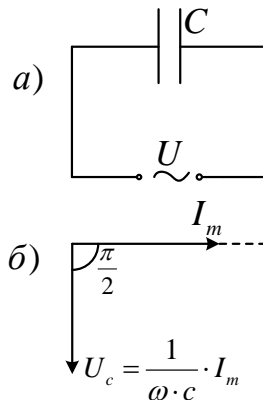


Рис.7, а,б

Якщо змінна напруга (19) прикладена до конденсатора то, в результаті постійного його перезарядження, у колі потече змінний струм. Оскільки вся зовнішня напруга прикладена до конденсатора, а опором підвідних проводів можна знехтувати, то

$$\frac{Q}{C} = U_c = U_m \cos \omega t.$$

Сила струму в цьому випадку буде дорівнювати

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (25)$$

де

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}.$$

Величина  $R_c = \frac{1}{\omega C}$  називається *реактивним або ємнісним опором*. Для постійного струму ( $\omega = 0$ )  $R_c = \infty$ , тобто постійний струм через конденсатор текти не може. Спад напруги на конденсаторі у нашому випадку буде дорівнювати

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (26)$$

Порівнюючи вирази (25) і (26) приходимо до висновку, що спад напруги  $U_c$  відстає за фазою від струму, який тече через конденсатор, на  $\pi/2$ . Це показано на векторній діаграмі (рис. 7, б).

4. Розглянемо коло змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті резистор, котушку індуктивності і конденсатор. На рис. 8, а показане коло, що містить резистор опором  $R$ , котушку індуктивністю  $L$  і конденсатор ємністю  $C$ , на кінці якого подається змінна напруга (19).

У колі виникне змінний струм, який викличе на всіх елементах кола відповідні спади напруг  $U_R$ ,  $U_L$  і  $U_c$ . На рис. 8, б показана векторна діаграма амплітуд спадів напруг на резисторі  $U_R$ , котушці  $U_L$  і конденсаторі  $U_c$ .

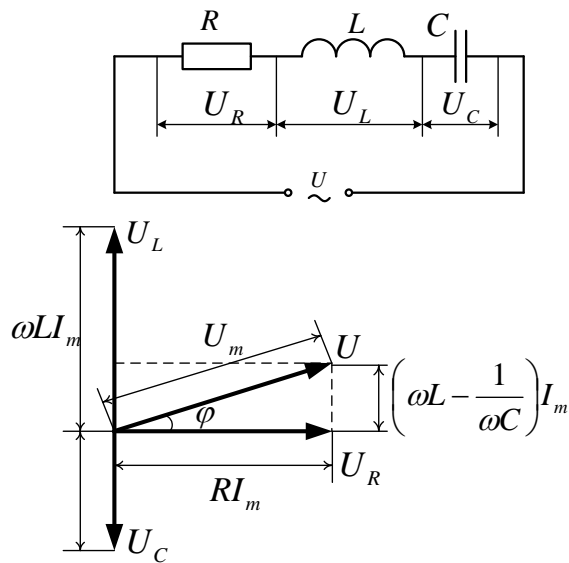


Рис. 8, а, б

Результуюча амплітуда  $U_m$  прикладеної напруги повинна бути рівною геометричній сумі амплітуд всіх спадів напруг. Як видно з рис. 8, б, кут  $\varphi$  визначає різницю або зсув фаз між напругою і силою струму. З рисунка випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (27)$$

З прямокутного трикутника, скориставшись теоремою Піфагора, одержуємо, що

$$(RI_m)^2 + \left[ \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

звідки амплітуда сили струму буде дорівнювати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (28)$$

Отже, якщо напруга в колі змінюється за законом

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в колі тече струм

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (29)$$

де  $\varphi$  і  $I_m$  визначаються відповідно формулами (27) і (28). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (30)$$

називається *повним опором кола* змінного струму, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

називається *реактивним опором*.

Розглянемо окремий випадок, коли в колі відсутній конденсатор. У цьому випадку спад напруг  $U_R$  і  $U_L$  в сумі дорівнює прикладеній напрузі  $U$ . Векторна діаграма для даного випадку показана на рис. 9, з якої видно, що

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L}{R}, \\ I_m &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отже, відсутність конденсатора в колі означає, що  $C = \infty$ , а не  $C = 0$ .

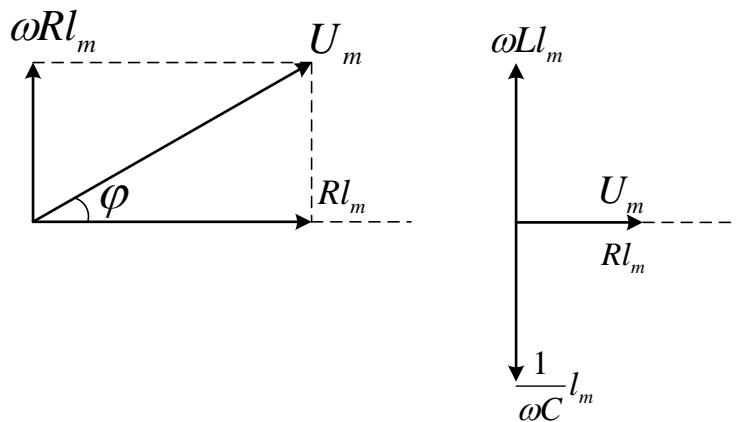


Рис. 9, а, б

Даний висновок можна трактувати так: зближаючи обкладки конденсатора до їх повного зіткнення, прийдемо до кола, у якому конденсатор відсутній (відстань між обкладками прямує до нуля, а ємність – до нескінченності).

### 10. Резонанс напруг

Якщо в колі змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті конденсатор, котушку індуктивності і резистор (рис. 8,а)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (32)$$

то кут зсуву фаз між струмом і напругою (27) перетворюється в нуль ( $\varphi = 0$ ), тобто зміни струму і напруги відбуваються в одній фазі. Умову (32) задовольняє частота

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

У даному випадку повний опір кола  $Z$  (30) стає найменшим, рівним активному опорі  $R$ , а струм у колі визначаючись активним опором, досягає найбільших значень (при даному значенні  $U_m$ ). При цьому спад напруги на активному опорі дорівнює зовнішній напрузі, прикладеній до кола ( $U_R = U$ ), а спади напруг на конденсаторі ( $U_C$ ) і котушці індуктивності ( $U_L$ ) однакові за амплітудою і протилежні за фазою.

Розглянуте явище називається *резонансом напруг* (послідовним резонансом), тому що при цьому відбувається взаємна компенсація напруг  $U_L$  і  $U_C$ , кожна з яких може значно перевищувати прикладену до кола напругу  $U$ . Векторна діаграма для резонансу напруг показана на рис. 9,б.

У випадку резонансу напруг

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

тому, підставивши в цю формулу значення резонансної частоти й амплітуди напруг на котушці індуктивності і конденсаторі, одержимо

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = \theta U_m,$$

де  $\theta$  - добротність контуру.

Оскільки добротність звичайних коливальних контурів більша одиниці, то напруга на котушці індуктивності, а також і на конденсаторі перевищує напругу, прикладену до кола. Тому явище резонансу напруг використовується в техніці для підсилення коливання напруги певної частоти. Наприклад, у випадку резонансу на конденсаторі можна одержати напругу з амплітудою  $\theta U_m$  ( $\theta$  у даному випадку – добротність контуру), що може бути значно більше  $U_m$ . Це підсилення напруги можливе тільки для вузького інтервалу частот біля резонансної частоти контуру, що дозволяє виділити з багатьох сигналів одне коливання певної частоти, тобто на радіоприймачі налаштуватися на потрібну



довжину хвилі. Явище резонансу напруг необхідно враховувати при розрахунку ізоляції електричних ліній, які містять конденсатори і котушки індуктивності, тому що інакше може спостерігатися їх пробій.