МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Теоретична механіка та опір матеріалів»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
Технічне обслуговування та ремонт повітряних суден і авіадвигунів

за темою – Динамічна дія навантажень

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.

Рецензенти:
1. *Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
2. *Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

План лекції:

1. Загальні поняття.
2. Визначення напружень при рівноприскореному русі.
3. Напруження і переміщення при ударі.
4. Вільні коливання системи з одним ступенем вільності.

Рекомендована література:

Основна

1. Павловський М. А. Теоретична механіка: Підручник.- К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Федуліна А. І. Теоретична механіка: Навч. посіб.- К.: Вища шк., 2005. – 319 с.
3. Теоретична механіка: Збірник задач / О. С. Апостолюк, В. М. Воробйов, Д.І. Ільчишинв та ін.; За ред. М. А. Павловського. - К.: Техніка, 2007. – 400 с.
4. Цасюк В. В. Теоретична механіка: Підручник.- Львів: Афіша, 2003. – 402 с.
5. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник. – Кременчук: КЛК НАУ, 2009. – 88с.
6. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: "Новий світ – 2000", 2006. – 364 с.
7. Писаренко Г.С. та ін. Опір матералів Підручкик/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк., 1993. – 655 с.
8. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія 2006, 2007. – 170 с.

Додаткова

9. Токар А. М. Теоретична механіка. Кінематика. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2001. – 339 с.
10. Токар А. М. Теоретична механіка. Динаміка. Методи і задачі: Навч. посіб.- К.: Либідь, 2006. – 314 с.
11. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
12. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зіньковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
13. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. ІІ, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Текст лекції

1. Загальні поняття.

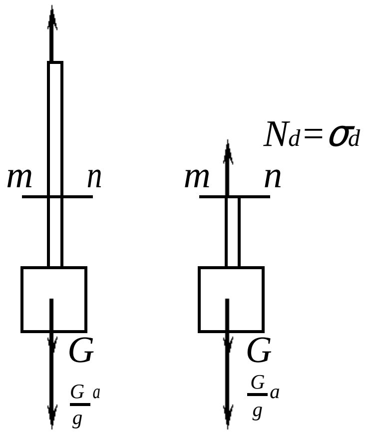

Рис. 10.1.

Дотепермирозглядалистатичнудію навантажень, основною ознакою якої є відсутність прискорень у навантаженому тілі. Це бува тоді, коли навантаження зростає повільно і безперервно від нуля до свого кінцевого значення і потім не змінюється. Швидкість зростання деформації у тілі невелика, прискорення незначні і ними можна нехтувати. При статичному навантаженні тіла зовнішні сили зрівноважуються реакціями в'язів та внутрішніми силами. Коли ж при навантаженні тіла виникають такі прискорення, якими нехтувати не можливо, навантаження називається динамічним.

Як нам відомо з теоретичної механіки, розв'язання задач динаміки у багатьох випадках на підставі принципу Даламбера можна звести до розв'язання відповідних задач статики. Цей метод називається кінетостатикою. Метод полягає в тому, що задача про рух тіла під дією прикладених до нього сил зводиться до задачі про його рівновагу під дією тих самих сил з приєднанням до них сил інерції. Отже, дінамічний розрахунок визначення динамічних реакцій зводиться формально до розрахунку на статичне навантаження.

Якщо прискорення і деформації тіла змінюються за часом, то виникають коливання пружних систем. За певних умов при коливаннях може виникнути явище резонансу, що супроводжується різким зростанням амплітуди коливань і напружень у тілі.

Окремий випадок динамічних навантажень – це так звані ударні навантаження, при яких за короткий проміжок часу виникають дуже великі прискорення.

2. **Визначення напружень при рівноприскореному русі.**

У багатьох випадках прискорення, з якими рухаються елементи конструкцій, відомі. Динамічні напруження в цих випадках обчислюються без утруднень. Розглянемо деякі приклади.

Приклад 10.1. Вантаж вагою G піднімається уверх з прискоренням *a* (рис.10.1). Визначити напруження в канаті, нехтуючи його вагою.

Розв'язання. Прикладаємо до вантажу силу інерції, яка дорівнює m a =Ga/g і напрямлена униз. Застосовуємо метод перерізів. Робимо переріз m-n і відкидаємо верхню частину каната. Зусилля у канаті позначимо N_d (індекс d від dinamie (англ.)-динамічний). Так як напруження при центральному ростязі рівномірно розподілені по перерізу, то можемо прийняти, що $N_d=\sigma_d A$, де σ_d - динамічне напруження, яке ми визначаємо; A – площа поперечного перерізу каната.

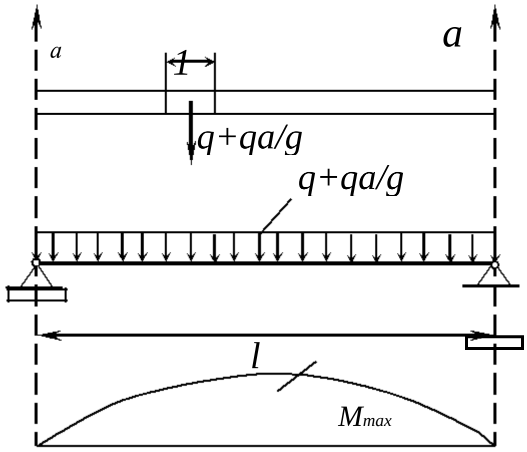

Рис.10.2

Проектуючи усі сили, в тому числі і сили інерції, на вертикальну вісь, одержуємо

$$\sigma_d A - G - G\frac{a}{g} = 0,$$

звідки

$$\sigma_d = \frac{G}{A}\left(1+\frac{a}{g}\right) = \sigma_{st} K_d,$$

де $\sigma_{st}=G/A$ - напруження при статичній дії вантажу (індекс st від statical (англ.)-статичний); $K_d=1+a/g$ - динамічний коефіцієнт.

Таким чином, динамічні напруження у багатьох випадках можуть бути виражені через статичні напруження і динамічний коефіцієнт. Це особливо зручно, так як динамічний коефіцієнт часто приходиться визначати дослідним шляхом.

<u>Приклад</u> <u>10.2</u>. Стержень, вага 1м довжини якого дорівнює q, піднімають за допомогою двох вірьовок, прив’язаних до його кінців (рис.10.2). Рух поступальний з прискоренням *a*. Визначити напруження у стержні.

<u>Розв’язання.</u> Прикладаємо до кожного елемента стержня довжиною, рівній одиниці, силу інерції qa/g. Бачимо, що ця задача еквівалентна задачі про просту балку, навантажену рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q+qa/g$.

Найбільший згинальний момент буде у перерізі посередині балки:

$$M_d = \frac{\left(q+q\frac{a}{g}\right)l^2}{8} = \frac{ql^2}{8}\left(1+\frac{a}{g}\right) = M_{st}K_d,$$

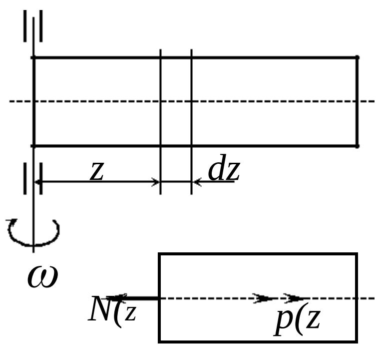

Рис. 10.3

де $M_{st}=ql^2/8$ - згинальний момент від статичного рівномірного розподіленого наванта- женя інтенсивністю q; $K_d=1+a/g$ - динамічний коефіцієнт.

Найбільше динамічне напруження визначається за звичайною формулою згину:

$$\sigma_d = \frac{M_d}{W_x} = \sigma_{st}K_d.$$

<u>Приклад</u> <u>10.3</u>. Стержень зі сталою кутового швидкістю ω обертається навколо осі, перпендикулярної до осі стержня (рис.10.3). Визначити найбільші динамічні напруження.

<u>Розв’язання</u>. При обертовому русі зі сталою кутового швидкістю точки стержня зазнаватимуть лише доцентрового прискорення $a_n=\omega^2 z$, де z - відстань від осі обертання до даної точки. Інтенсивність рівномірно розподілених сил інерції p(z) (відцентрових сил) дорівнюватиме:

$$p(z)=\overline{m}a_n=A\rho\omega^2 z,$$

де $\overline{m}=A\rho$ - маса одиниці довжини стержня; A - площа поперечного перерізу стержня; ρ - густина матеріалу стержня.

Поздовжню силу N(z) від дії сил інерції знаходимо з умови рівноваги сил (рис.10.4,б)

$$N(z)=\int_z^l A\rho\omega^2 z dz = A\rho\omega^2\int_z^l zdz = \frac{1}{2}A\rho\omega^2\left(l^2-z^2\right).$$

Як видно з одержаного вище виразу, величина поздовжньої сили змінюється за параболічним законом і досягає максимального значення на осі обертання при z=0, тобто

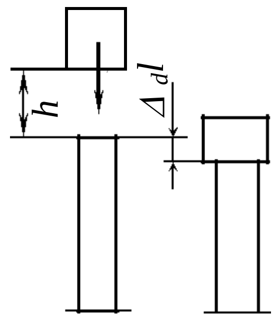

Рис. 10.4.

$$N_{max}=N(z=0)=\frac{1}{2}A\rho\omega^2 l^2.$$

У цьому ж перерізі виникає максимальне напруження від дії сил інерції:

$$\sigma_{max}=\frac{N_{max}}{A}=\frac{1}{2}\rho\omega^2 l^2.$$

3. Напруження і переміщення при ударі.

Ударним називається навантаження, яке передається на тіло протягом дуже малого проміжку часу і викликає значні прискорення в тілі, що зазнає удару. При співударі двох тіл виникають в області їх контакту місцеві деформації і напруження. Крім того, в результаті удару деформації швидко поширюються по всьому тілу, що зазнало удару, і викликають його коливання.

Ми будемо розглядати лише дію ударного навантаження на стержньові елементи конструкції, при яких місцеві деформації здебільшого не мають істотного значення і для оцінки ефекту удару досить розглянути напруження і переміщення, пов'язані з деформаціями всієї конструкції. В основу розв'язання цієї задачі покладені такі припущення:

1) тіло, що ударяє, рухається разом із стержнем, що зазнає удару до найбільших деформацій останнього (так званий напружений удар);

2) деформації, що виникають при ударі, поширюються на увесь стержень, причому сили і відповідні переміщення пов'язані пропорціональною залежністю Гука;

3)сума кінетичної і потенціальної енергії системи тіло-стержень залишається при ударі сталою. Енергією, затраченою на місцеві деформації, можна нехтувати.

Залежно від способу прикладання навантаження до стержня розрізняють поздовжній, поперечний і крутильний удари.

Розглянемо поздовжній удар. Нехай вантаж F з масою m падає з висоти h на нерухомий стержень (рис. 10.4). Робота, що виконується вагою падаючого вантажу,

$$W = F\left(h + \Delta l_d\right),$$

де Δl_d - переміщення в точці удару, яке дорівнює його скороченню від удару. Потенціальна енергія деформації при стиску

$$U = \frac{EA\Delta l_d^2}{2l}.$$

Порівняємо роботу падаючого вантажу з потенціальною енергією деформації стержня

$$F\left(h + \Delta l_d\right) = \frac{EA\Delta l_d^2}{2l},$$

або

$$EA\Delta l_d^2 - 2Fl\Delta l_d - 2Flh = 0$$

Поділивши обидві частини рівняння на EA, одержимо

$$\Delta l_d^2 - \frac{Fl}{EA}\Delta l_d - \frac{Fl}{EA}2h = 0.$$

Але $Fl/EA = \Delta l_{st}$ - укорочення стержня від статично прикладеної сили F. Тоді

$$\Delta l_d^2 - 2\Delta l_{st}\Delta l_d - 2l\Delta_{st} = 0$$

Розв'язавши це квадратне рівняння відносно Δl_d, одержуємо

$$\Delta l_d^2 = \Delta l_{st} \pm \sqrt{\Delta l_{st}^2 + 2h\Delta l_{st}}.$$

Зоставляючи знак "плюс" (рішення зі знаком "мінус" перед радикалом суперечить фізичному сенсу задачі), одержуємо остаточно

$$\Delta l_d = \Delta l_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}\right) = \Delta l_{st} K_d, \qquad (10.1)$$

де $K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{\Delta l_{st}}}$ - динамічний коефіцієнт при ударі.

Лінійна залежність між напруженням і деформацією дозволяє записати

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d. \qquad (10.2)$$

З одержаних формул видно, що динамічні напруження і переміщення залежать від статичної деформації тіла, що зазнає удару. Чим більше статичні деформації (при інших рівних умовах), тим менші динамічні напруження. Ось чому для пом'якшення удару використовують підкладки (гумові, пружинні), які дають великі деформації.

При стискуючому ударі для запобігання поздовжнього згину динамічні напруження не повинні перевершувати критичних напружень.

Аналогічний вигляд мають формули і на випадок поперечного (згинального) удару, тільки в цьому випадку замість Δl_{st} слід приймати статичний прогин в місці удару y_{st}, а замість Δl_d динамічний прогин - y_d. покажемо це на прикладі.

Приклад 10.4. На стальну двотаврову балку N27a прольотом 3м надає посередині прольоту вантаж F=1кН з висоти h=0,1м. Визначити найбільший прогин балки і максимальне напруження у її поперечному перерізі (рис.10.5,а).

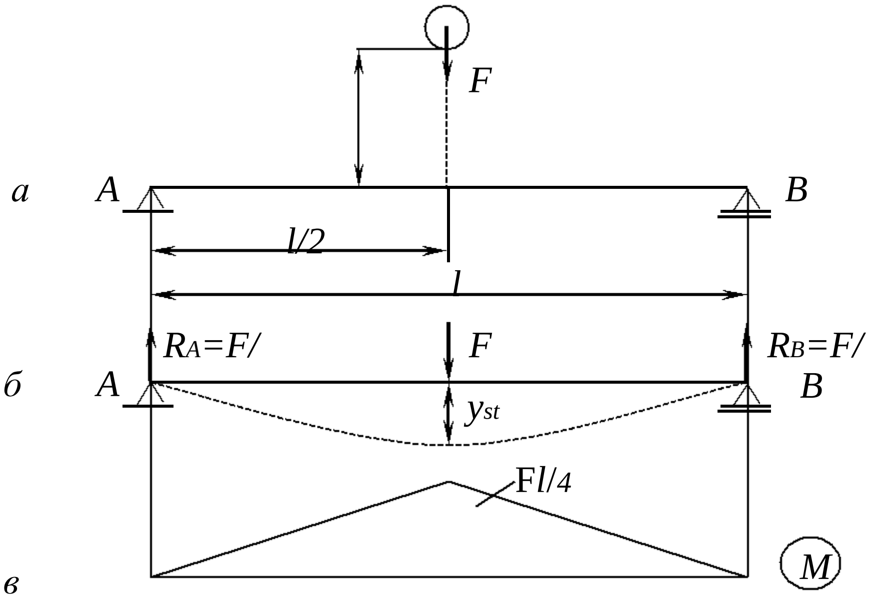

Рис. 10.5

Розв'язання. З ГОСТ8239-72 для двотавра N27a маємо: I_X=5500см^4, W_X=407см^3. Модуль поздовжньої пружності для такого класу сталей можна прийняти E=2·10^{5}МПа.

Використовуючи метод початкових параметрів, знаходимо статичний прогин балки під вантажем, тобто по середині балки (рис.10.5,б):

$$y_{st} = \frac{Fl^3}{48EI_x} = \frac{1\cdot 10^3\cdot\left(3\cdot 10^3\right)^3}{48\cdot 2\cdot 10^5\, 5500\cdot 10^4} = 0{,}048\,мм\,.$$

Динамічний коефіцієнт

$$K_d = 1+\sqrt{1+\frac{2h}{y_{st}}} = 1+\sqrt{1+\frac{2\cdot 100}{0{,}048}} = 64.$$

Будуємо епюру статичних згинальних моментів (рис.10.5,в), з якої видно, що найбільшим згинальним моментом буде момент M_{max}=Fl/y=1000·3000/4=7,5·10^{5}Нмм. Найбільше статичне напруження

$$\sigma_{st} = \frac{M_{max}}{W_x} = \frac{7{,}5\cdot 10^5}{407\cdot 10^3} = 1{,}86\,МПа\,.$$

Найбільше динамічне напруження буде дорівнювати

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d = 1{,}86\cdot 64 = 119\ МПа\,.$$

З цього прикладу видно, наскільки небезпечними за своєю дією являються динамічні навантаження. До цього ще й додається те, що допустимі напруження при ударі приймаються меншими, ніж при дії статичних навантажень.

4. Вільні коливання системи з одним ступенем вільності.

Як було вже відмічено, характерною ознакою динамічних навантажень є виникнення коливань конструкції і їх елементів.

При коливаннях внаслідок наявності прискорень виникають сили інерції, які можуть у багато разів перевищувати зусилля, що виникають в елементах конструкцій від дії статичних навантажень. Тому динамічні навантаження значно небезпечніші за статичні.

Розглянемо найпростішу задачу теорії коливань – задачу про вільні (або власні) коливання тіл, маса яких зосереджена в одній точці (рис.10.6). Масою стержня (або пружини) нехтуємо, вважаючи її малою порівняно з масою вантажу, що коливається.

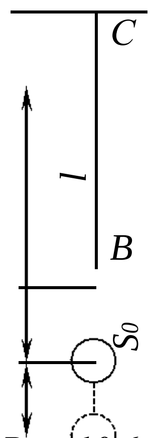

Рис. 10.6.

У цьому випадку положення тіла, що коливається, повністю визначається одним параметром – переміщенням S тіла відносно положення статичної рівноваги.

У цьому і аналогічних випадках говорять, що система має одну ступінь вільності.

Щоб змусити тіло коливатися навколо положення рівноваги, подовжимо стержень ВС на будь яку величину S_0 і зоставимо його само по собі. Воно почне здійснювати коливальні рухи у вертикальному напрямку.

Такі коливання, які здійснює система, звільнена від зовнішніх силових впливів і надана самій собі, називаються вільними (або власними).

Власні коливання відбуваються до тих пір, поки надана на початку коливального процесу енергія не буде повністю витрачена на роботу проти сил тертя з повітрям і сил внутрішнього тертя в матеріалі.

Коливання називаються вимушеними, якщо вони відбуваються під дією змінних зовнішніх сил,які називаються змушуючими силами.

При складанні рівнянь руху керуються відомим нам принципом Даламбера.

Позначимо відхилення тіла від положення рівноваги через S. На тіло при коливаннях будуть діяти такі сили:

1) реакція з боку стержня CB, яка згідно з законом Гука (де S=Δl) дорівнює

$$N = \frac{EAS}{l} = \frac{S}{S_{II}}, \qquad (10.2)$$

де S_{II} - переміщення від сили рівної одиниці, прикладеної в точці кріплення маси, $S_{II}=l/(EA)$;

2) сила інерції, яка дорівнює добутку маси на прискорення:

$$F_i = \frac{md^2S}{dt^2}. \qquad (10.3)$$

Сума цих сил повинна дорівнювати нулеві:

$$\frac{md^2S}{dt^2} + \frac{S}{S_{II}} = 0, \qquad (10.4)$$

або

$$\frac{d^2S}{dt^2} + \omega^2 S = 0, \qquad (10.5)$$

де

$$\omega = \sqrt{1/(mS_{П})} \qquad (10.6)$$

кутова частота коливань (число коливань за 2π секунд).

Рівняння (10.5) є диференціальне рівняння другого порядку, однорідне, лінійне, зі сталими коефіцієнтами. Загальний інтеграл цього рівняння має вигляд

$$S = B_1 \cos\omega t + B_2 \sin \omega t\,, \qquad (10.7)$$

або

$$S = P \sin(\omega t + \varphi), \qquad (10.8)$$

де B_1, B_2 і P, φ - довільні сталі величини.

Рівняння (10.8) є рівняння гармонічного коливання. У цьому рівнянні величина P являє собою найбільше відхилення (амплітуду) коливальної маси від положення рівноваги, так як найбільше значення sin(ωt+φ) дорівнює одиниці. Аргумент ωt+φ називається фазою коливань, а величина φ − початковою фазою коливання, тобто значення фази при t=0.

Швидкість рухомої маси

$$V = \frac{ds}{dt} = P\omega \cos(\omega t + \varphi). \qquad (10.9)$$

Амплітуда A і початкова фаза φ визначаються за початковими умовами руху. Якщо у початковий момент при t=0 зміщення маси було $S=S_0$, а $V=V_0$, то із попередніх рівнянь одержимо:

$$S_0 = P \sin\varphi\,; \; V_0 = B\omega\cos\varphi\,.$$

Звідси знаходимо

$$P = \sqrt{S_0^2 + \frac{V_0^2}{\omega^2}}\,;\; tg\varphi = \frac{\omega S_0}{V_0}, \text{ тобто } \quad \varphi = arctg\,\frac{\omega S_0}{V_0}. \qquad (10.10)$$

Графік коливань (10.8) представлений на рис.10.7. Знайдемо повний період коливань T, тобто той проміжок часу, за який коливальна маса повернеться у початкове положення. Так як період синуса та косинуса дорівнює 2π, то після закінчення часу T фаза коливань зросте на 2π, тобто на підставі формули (10.8) маємо

$$\omega(t+T)+\varphi - (\omega t + \varphi) = 2\pi\,,$$

звідси

$$T = \frac{2\pi}{\omega}\,, \qquad (10.11)$$

або, підставляючи значення ω із формули (10.6), одержимо

$$T = 2\pi\sqrt{mS_{П}}\,. \qquad (10.12)$$

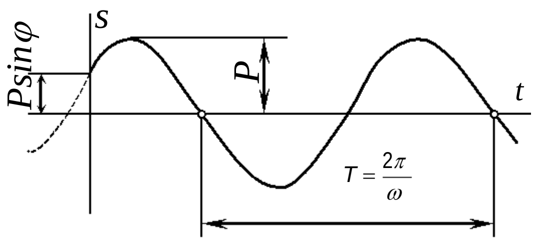

Рис. 10.7

Так як в цю формулу не входять S_0 і V_0, то період коливання не залежить від початкових умов руху.

З попередньої формули маємо також

$$\omega = 2\pi/T = \sqrt{1/(mS_{II})}, \qquad (10.13)$$

тобто колова частота коливань визначає число повних коливань, які робить маса за час 2π секунд.

Маючи на увазі, що $S_{II} = l/(EA)$, одержуємо

$$\omega = \sqrt{EA/(ml)},$$

тобто частота коливань тим більша, чим більша жорсткість стержня (пружини), і зменшується із збільшенням довжини стержня і коливальної маси.

Одержані формули справедливі і на випадок поперечних згинальних коливань стержня за умови, що у цьому випадку S_{II} буде визначатися як прогин від одиничної сили, прикладеної у точці закріплення коливальної маси.

Колова частота коливань ω зв'язана з частотою коливань f, яка виражає кількість коливань за 1 секунду, залежністю, що випливає з формули (10.11)

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (10.14)$$