МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів

за темою–Довільна система сил (ДСС)

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.

Рецензенти:

1. *Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*

2. *Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

План лекції:

1. Теорема про паралельне перенесення сили.
2. Приведення плоскої системи сил до даного центру.
3. Рівнодіюча плоскої системи сил.
4. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Рекомендована література:

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.

2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.

3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишинв та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.

4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.

5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.

6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.

7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матералівПідручкик/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.

8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.

10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.

11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.

12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зіньковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.

13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. ІІ, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Текст лекції

1. Теорема про паралельне перенесення сили.

Теорема. Усяку силу, прикладену до твердого тіла, можна переносити паралельно у будь - яку точку тіла. Для того щоб її дія на тіло не змінилася, необхідно до нього прикласти пару з моментом, рівним моменту початкової сили відносно точки, в яку вона переноситься.

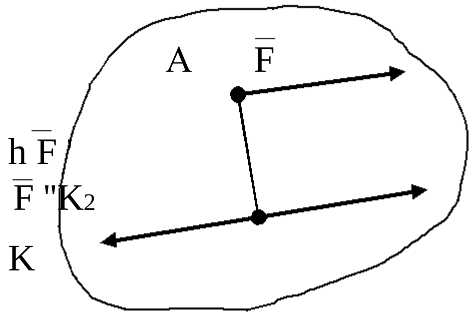


Рис.1

Доведення. Нехай маємо силу $\overline{F}$, прикладену до тіла у точці A (рис. 1). Дія цієї сили не зміниться, якщо у довільній точці K прикласти паралельно силі $\overline{F}$ дві урівноважені сили $\overline{F}'$ і $\overline{F}''$, причому модулі усіх сил рівні: $F' = F'' = F$. Оскільки $\{\overline{F}', \overline{F}''\} \sim 0$, то згідно з другою аксіомою статики система сил $\{\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}''\}$ еквівалентна силі $\overline{F}$. Систему $\{\overline{F}, \overline{F}', \overline{F}''\}$ можна зобразити у вигляді сили $\overline{F}'$, яку можна розглянути як силу $\overline{F}$, паралельно перенесену її початковому напрямі з точки A у точку K, і пари $(\overline{F}, \overline{F}'')$, момент якої дорівнює моменту сили $\overline{F}$ відносно точки K, в яку сила перенесена:

$$M = M_k(\overline{F}) = \pm Fh \tag{1}$$

де h - плече цієї пари.

Пару $(\overline{F}, \overline{F}'')$, що утворюється при перенесенні сили з точки A у точку K, називається приєднаною парою.

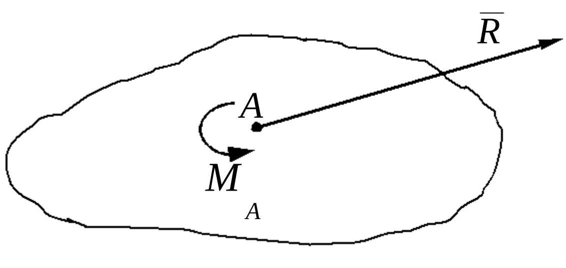
2. Приведення плоскої системи сил до даного центру.

Головний вектордовільної плоскої системи сил – це геометрична сума всіх сил даної системи.

Головний моментдовільної плоскої системи сил відносно вибраного центру – це алгебраїчна сума моментів всіх сил, відносно даного центру і пар сил.

Теорема про приведення системи сил до даного центру.

Теорема: Будь-яка система сил, що діє на абсолютно тверде тіло, при приведенні до довільно вибраного центру А замінюється однією силою, рівною головному вектору системи сил і прикладеною в центрі приведення А, і однією парою з моментом $\boldsymbol{M_A}$, рівним головному моменту системи сил відносно центру А.



Розглянемо тверде тіло, на яке діє довільна система сил $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n\}$, що лежать в одній площині і прикладені у точках $K_1, K_2, \ldots, K_n$ відповідно. Візьмемо у цій площині довільну точку 0 і перенесемо до неї усі діючі сили (рис. 2, а). Тоді згідно з теоремою Пуансо, одержимо систему збіжних сил $\{\bar{F}_1', \bar{F}_2', \ldots, \bar{F}_n'\}$ і систему приєднаних пар $\{(\bar{F}_1, \bar{F}_1''), (\bar{F}_2, \bar{F}_2''), \ldots, (\bar{F}_n, \bar{F}_n'')\}$ з моментами $M_1, M_2, \ldots, M_n$, рівними моментам сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n$ відносно точки O: $M_1 = M_O(\bar{F}_1)$, $M_2 = M_O(\bar{F}_2), \ldots, M_n = M_O(\bar{F}_n)$. Причому

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1', \bar{F}_2 = \bar{F}_2', \ldots, \bar{F}_n = \bar{F}_n'. \qquad (2)$$

Складемо усі збіжні сили, прикладені у точці О за правилом силового багатокутника. Підсумкова сила буде дорівнювати: $\bar{F}_{гол} = \bar{F}_1' + \bar{F}_2' + \ldots + \bar{F}_n' = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i'$

або, враховуючи (4.2), одержимо

$$\bar{F}_{гол} = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i. \qquad (3)$$

Потім, використовуючи теорему про складання пар, замінимо усі приєднані пари однією, лежачою у тій же площині, момент якої дорівнює

$$M_O = M_1 + M_2 + \ldots + M_n = M_O(\bar{F}_1) + M_O(\bar{F}_2) + \ldots + M_O(\bar{F}_n) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\bar{F}_i). \qquad (4)$$

Довільна точка тіла, в яку переноситься паралельно самим собі усі сили системи, називається центром приведення. Величина $\bar{F}_{гол}$, рівна геометричній сумі усіх сил, діючих на тіло, називається головним вектором даної системи. Величина M_O, рівна алгебраїчній сумі моментів усіх сил, діючих на тіло, відносно центра приведення, називається головним моментом системи відносно цього центра. Користуючись цими термінами, одержані вище результати можна сформулювати таким чином. Довільна плоска система сил статично еквівалентна своєю дією: головному вектору даної системи $\bar{F}_{гол}$, прикладеному у центрі приведення, і головному моментові M_O відносно центра приведення О (рис. 2, б).

Сила $\bar{F}_{гол}$ не є рівнодіючою даної системи сил, так як вона замінює цю систему не одна, а разом з приєднаною парою. З визначення головного вектора витікає, що він не змінюється при зміні центра приведення. Іншими словами, якщо за центр приведення беруться різні точки площини, то сила $\bar{F}_{гол}$, рівна головному вектору, буде одна і та ж, як за модулем, так і за напрямом.

Величина головного моменту залежить від положення центра приведення (при умові, що головний вектор не дорівнює нулю), так як із зміною центра приведення плечі сил даної системи, а отже, і їх моменти міняються, тобто кожній точці площини відповідає певне значення головного моменту, тому задаючи головний момент, необхідно вказати, відносно якого центра він вирахуваний.

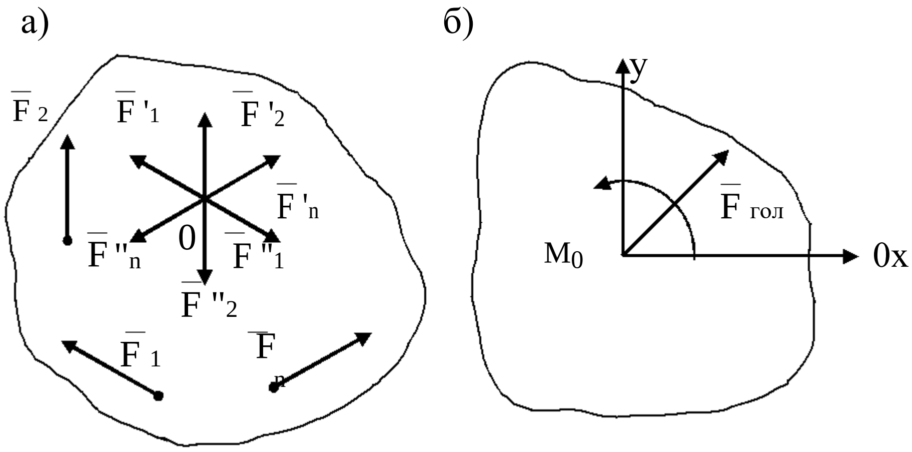


Рис. 2

Значення $\overline{F}_{гол}$ може бути визначено як аналітичним способом за формулою (2.8), так і геометричним шляхом побудови силового багатокутника. Величина M_O визначається за формулою (4).

3. Рівнодіюча плоскої системи сил.

Хай на тверде тіло діє довільна плоска система сил $\{\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n\}$. Приведемо дану систему до головного вектора, прикладеного у довільно вибраному центрі О: $\overline{F}_{гол} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i$, і головного моменту, який має відносно цього центра момент рівний $M_O = \sum_{i=1}^{n} M_O(\overline{F}_i)$. Потім зобразимо головний момент системи M_O у вигляді пари сил (позначимо їх через $\overline{F}$ і $\overline{F}'$), в яких модулі рівні модулю головного вектора системи, тобто $F_{гол} = F = F'$. Для цього необхідно змінити плече цієї пари таким чином, щоб її момент зоставався рівним M_O.

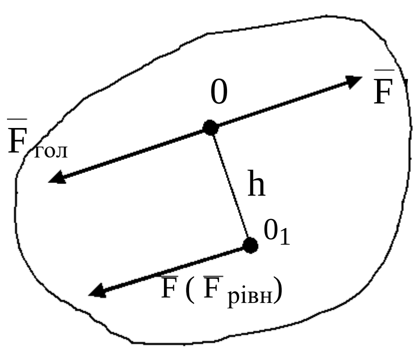


Рис. 3

Скориставшись тим, що пару можна як завгодно переносити у площині її дії, прикладемо одну із складових її сил, наприклад $\overline{F}'$, у центрі О і направимо у бік, протилежній дії вектора $\overline{F}_{гол}$ (рис. 3). Друга сила $\overline{F}$, яка складає приєднану пару, повинна бути спрямована таким чином, щоб знак її моменту відносно центра О і знак головного моменту M_0 співпадали (на рис. 3 вони додатні). Тоді плече цієї пари буде дорівнювати

$$h = M_O / F_{гол} = M_O/F. \tag{5}$$

Отже, задана плоска система сил еквівалентна системі $\overline{F}_{гол}$ і парі $(\overline{F}, \overline{F}')$, але так як сили $\overline{F}_{гол}$ і $\overline{F}'$ урівноважуються, то задана система еквівалентна одній силі $\overline{F}$, що проходить через центр приведення O_1, і, таким чином, ця сила є рівнодіючою, рівною за модулем $F_{гол}$ і спрямованою паралельно головному вектору у той же бік:

$$\overline{F}_{рівн} = \overline{F}_{гол} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i \ . \qquad (6)$$

Доведемо тепер теорему про момент рівнодіючої, яка належить французькому механіку Варіньону.

Теорема. Момент рівнодіючої довільної плоскої системи сил відносно будь - якого центра (точки) дорівнює алгебраїчній сумі моментів усіх сил цієї системи відносно того ж центра.

Доведення. На підставі викладеного вище маємо: момент рівнодіючої $\overline{F}_{рівн}$, прикладеної у точці O_1, відносно центра приведення O дорівнює: $M_O(\overline{F}_{рівн}) = F_{рівн} \cdot h$ (див. рис. 3).З другого боку, з формули (5) очевидно, що M_O є головним моментом системи сил відносно центра О. Ураховуючи вираз (4), остаточно маємо

$$M_O(\overline{F}_{рівн}) = \sum_{i=1}^{n} M_O(\overline{F}_i) \qquad (7)$$

Теоремою Варіньона широко користуються при рішенні різних задач статики.Зокрема, її використовують при визначенні рівнодіючої паралельних сил. Сили називаються паралельними, якщо їх лінії дії паралельні між собою.

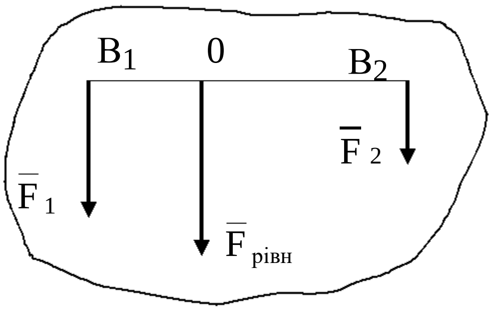


Рис. 4

Знайдемо рівнодіючу двох паралельних сил $\overline{F}_1$ і $\overline{F}_2$, діючих на тверде тіло (рис. 4). На підставі формули модуль головного вектора плоскої системи сил має вигляд $F_{гол} = \sqrt{F_{гол.x}^2 + F_{гол.y}^2}$, де $F_{гол.x} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix}$, $F_{гол.y} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy}$. Користуючись тим, що координатні осі можна розташовувати у площині довільно, спрямуємо ось x таким чином, щоб вона була перпендикулярною до лінії дії сил F_1 і F_2, а ось y їм паралельна. Тоді, ураховуючи, що головний вектор за модулем дорівнює рівнодіючій, паралельний і спрямований у той же бік: $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$; $\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_1 + F_2$; $F_{рівн} = \sqrt{0 + (\sum_{i=1}^{n} F_{iy})^2} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = F_1 + F_2$.

Записавши потім суму моментів сил відносно будь - якої точки прямої $B_1 B_2$ або її продовження, за теоремою Варіньона знайдемо положення лінії дії рівнодіючої $\overline{F}_{рівн}$. Прийнявши за центр моментів точку B_1, маємо: $M_{B_1}(\overline{F}_{рівн}) = M_{B_1}(\overline{F}_1) + M_{B_1}(\overline{F}_2)$, звідки, так як $M_{B_1}(\overline{F}_1) = 0$, $(F_1 + F_2) B_1 0 = F_2 B_1 B_2$, або

$$F_1 B_1 0 = F_2 B_2 0 \qquad (8)$$

4. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Теорема. Для рівноваги вільного твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор і головний момент цієї системи відносно довільно вибраного центра (точки) дорівнювали нулю, тобто

$$F_{гол} = 0,\ M_O = 0. \qquad (9)$$

Доведення необхідності. Приведемо довільну плоску систему сил, під дією якої тверде тіло знаходиться у рівновазі, до головного вектора $\overline{F}_{гол.}$, прикладеного у центрі O, і пари $(\overline{F},\overline{F}')$ з моментом M_O, рівним головному моменту системи. Для того щоб система збіжних сил, прикладених у центрі O, була урівноважена, необхідне виконання умови $\overline{F}_{гол} = 0$. Для того щоб сума моментів приєднаних пар дорівнювала нулю, необхідне виконання умови $M_0 = 0$.

Таким чином, для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідне одночасне виконання умов (9).

Доведення достатності. Нехай умови (9) виконуються для будь - якого центра приведення 0 тіла. Але тоді, оскільки $\overline{F}_{гол.} = 0$, довільна система сил може бути приведена тільки до пари з моментом M_O, а так як $M_O = 0$, то тверде тіло знаходиться у рівновазі.

Тепер розглянемо аналітичні умови рівноваги твердого тіла, що знаходиться під дією довільної плоскої системи сил, виходячи з виразів (9).

Перша форма рівнянь рівноваги. Так як розглядається рівновага плоскої системи сил, то вираз для модуля головного вектора може бути записано у такому вигляді:

$$F_{гол.} = \sqrt{F^2_{гол.x} + F^2_{гол.y}}\ . \qquad (10)$$

Ураховуючи вираз (4) і те що $\overline{F}_{гол}$ дорівнює нулю тільки тоді, коли будуть дорівнювати нулю обидва його складові, формулу (5) можна переписати у такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_O(\overline{F}_i) = 0. \qquad (11)$$

Вирази (11) являють собою рівняння рівноваги вільного твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил. Отже, для рівноваги вільного твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил цієї системи на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума їх моментів відносно довільно вибраної точки (центра) теж дорівнювала нулю.

Друга форма рівнянь рівноваги. Теорема. Для рівноваги вільного твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил цієї системи на довільно вибрану вісь дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума їх моментів відносно двох довільних точок, що не лежать на однім перпендикулярі до цієї осі, також дорівнювали нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i)=0; \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i)= 0. \qquad (12)$$

<u>Доведення необхідності.</u> Так як тіло знаходиться у рівновазі, то сума проекцій усіх сил на будь - яку вісь і сума їх моментів відносно довільної точки площини, в якій лежить дана система сил, дорівнює нулю (див. початок цього параграфа).

<u>Доведення достатності.</u> Доводимо це положення методом від протилежного. Якщо для даної системи сил виконується тільки дві умови (12), тобто $\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0, \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = 0$, то така система сил згідно з п.2 параграфа 4.4 не буде знаходитися у рівновазі, а буде мати рівнодіючу $\overline{F}_{рівн.}$, яка проходить одночасно через точку A і B (лінія дії такої рівнодіючої повинна співпадати з прямою AB). Отже, якщо вісь X була б напрямлена перпендикулярно до прямої AB, то $F_{рівн.x} = 0$ або $\sum_{i=1}^{n} F_{ix} = 0$, і перше рівняння (12) буде висновком з виразів $\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0$ і $\sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i)=0$. Але так як у нашому випадку вісь X проведена не перпендикулярно до прямої AB, то перший вираз з формул (12) може бути задовільний тільки тоді, коли $\overline{F}_{рівн.} = 0$, тобто коли має місце рівноваги тіла.

Третя форма рівнянь рівноваги. Теорема. Для рівноваги вільного твердого тіла під дією довільної плоскої системи сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил цієї системи відносно трьох довільно вибраних, але не лежачих на одній прямій, точок дорівнювали нулю, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i)=0, \sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i)=0, \sum_{i=1}^{n} M_C(\overline{F}_i)=0. \qquad (13)$$

<u>Доведення необхідності.</u> Нехай тіло знаходиться у рівновазі, тоді головний момент системи сил або сума моментів усіх її сил відносно будь - якої точки площини, в якій діє дана система сил, буде дорівнювати нулю (див. початок цього параграфа).

<u>Доведення достатності.</u> Якщо з трьох умов (13) виконуються тільки перші два, і всі три точки $A, B,$ і C лежать на одній прямій. Тоді з виразів $\sum_{i=1}^{n} M_A(\overline{F}_i) = 0$ і $\sum_{i=1}^{n} M_B(\overline{F}_i) = 0$ витікає, що згідно з параграфом. така система сил не буде знаходитися у рівновазі і лінія дії її рівнодіючої співпадає з прямою AB, тоді $M_C(\overline{F}_{рівн}) = 0$ $\sum_{i=1}^{n}$

Таким чином, третя умова виразу (13) є висновком перших двох. Але оскільки точка $A, B,$ і C не лежать на одній прямій, то рівнодіюча плоскої системи сил повинна дорівнювати нулю. Отже, при виконанні усіх трьох умов (13) має місце рівновага тіла.

Слід зауважити, що для твердого тіла, яке знаходиться у рівновазі під дією довільної плоскої системи сил, можна скласти не більше трьох незалежних рівнянь рівноваги.

Окремим випадком довільної плоскої системи сил є система паралельних сил. Системою паралельних сил називається сукупність сил, лінії дії яких паралельні між собою.

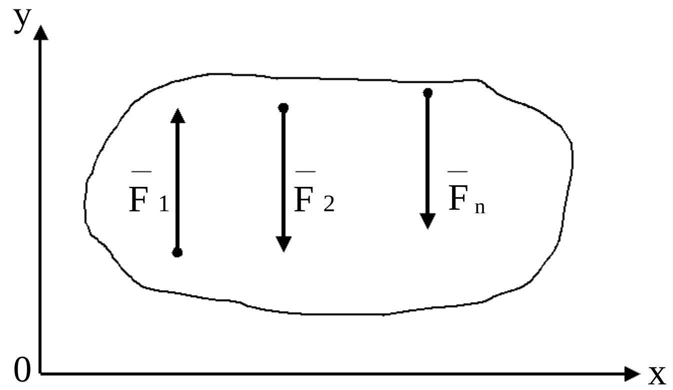


Рис. 5

Нехай $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \ldots, \bar{F}_n\}$ - система паралельних сил на площині. Користуючись тим, що координатні осі можна розташовувати на площині довільно, направимо вісь таким чином, щоб вона була перпендикулярна лініям дії системи паралельних сил, а вісь Y - їм паралельна (рис. 5). Тоді перше з рівнянь (11) перетвориться у тотожність, а два останніх рівнянь будуть являти собою першу форму рівнянь рівноваги системи паралельних сил:

$$\sum_{i=1}^{n} F_{iy} = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i) = 0 \qquad (14)$$

Таким чином, для рівноваги вільного твердого тіла під дією плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума усіх сил системи дорівнювала нулю і щоб алгебраїчна сума їх моментів відносно довільно вибраної точки *B* також дорівнювала нулю.

Другу форму умов рівноваги для системи паралельних сил одержуємо з рівнянь (12) або (13):

$$\sum_{i=1}^{n} M_A(\bar{F}_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n} M_B(\bar{F}_i)=0 \qquad (15)$$

Отже, для рівноваги вільного твердого тіла під дією плоскої системи паралельних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчні суми моментів усіх сил відносно двох довільно вибраних точок, які не лежать на одній прямій, паралельній до ліній дії сил, дорівнювали нулю.