

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт  
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів**

**за темою – Кінематика точки**

**Кременчук 2023**

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

## **СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

## **ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від  
28.08.2023 № 1

### **Розробник:**

*Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії,  
Сіора А.С.*

### **Рецензенти:**

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

### План лекції:

1. Кінематика точки. Способи завдання руху точки.
2. Швидкість точки.
3. Прискорення точки.
4. Рівномірний рух.
5. Рівнозмінний рух.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишин та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

#### Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

## Текст лекції

### 1. Кінематика точки. Способи завдання руху точки.

#### 1.1. Векторний спосіб завдання руху точки. За цим способом треба

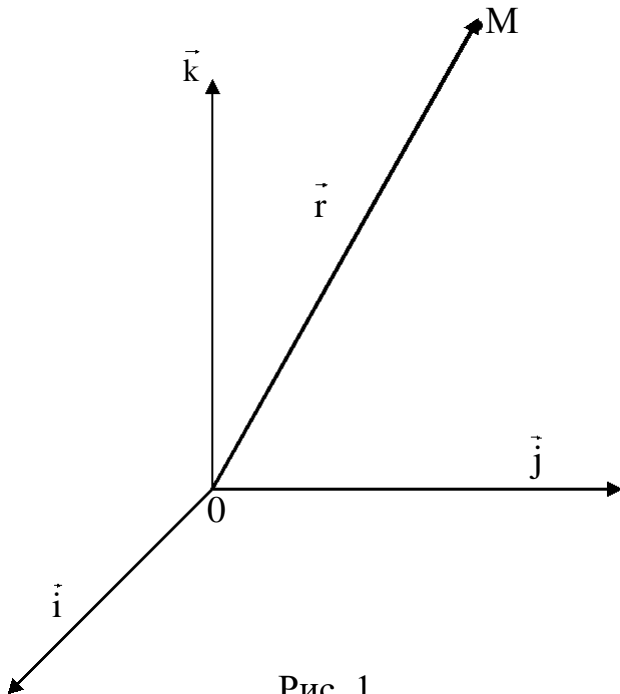


Рис. 1

вибрати систему відліку і провести радіус-вектор  $\vec{r} = OM$  з початку відліку  $O$  у рухому точку  $M$ . Положення системи відліку у просторі повинно бути цілком визначено, наприклад, репером – трьома взаємно перпендикулярними векторами, що перетинаються у точці  $O$  (рис. 1), тобто ортами  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Радіус-вектор  $\vec{r} = OM$  цілком і однозначно визначає перебування точки  $M$  у даний момент часу відносно системи відліку. Точка  $M$  рухається, то з часом її положення

змінюється, змінюється і радіус-вектор.

Щоб визначити рух точки  $M$ , необхідно вказати, де вона знаходиться у кожному мить, необхідно виразити радіус-вектор  $\vec{r}$  у вигляді якоїсь функції часу.

$$\vec{r} = \vec{r}(t).$$

**Переміщенням** точки за даний проміжок часу називають вектор  $\Delta \vec{r}$  (рис. 2), проведений із положення, яке займала точка на початку цього проміжку у положення, яке вона займає у кінці його.

Переміщення (вектор  $\Delta \vec{r}$ ) відмічає положення точки  $M$  тільки на початку і в кінці проміжку часу  $\Delta t$ , але не дає можливості визначити, де знаходиться рухома точка у кожному мить цього проміжку часу. Щоб це визначити, необхідно час руху розбити на якомога менші відрізки.

Якщо траєкторія точки пряма лінія, то рух точки називається **прямолінійним**, якщо ж траєкторією є яка-небудь крива лінія, то рух називають **криволінійним**.

Різницю між траєкторією і переміщенням точки пояснюємо на прикладі. Автомобіль пройшов шлях від Харкова до Києва, його переміщення буде зображене вектором проведеним з Харкова до Києва по хорді земної кулі, а траєкторією буде уся пройдена автомобілем траса.

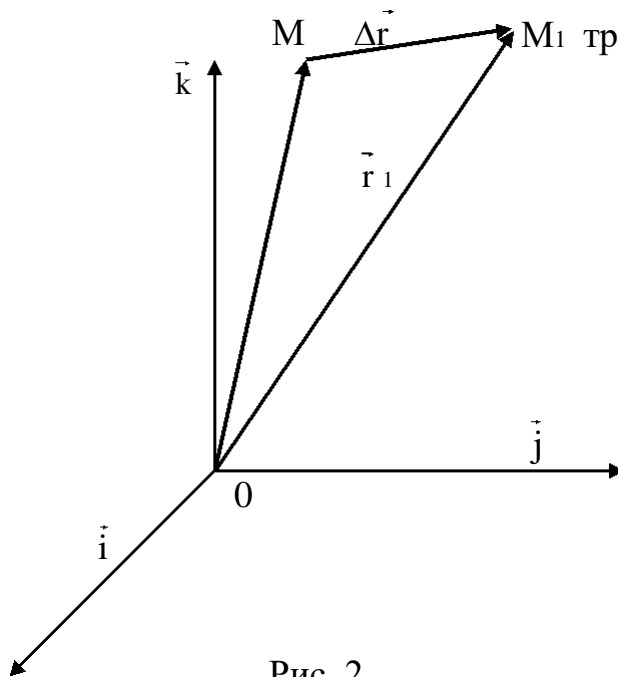


Рис. 2

До понять переміщення і траєкторія близько примикає поняття довжини шляху, або, коротко шлях. Цю величину позначають буквою  $s$ .

Слід визначити, що шлях рухомої точки завжди збільшується за часом, тобто є функцією часу

$$s = s(t).$$

Ця функція однозначна, неперервна, скалярна і істотно додатна.

**1.2. Природний спосіб завдання руху точки.** Якщо траєкторія точки відома, то для визначення місцезнаходження цієї точки у

просторі достатньо визначити на якій відстані вона знаходиться від якої-небудь другої точки траєкторії. Так, наприклад, місцезнаходження потяга відоме, якщо відома залізниця і відстань по ній від якої-небудь станції.

Звичайно, при цьому треба знати, по яку сторону від станції знаходиться потяг на цій відстані. Цю станцію можна прийняти за початок відліку  $A$  і умовно вважати відстань по одну сторону додатною, а по другу – від’ємною. Відстань вимірюють по траєкторії з врахуванням вибраного напрямку відліку дуг (+ або -), її називають також дуговою координатою. Щоб не переплутувати дугову координату і шлях  $s$ , умовимося позначати дугову координату  $\tilde{s}$ , тобто  $s$  над буквою будемо писати хвилясту риску (“тильду”).

При русі точки по траєкторії дугова координата її змінюється і, щоб визначити рух точки, треба виразити дугову координату деякою однозначною неперервною функцією часу:

$$\tilde{s} = s(t)$$

Такий спосіб визначення руху точки називається природним або за заданою траєкторією.

Незважаючи на схожість у позначенні і у використанні, поняття довжини шляху і дугової координати дуже різні. Шлях  $s$ , пройдений точкою, є реальною об’єктивно існуючою величиною. Він залежить тільки від руху точки у даній системі відліку і не залежить від розрахунків, від вибору системи координат.

Шлях завжди додатній, при русі точки пройдений шлях завжди зростає це неспадна функція часу. Дугова координата  $\tilde{s}$  - величина умовна. Величина і знак дугової координати залежить від вибору початку відліку (точка  $A$ ) і додатного напрямку відліку дуг. Не тільки від залежності положення і руху

точка, але і від довільного вибору системи відліку дугова координата

$M$

$s$

може бути додатною або від’ємною, збільшуватися або зменшуватися. Проте

використання дугових координат у кінематиці точки визвано значними зручностями метода.

**1.3. Координатний спосіб завдання руху точки.** Положення будь-якої точки  $M$  у просторі (рис. 3) може бути визначено трьома ортогональними проекціями  $P$ ,  $Q$  і  $R$  на три взаємно перпендикулярні осі  $Ox$ ,  $Oy$  і  $Oz$ , які називаються осями координат. Якщо точка  $M$  рухається, то і її проекції  $P$ ,  $Q$  і  $R$  переміщуються за відповідними осями, і координати точки  $M$  міняються. Для визначення руху точки  $M$  у цій системі треба знати координати точки  $M$  у кожному мить, тобто виразити їх неперервними і однозначними функціями часу:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

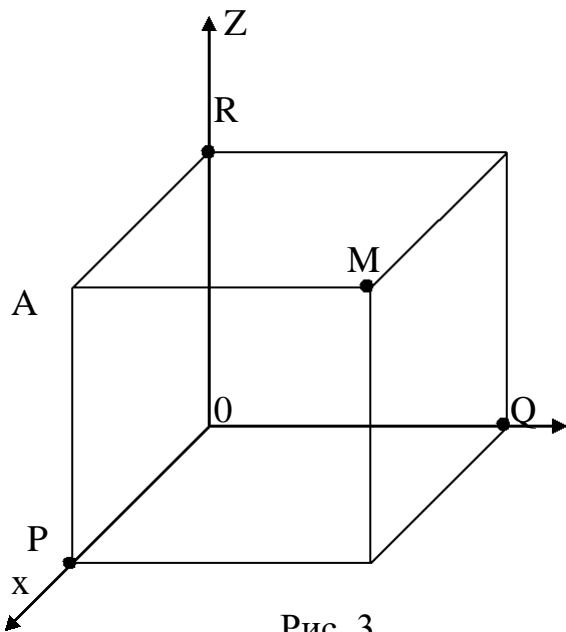


Рис. 3

Ці співвідношення називають кінематичними рівняннями руху точки у прямокутних координатах, а спосіб визначення руху точки за допомогою цих співвідношень називають координатним.

Якщо точка  $M$  рухається у будь-якій площині, яку приймають за площину  $xOy$ , то третє рівняння становиться зайвим і рух точки визначається двома рівняннями у плоскій системі координат  $xOy$ .

Якщо точка рухається прямолінійно, то прийнявши її

траєкторію за координатну вісь, визначимо рух точки одним рівнянням. У цьому випадку координатний спосіб визначення руху точки співпадає з природнім, а дугова координата становиться ідентичною декартовій.

При координатному способі завдання руху точки траєкторія точки невідома і її визначення складає одну із задач, що потребує свого рішення.

Для визначення траєкторії точки, рух якої заданий у координатній формі, використовуються два методи. По одному з них у рівняннях руху дають аргументу  $t$  різні значення і вираховують відповідні значення функцій (координат). Потім відмічаються положення точки за її координатами.

За другим методом визначають рівняння траєкторії, тобто рівняння тієї кривої, яка цілком або у деякій своїй частині є траєкторією точки. Траєкторія це геометричне поняття, її рівняння не повинно вмещати час, і для визначення рівняння траєкторій необхідно з рівнянь руху час виключити. Виключення  $t$  виконується за правилами елементарної математики.

## 2. Швидкість точки.

**Швидкість** є кінематична міра руху точки, яка характеризує швидкість зміни її положення.

Як відомо з фізики, при рівномірному русі швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:

$$V = S / t$$

(вважається, що початок відліку шляху і часу співпадають).

Одиниця швидкості:

$$[V] = \frac{[S]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{м} / \text{с} .$$

Швидкість є величина векторна. При прямолінійному рівномірному русі швидкість постійна і за модулем і за напрямом, а вектор її співпадає з траєкторією (рис. 4., а).

При криволінійному русі швидкість точки за напрямом змінюється. Для того, щоб встановити напрям вектора швидкості при криволінійному русі, розіб'ємо траєкторію на нескінченно малі ділянки шляху, які можна вважати внаслідок їх малості прямолінійними. Тоді на кожній ділянці умовна швидкість  $V_n$  такого прямолінійного руху буде спрямовано по хорді. Гранично при  $\Delta S$ , яка наближається до нуля, хорда співпадає з дотичною, отже, швидкість у кожному мить часу направлена по дотичній до траєкторії у бік руху (рис. 4, б).

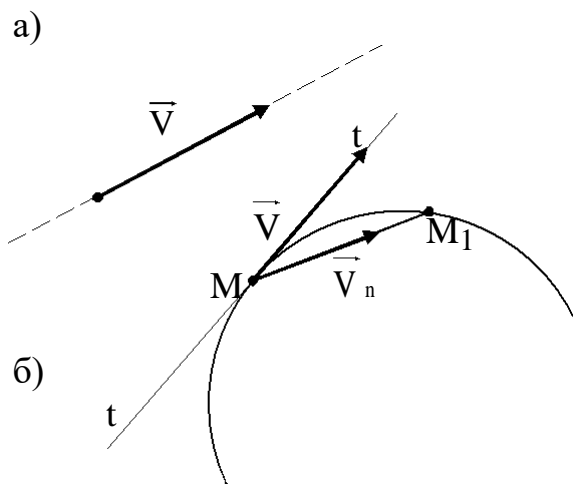


Рис. 4

При нерівномірному русі точки модуль її швидкості змінюється. Уявимо собі точку, рух якої задано природним способом рівнянням  $S = S(t)$ . Щоб пройти шлях  $\Delta S$ , точці потрібен був би деякий час  $\Delta t$ . Відношення пройденого шляху до витраченого часу називають середньою швидкістю на цій ділянці, або за цей час:

$$V_{cp} = \Delta S / \Delta t .$$

Отже, модуль швидкості точки дорівнює першій похідній

від шляху за часом:

$$V = ds / dt = s .$$

Рух, в якому швидкість з часом зростає, називають **прискоренням**; рух, в якому швидкість з часом зменшується – **уповільненням**.

Визначимо швидкість точки  $M$ , рух якої заданий у координатній формі рівняннями. По мірі руху точка  $M$  у просторі її проекції  $P$ ,  $Q$  і  $R$  рухаються своїми прямолінійними траєкторіями, тобто за осями координат. Алгебраїчна швидкість, наприклад, точки  $P$  за формулою запишеться так:  $V_P = dx / dt$ . Таким чином, алгебраїчна швидкість проекції точки  $M$  на координатну вісь  $Ox$  (точка  $P$ ) дорівнює першій похідній від координати  $x$  за часом  $t$ . Аналогічно одержуємо алгебраїчні швидкості точок  $Q$  і  $R$ , тобто проекції точки  $M$  на осі

$$Oy \text{ і } Oz : V_Q = dy / dt , V_R = dz / dt .$$

Нехай точка  $M$  за час  $dt$  перемістилася на своїй траєкторії на елемент дуги траєкторії  $ds$ . За формулою:

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

де  $dx$ ,  $dy$  і  $dz$  - проекції елемента дуги на осі координат.

Косинуси кутів між елементарними переміщеннями  $ds$  і осями координат:

$$\cos \alpha_v = \frac{dx}{ds}; \cos \beta_v = \frac{dy}{ds}; \cos \gamma_v = \frac{dz}{ds}.$$

Щоб визначити проекцію швидкості  $V$  на будь-яку вісь, необхідно помножити модуль швидкості  $V = ds / dt$  на косинус кута між напрямом цієї осі і напрямом швидкості. Таким чином, для проекцій  $V_x, V_y$  і  $V_z$  швидкості точки  $M$  на осі координат маємо:

$$V_x = V \cos \alpha_v = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dt} = V_x;$$

$$V_y = V \cos \beta_v = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dy}{ds} = \frac{dy}{dt} = V_y;$$

$$V_z = V \cos \gamma_v = \frac{ds}{dt} \cdot \frac{dz}{ds} = \frac{dz}{dt} = V_z;$$

=

Піднесемо до квадрата одержані рівняння:

$$V_x = V \cos \alpha_v, V_y = V \cos \beta_v, V_z = V \cos \gamma_v$$

і складемо їх:

$$V_x^2 + V_y^2 + V_z^2 = V^2 (\cos^2 \alpha_v + \cos^2 \beta_v + \cos^2 \gamma_v) = V^2$$

тоді

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Напрямок швидкості можна визначити за спрямовуючими косинусами:

$$\cos \alpha_v = V_x / V; \cos \beta_v = V_y / V; \cos \gamma_v = V_z / V$$

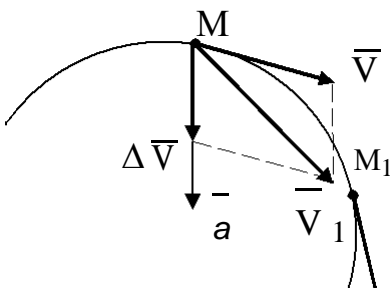
При плоскому русі  $V_z = 0$ , і

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$\cos \alpha_v = V_x / V; \cos \beta_v = V_y / V.$$

### 3. Прискорення точки.

Рівномірний прямолінійний рух характеризується тільки однією величиною – швидкістю, яка залишається постійною за увесь час руху. При криволінійному русі швидкість точки у різні моменти часу різна. Навіть якщо величина швидкості не змінюється, все ж має місце зміна напрямку швидкості.



У загальному випадку швидкість міняється як за величиною, так і за напрямком. Для характеристики нерівномірного руху потрібна величина, яка б показувала швидкість зміни числового



Рис. 5

$\overline{V}_1$

значення і напрямку швидкості руху точки. Ця величина називається **прискоренням** точки.

Розглянемо природний спосіб завдання руху. Хай, наприклад, точка, рухаючись криволінійно (рис. 5), знаходиться у деякий момент часу  $t$  у положенні  $M$  і мала швидкість  $V$ , а через малий проміжок часу  $\Delta t = t_1 - t$  положення  $M_1$  і швидкість  $V_1$ . Зміна швидкості є різниця між векторами  $V$  і  $V_1$ . Перенесемо вектор  $V_1$  у точку  $M$  і візьмемо векторну різницю між  $V$  і  $V_1$ . Для цього побудуємо паралелограм, в якому діагонально буде вектор  $V_1$ , а однією із сторін – вектор  $V$ . Тоді друга сторона буде зображати зміну швидкості точки і називатися вектором приросту швидкості:

$$\Delta V = V_1 - V.$$

Відношення вектора приросту швидкості до проміжку часу  $\Delta t$ , за який відбулося це прирощення, називається вектором середнього прискорення за даний проміжок часу:

$$a_{cp} = \Delta V / \Delta t$$

Цей вектор спрямований так же, як і вектор прирощення швидкості. Але при криволінійному русі напрям вектора прискорення не співпадає з напрямом вектора швидкості.

Зменшуючи проміжок часу  $\Delta t$ , прийдемо до поняття векторного миттєвого прискорення, яке визначається як границя відношення прирощення вектора швидкості до прирощення часу:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\Delta V / \Delta t) = dV / dt.$$

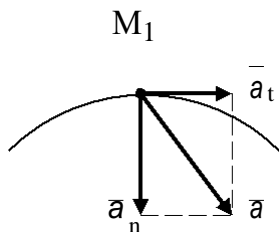


Рис. 6

Розглянемо плоский рух точки. Розкладемо вектор прискорення  $a$  на дві складові, одну з яких  $a_t$  направимо по дотичній до траєкторії у даній точці  $M$ , а другу  $a_n$  по нормалі до траєкторії (рис. 6):  $a_t$  називається тангенціальним або дотичним прискоренням, а  $a_n$  – нормальним або доцентровим прискоренням.

При прямолінійному русі вектор швидкості спрямований завжди уздовж прямої, по якій рухається точка. Очевидно, що напрям прискорення співпадає з напрямом вектора  $\Delta V$  (рис. 7).

У цьому випадку проекція прискорення точки на нормаль до траєкторії дорівнює нулю ( $a_n = 0$ ):

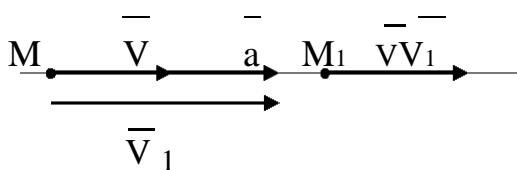


Рис. 7

$$a = a_t + a_n = a_t.$$

Модуль вектора тангенціального прискорення  $a_t$  буде дорівнювати модулю похідної від величини швидкості за часом:

швидкості за часом:

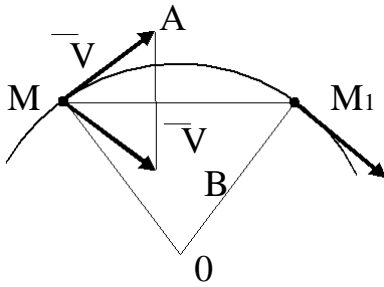


Рис. 8

$$a_t = \left| \frac{dV}{dt} \right| = \left| \frac{d^2 S}{dt^2} \right|.$$

Дотичне прискорення характеризує зміну модуля швидкості.

Розглянемо тепер рівномірний рух точки по криволінійній траєкторії. Будемо вважати, що траєкторією руху являється коло (рис. 8).

Візьмемо два близьких положення  $M$  і  $M_1$  рухомої точки. Швидкість точки постійна за

величиною, але змінює свій напрям. Знайдемо різницю цих швидкостей, користуючись правилом трикутника. Одержані два рівнобедрені трикутника  $OMM_1$  і  $MAV$  подібні, так як мають однакові кути при вершинах. З подібності трикутників виходить, що:

$$\Delta V / MM_1 = V / R$$

де  $R$  - радіус кола.

Будемо зменшувати проміжок часу  $\Delta t$ , за який точка із положення  $M$  переходить у положення  $M_1$ . У цьому випадку довжина хорди  $MM_1$  буде наближатися до довжини дуги:  $MM_1 = V \Delta t$ . Гранично одержимо:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{MM_1} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t V} = \frac{a}{V}$$

Границя правої частини співвідношення дорівнює:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{V}{R} = \frac{V}{R}$$

Тоді

$$a / V = V / R,$$

або

$$a = V^2 / R.$$

Напрямок вектора прискорення перпендикулярний до хорди  $MM_1$ , а гранично (при  $\Delta t \rightarrow 0$ ) вектор прискорення спрямований до центра кола за нормаллю до траєкторії. Отже, у даному випадку дотичне прискорення дорівнює нулеві, тому модуль нормального прискорення дорівнює:

$$a = a_n = V^2 / R.$$

У даному випадку зміна швидкості відбувається тільки за напрямом. Отже, нормальне прискорення характеризує зміну тільки напрямку швидкості точки.

Якщо траєкторія точки не коло, а довільна крива лінія, то у формулі замість радіуса кола слід взяти  $\rho$  - радіус кривизни кривої у даній точці. Це можливо, так як можна замінити нескінченно малу другу кривої лінії поблизу даної точки відповідною дугою кола. З рис. 2.10 неважко знайти співвідношення між модулями дотичного, нормального і повного прискорення:

$$a_t = a \cos \alpha \quad \}.$$

Тоді модуль повного прискорення буде геометричною сумою дотичного і нормального прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n .$$

З урахуванням :

$$a_t^2 + a_n^2 = a^2 \cos^2 \alpha + a^2 \sin^2 \alpha = a^2$$

маємо

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} .$$

Якщо рух точки задається координатним способом, то проекції прискорення на осях координат зобразяться у вигляді перших похідних за часом від проекцій швидкості точки на ці осі:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}; \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}; \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2 z}{dt^2} .$$

Модуль прискорення в цьому випадку виразиться у вигляді:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Напрямок прискорення визначається з співвідношень

$$\cos(\vec{a}, x) = a_x / a; \quad \cos(\vec{a}, y) = a_y / a; \quad \cos(\vec{a}, z) = a_z / a .$$

При русі точки на площині або по прямій у формулі (2.21) відповідно один  $a_z$  або два члени  $a_y$  і  $a_z$  будуть дорівнювати нулю. Згідно з системою СІ прискорення виражається у метрах за секунду у квадраті (м/с<sup>2</sup>).

#### 4. Рівномірний рух.

Рух, при якому швидкість – постійна величина, яка характеризує рух точки за будь-який проміжок часу, називається **рівномірним**:  $V = V_0 = const$  .

Алгебраїчна величина швидкості (2.10)

$$V = V_0 = ds / dt .$$

У цій формулі, якщо перша похідна від криволінійної координати  $s$  за часом  $t$  додатна, то напрям швидкості співпадає з додатнім напрямом  $S$  .

Із співвідношення виходить, що  $ds = V dt$  . Інтегруючи праву і ліву частини цього виразу і враховуючи, що у початковий момент часу ( $t = 0$ ) точка знаходиться на відстані  $S_0$  від початку відліку, одержимо

$$\int_{S_0}^S ds = \int_0^t V dt = \int_0^t V_0 dt .$$

Так як значення швидкості постійне, то її можна винести за знак інтегралу, тоді одержимо закон криволінійного рівномірного руху  $S - S_0 = V_0 \int_0^t dt = V_0 t$  , або

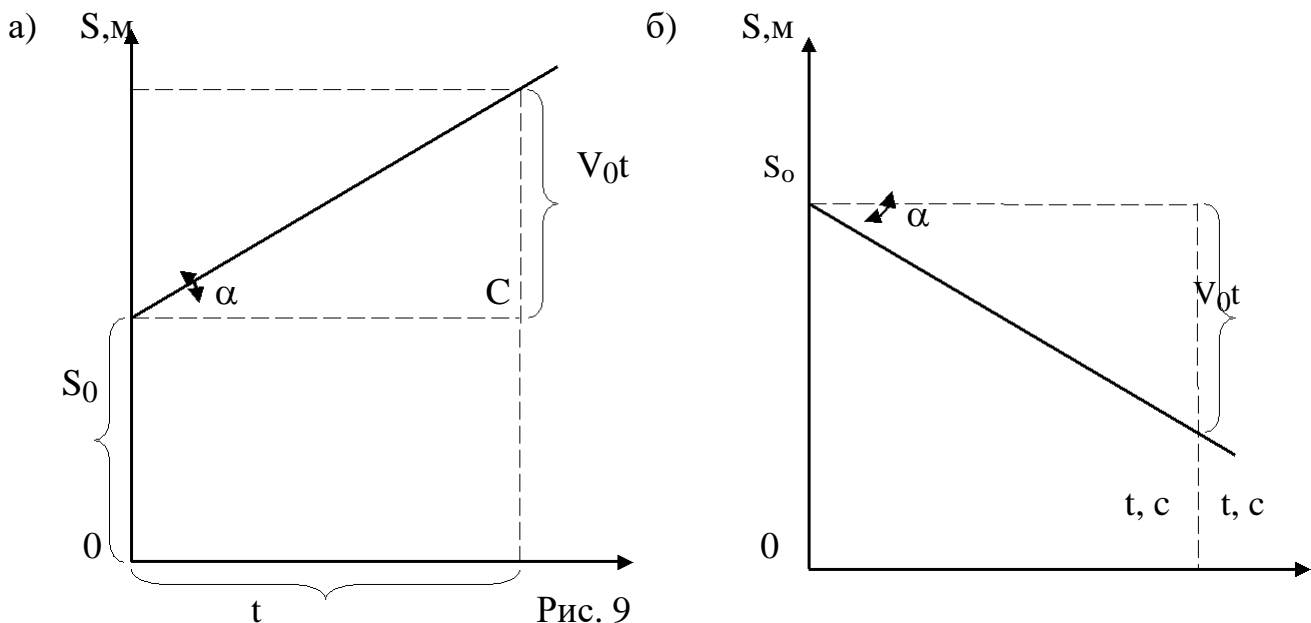
$$S = S_0 + V_0 t .$$

Припустимо, що у момент часу  $t_1$  рухома точка знаходилась у положенні  $M_1$ , а у момент  $t_2$  - у положенні  $M_2$ . Тоді відповідно до маємо:  $S = S_0 + V_0 t_1$ ,  $S_2 = S_0 + V_0 t_2$ , або  $S_2 - S_1 = V_0 (t_2 - t_1)$ , звідки швидкість виразиться формулою

$$V_0 = (S_2 - S_1) / (t_2 - t_1).$$

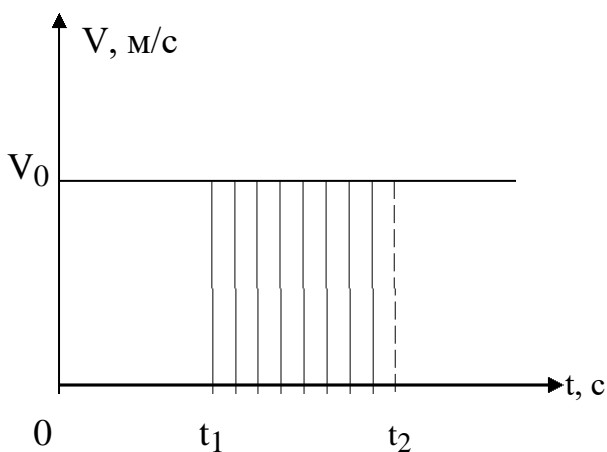
Таким чином, при рівномірному русі швидкість чисельно дорівнює довжині шляху, пройденого за одиницю часу.

Як вже відзначалося, при криволінійному рівномірному русі тангенціальне прискорення  $a_t$  дорівнює нулю. Якщо ж рух буде прямолінійним, то швидкість не буде змінюватися і за напрямом, тобто нормальне прискорення  $a_n = 0$ . Значить повне прискорення  $a$  буде також дорівнювати нулю. Прямолінійний рівномірний рух є єдиним рухом, при якому прискорення дорівнює нулю.



Графічно рівномірний рух зображується у вигляді похилої прямої лінії, яка зростає (рис.9, а), якщо значення швидкості додатне, або спадає, якщо значення швидкості від'ємне (рис. 9, б). Чим більша швидкість рівномірного руху, тим крутіший графік руху. Нахил графіка залежить, природно, від масштабів  $s$  і  $t$ . Якщо ці масштаби вибрати однаковими, то

$$V_0 = ds / dt = \operatorname{tg} \alpha = (s - s_0) / t.$$



За допомогою графіка руху легко знайти пройдений шлях і швидкість руху точки. Наприклад, з рис. 2.13, а видно, що за проміжок часу 4 с точка пройшла шлях, який дорівнює 3 метрам. Тангенс кута нахилу прямої можна

знайти з трикутника  $ABC$ :  $V_0 = \operatorname{tg} \alpha = BC / AC = (6 - 3) / 4 = 0,75 \text{ м/с}$ .

Аналогічно графіку руху можна побудувати графік швидкості. У цьому випадку по осі ординат будемо відкладати у відповідному масштабі швидкості точки, а на осі абсцис – час. Швидкість є похідною від криволінійної координати  $s$  за часом  $t$ , тому графіки руху і швидкості зв'язані між собою. Наприклад, для рівномірного руху графік швидкості буде пряма лінія, паралельна осі абсцис (рис. 10). І навпаки, з графіка швидкості можна визначити пройдений шлях. З формули виходить, що

$$S_2 - S_1 = V_0 (t_2 - t_1) = V_0 \Delta t .)$$

Але добуток швидкості на проміжок часу  $\Delta t$  дорівнює площі прямокутника, що заштрихований на графіку. Таким чином, при рівномірному русі шлях, пройдений за даний проміжок часу, чисельно дорівнює площі прямокутника, сторонами якого являються вісь абсцис, графік швидкості і дві вертикальні прямі, проведені з точок, які відповідають початку і кінцю розглядуваного проміжку часу.

## 5. Рівнозмінний рух.

**Рівнозмінним** рухом називається такий рух, при якому модуль дотичного прискорення зостається увесь час постійно величиною. Якщо при цьому модуль миттєвої швидкості рухомої точки зростає, то рух називається рівноприскореним, якщо модуль миттєвої швидкості зменшується, то рух називається рівносповільненим. Зміна модуля дотичної швидкості характеризується дотичним прискоренням, тому рух буде рівноприскореним, якщо постійне дотичне прискорення і швидкість мають однакові знаки, і рівносповільненим, якщо вони різні. У першому випадку кут  $\alpha$  між векторами прискорення  $\vec{a}$  і швидкості  $\vec{v}$  буде гострим (рис. 11, а), а у другому – тупим (рис. 11, б)



Рис. 11

Припустимо, що при рівнозмінному русі швидкість у початковий момент часу дорівнює  $V_0$ , а з плином часу  $t$  швидкість стала рівною  $V$ . У зв'язку з тим, що прискорення є постійною величиною для всіх проміжків часу,

миттєве дотичне прискорення і середнє дотичне прискорення будуть рівними. Тоді прискорення  $a_t$  можна знайти за формулою

$$a_t = dV / dt = \Delta V / \Delta t = (V - V_0) / t .$$

Звідси знаходимо рівняння швидкості

$$V = V_0 + a_t \cdot t .$$

Одержаний вираз підставляємо у формулу:

$$\int_0^s ds = \int_0^t (V_0 + a_t t) dt .$$

Після інтегрування, ураховуючи, що  $V_0 = const$  і  $a_t = const$ , одержимо

$$S = S_0 + V_0 t + a_t t^2 / 2 .$$

При прямолінійному рухові нормальне прискорення дорівнює нулю, тобто  $a = a_t$ , тому

$$S = S_0 + V_0 t + at^2 / 2 .$$

Прикладом рівномірного змінного руху точки може бути рух тіла по вертикалі під дією сили тяжіння. З фізики відомо, що під дією постійної сили тіло одержує постійне прискорення. Якщо знехтувати опором повітря і зміною сили тяжіння у залежності від висоти тіла, то можна вважати, що прискорення вільно падаючого або кинутого вертикально вверх тіла  $g$  постійне.

Прискорення ще змінюється із зміною географічної широти і висоти місця над рівнем моря, але зміна ця незначна (на широті  $45^\circ$   $g = 980,665 \text{ см/с}^2$ ), і тому нею нехтують, приймаючи завжди  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Приймаючи у формулах  $s = h$  і  $a_t = g$ , одержуємо формули для руху тіла по вертикалі під дією сили тяжіння:

$$\begin{aligned} V &= V_0 \pm gt \\ h &= V_0 t \pm g t^2 / 2 . \end{aligned}$$

У цих формулах перед прискоренням  $g$  треба брати знак плюс у випадку

вільного падіння тіла (рівномірно прискорений рух) і знак мінус для руху тіла, кинутого вертикально вверх (рівномірно сповільнений рух).

У випадку, якщо тіло починає падати без початкової швидкості, то  $V_0 = 0$  і попередні формули набувають вигляду

$$V = gt, h = gt^2 / 2 .$$

Виключаючи з цих формул час  $t$ , маємо

$$t = V / g \text{ і } h = g V^2 / (2g^2) = V^2 / (2g) .$$

Звідси одержуємо відому формулу Галілея

$$V = \sqrt{2gh},$$

де  $V$  - швидкість тіла при падінні його без початкової швидкості з висоти  $h$ .

Так як формули виведені з умови руху тіла у пустоті (при відсутності опору повітря), то у реальних умовах ними можна користуватися тоді, коли вага тіла набагато перевищує опір повітря і ним можна знехтувати, а висота  $h$  невелика.