

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних
та фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни

«Фізика»

обов'язкових компонент

освітньо-професійної програми першого(бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт
(Технології робіт та технологічне обладнання аеропортів)**

за темою № 4 – Коливання і хвилі

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1.

Розробник: викладач циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Волканін Є.Є.

Рецензенти:

1. Інженер з технічного обслуговування, ремонту та діагностики авіаційної техніки ТОВ «ЕЙР ТАУРУС» Калінін О.В.
2. Професор циклової комісії авіаційного і радіоелектронного обладнання, к.т.н., спеціаліст вищої категорії Гаврилюк Ю.М.

План лекції:

1. Гармонічні коливання і їх характеристики.
2. Механічні гармонічні коливання.
3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники.
4. Вільні гармонічні коливання в коливальному контурі.
5. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакових частот. Биття.
6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу.
7. Диференціальне рівняння вільних згасаючих коливань і його розв'язування.
8. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс.
9. Змінний струм.
10. Резонанс напруг.

Рекомендована література:

Основна література:

1. Фізика: Підручник / В.В. Бойко, Г.І. Булах, Я.О. Гуменюк, П.П. Ільїн. – К.: Видавництво Ліра-К, 2016. – 468 с.
2. Дмитрієва В. Ф. Фізика : навчальний посібник / В. Ф. Дмитрієва. – К.: Техніка, 2008. – 608 с.
3. Курс фізики модульно-рейтингова система навчання: підруч. Для студ. Вищ. Техн. Навч. Закл./ Андріяшик М.В., Вербицький Б.І., Король А.М. – К.: НВЦ «Фламенко», 2008. – 530 с.

Допоміжна література:

1. Фізика. Задачі з розв'язаннями: Навч. посібник І. П. Гаркуша, З. П. Мокляк, Ю. О. Буслов – Дніпропетровськ; Національна гірнича академія України, 2003.
2. Волков О. Ф. Курс фізики ; у 2-х т. – Т.1: Фізичні основи механіки. Молекулярна фізика і термодинаміка. Електростатика. Постійний струм. Електромагнетизм : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів / О. Ф. Волков, Т. П. Лумпієва. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – 224 с.
3. Волков О. Ф. Курс фізики ; у 2-х т. – Т.2: Коливання і хвилі. Хвильова і квантова оптика. Елементи квантової механіки. Основи фізики твердого тіла. Елементи фізики атомного ядра : навчальний посібник для студентів інженерно-технічних спеціальностей вищих навчальних закладів / О. Ф. Волков, Т. П. Лумпієва. – Донецьк: ДонНТУ, 2009. – 208 с.

Інформаційні ресурси в Інтернеті:

1. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=272&chapterid=11f>
2. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=296>
3. <http://physics.zfftt.kpi.ua/mod/book/view.php?id=297>

4. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=299>
5. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=301>
6. <http://physics.zfft.kpi.ua/mod/book/view.php?id=302>

Текст лекції

1. Гармонічні коливання і їх характеристики

Коливаннями називаються рухи або процеси, які характеризуються певною повторюваністю в часі. Коливальні процеси широко поширені в природі й техніці, наприклад, коливання маятника годинника, змінний електричний струм і т. д. При коливальному русі маятника змінюється координата його центра мас, а у випадку змінного струму – коливаються напруга й струм у колі. Фізична природа коливань може бути різною, тому розрізняють коливання механічні, електромагнітні й ін. Однак різні коливальні процеси описуються однаковими характеристиками й однаковими рівняннями. Звідси випливає доцільність єдиного підходу до вивчення коливань різної фізичної природи.

Коливання будуть вільними (або власними), якщо вони відбуваються за рахунок деякої енергії, переданої коливальній системі в початковий момент часу, при відсутності в наступні моменти часу будь-яких зовнішніх впливів на цю систему. Найпростішими коливаннями є гармонічні коливання, при яких коливна величина змінюється з часом за законом косинуса або синуса. Вивчення гармонічних коливань важливе з двох причин:

1) коливання, які зустрічаються у природі й техніці, при певних наближеннях є гармонічними;

2) різні періодичні процеси (процеси, які повторюються через рівні проміжки часу), можна подавати як суперпозицію гармонічних коливань.

Гармонічні коливання деякої фізичної величини x описуються таким рівнянням

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (1)$$

де A – максимальне значення коливної величини x , яке називається *амплітудою коливань*;

ω_0 – колова, або циклічна частота;

φ – початкова фаза коливань для моменту часу $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань для довільного моменту часу t .

Оскільки косинус змінюється в межах від $+1$ до -1 , то x може набувати значень від $+A$ до $-A$.

Певні стани системи в процесі гармонічних коливань повторюються через однаковий проміжок часу T , який називається *періодом коливань*. За цей час фаза коливання зростає на 2π , тобто

$$\omega_0(t + T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi,$$

звідки

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (2)$$

Величина, обернена до періоду коливань

$$\nu = \frac{1}{T}, \quad (3)$$

виконана коливною системою за одиницю часу, називається *частотою коливань*. Прирівнюючи (2) і (3), одержимо

$$\omega_0 = 2\pi\nu.$$

Одиницею частоти є герц (Гц), це частота такого періодичного процесу, при якому за 1 с відбувається одне повне коливання.

Запишемо першу й другу похідні фізичної величини x гармонічного коливання, тобто визначимо швидкість і прискорення коливання:

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}); \quad (4)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi), \quad (5)$$

тобто маємо гармонічні коливання тієї ж циклічної частоти. Амплітуди величин (4) і (5) відповідно дорівнюють $A\omega_0$ і $A\omega_0^2$. Фаза швидкості (4) відрізняється від фази фізичної величини (1) на $\pi/2$, а фаза прискорення (5) відрізняється від фази фізичної величини (1) на π .

Отже, у моменти часу, коли $x = 0$, $\frac{dx}{dt}$ має найбільші значення; коли ж x досягає максимальних від'ємних значень то в ці моменти часу $\frac{d^2x}{dt^2}$ будуть мати найбільші додатні значення (рис. 1).

З рівняння (5) одержуємо диференціальне рівняння гармонічних коливань (де враховано, що $x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$),

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (6)$$

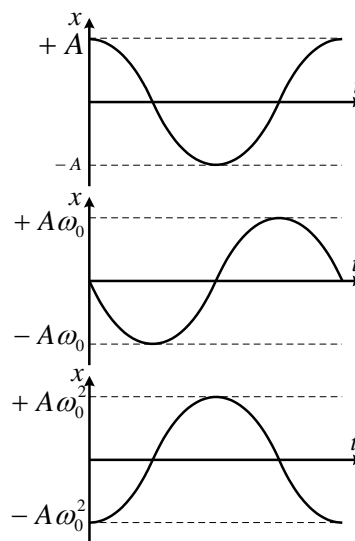


Рис. 1

Таким чином, розв'язком диференціального рівняння (6) є вираз (1).

Гармонічні коливання можна зобразити графічно за допомогою методу обертання вектора амплітуди або методу векторних діаграм. Для цього з довільної точки O , взятої на осі x , під кутом φ , який дорівнює початковій фазі коливання, відкладається вектор \vec{A} , модуль якого дорівнює амплітуді A гармонічного коливання (рис. 2).

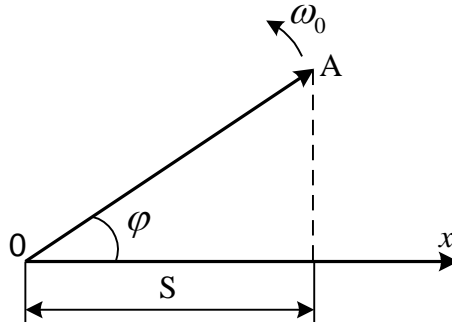


Рис. 2

Якщо цей вектор привести до обертання з кутовою швидкістю ω_0 то проекція кінця вектора буде переміщуватися по осі x і набувати значень від $-A$ до $+A$, а коливна величина буде змінюватися з часом за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. У фізиці часто застосовується інший метод, який відрізняється від методу обертання вектора амплітуди лише за формою. У цьому методі коливну величину подають комплексним числом відповідно до формули Ейлера для комплексних чисел

$$e^{ix} = \cos \alpha + i \sin \alpha, \quad (7)$$

де $i = \sqrt{-1}$ – уявна одиниця. Тому рівняння гармонічного коливання (1) можна записати також в експонентній формі так:

$$x = A e^{i(\omega_0 t + \varphi)}. \quad (8)$$

Права частина рівняння (8) є рівнянням гармонічних коливань.

2. Механічні гармонічні коливання

Нехай матеріальна точка виконує прямолінійні гармонічні коливання уздовж осі координат x біля положення рівноваги, прийнятого за початок координат. Тоді залежність координати x від часу t задається рівнянням (1),

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (9)$$

Відповідно до виразів (4) і (5) швидкість v і прискорення a коливної точки будуть дорівнювати:

$$v = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2});$$

$$a = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (10)$$

Сила $F = ma$, що діє на коливну матеріальну точку масою m , у відповідності з рівнянням (1) дорівнює

$$F = -m\omega_0^2 x.$$

Отже, сила, яка діє на матеріальну точку при гармонічних коливаннях, пропорційна зміщенню матеріальної точки від положення рівноваги і спрямована в протилежну сторону.

Кінетична енергія матеріальної точки, яка здійснює прямолінійні гармонічні коливання, дорівнює

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (11)$$

або

$$K = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 - \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (12)$$

Потенціальна енергія матеріальної точки, яка здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили F , дорівнює

$$\Pi = -\int_0^x F dx = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (13)$$

або

$$\Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} [1 + \cos 2(\omega_0 t + \varphi)]. \quad (14)$$

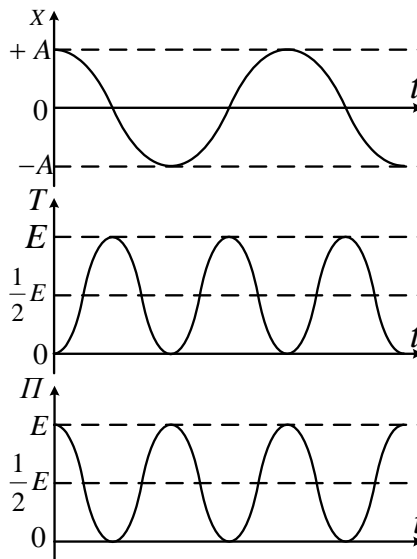


Рис. 3

Додавши (13) і (14), одержимо формулу для повної енергії гармонічного коливання:

$$E = K + \Pi = \frac{mA^2\omega_0^2}{2}. \quad (15)$$

З формул (12) і (14) видно, що K і Π змінюються в часі з частотою, яка у два рази перевищує частоту гармонічного коливання. На рис. 3 показані графіки залежності x , K і Π від часу.

Оскільки середні значення $\langle \sin^2 \alpha \rangle = \langle \cos^2 \alpha \rangle = \frac{1}{2}$, то з формул (11), (13) і (15) випливає, що

$$\langle K \rangle = \langle \Pi \rangle = \frac{1}{2} E.$$

3. Гармонічний осцилятор. Пружинний, фізичний і математичний маятники

Гармонічним осцилятором називається система, яка описується диференціальним рівнянням вигляду (6):

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0. \quad (16)$$

Коливання гармонічного осцилятора є важливим прикладом періодичного руху і служать точною або наближеною моделлю в багатьох задачах класичної і квантової фізики. Прикладами гармонічного осцилятора є пружинний, фізичний і математичний маятники, коливальний контур (для струмів і напруг настільки малих, щоб елементи контуру можна було вважати лінійними).

Пружинний маятник. Пружинний маятник – невеличке тіло масою m , яке підвішене до абсолютно пружної пружини і здійснює гармонічні коливання під дією пружної сили $F = -kx$, де k - коефіцієнт пружності, у випадку пружини, названий жорсткістю (рис. 4).

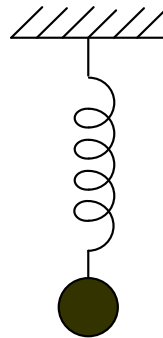


Рис.4

Диференціальне рівняння коливання маятника буде мати вигляд

$$m\ddot{x} = -kx,$$

або

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (17)$$

З виразів (16) і (1) випливає, що пружинний маятник виконує гармонічні коливання за законом $x = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ з циклічною частотою $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ і періодом $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$.

Формула (17) справедлива для пружних коливань у межах, для яких виконується закон Гука, тобто коли маса пружини мала в порівнянні з масою тіла.

В цьому випадку потенціальна енергія пружинного маятника, згідно з (13) дорівнює

$$П = \frac{kx^2}{2}. \quad (18)$$

Фізичний маятник. Фізичний маятник – тверде тіло, яке під дією сили тяжіння виконує гармонічні коливання відносно нерухомої горизонтальної осі, що проходить через точку підвішування і яка не збігається з центром мас C тіла (рис. 5).

Якщо маятник відхилений від положення рівноваги на деякий кут α , то відповідно до основного рівняння динаміки обертального руху твердого тіла момент M сили F_τ , яка повертає маятник до положення рівноваги буде дорівнювати

$$M = J\varepsilon = J\ddot{\alpha} = F_\tau l = -mgl \sin \alpha \approx -mgl \alpha, \quad (19)$$

де J – момент інерції маятника відносно осі, яка проходить через точку O ;

l – відстань між точкою підвішування і центром мас маятника;

$F_\tau = -mg \sin \alpha \approx -mg \alpha$ – сила, яка повертає маятник у попереднє положення, (знак мінус обумовлений тим, що зростання F_τ і швидкості v завжди протилежні;

$\sin \alpha \approx \alpha$ – відповідає малим коливанням маятника, тобто малим відхиленням маятника від положення рівноваги.

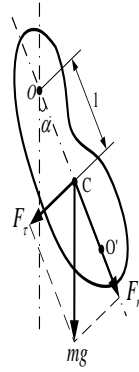


Рис. 5

Рівняння (19) можна записати у вигляді

$$J\ddot{\alpha} + mgl\alpha = 0,$$

або

$$\ddot{\alpha} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0.$$

Приймаючи, що $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ одержимо рівняння $\ddot{\alpha} + \omega_0^2\alpha = 0$, ідентичне з (16), розв'язком якого є функція:

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t + \varphi). \quad (20)$$

З виразу (20) випливає, що при малих коливаннях фізичний маятник виконує гармонічні коливання з циклічною частотою ω_0 і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (21)$$

де $L = \frac{J}{ml}$ – зведена довжина фізичного маятника.

Точка O' на продовженні прямої OC , яка відстоїть від осі підвішування на відстані зведеної довжини L , називається центром коливань фізичного маятника (рис. 5). Застосовуючи теорему Штейнера, можна показати, що OO' завжди більше $OC = l$. Точка підвішування O і центр коливань O' мають властивість взаємозамінності, якщо вісь підвішування перенести в центр коливань, то точка O , в якій розміщувалась раніше вісь підвішування стане новим центром коливань і період коливань фізичного маятника не зміниться.

Математичний маятник. Математичний маятник – ідеалізована система, яка складається з матеріальної точки масою m , підвішеної на нерозтяжній невагомій нитці, і коливається під дією сили тяжіння (рис.6).

Гарним наближенням математичного маятника є невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці. Момент інерції математичного маятника дорівнює

$$J = ml^2, \quad (22)$$

де l - довжина маятника.

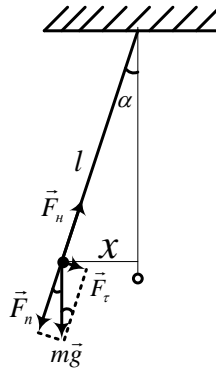


Рис. 6

Оскільки математичний маятник можна подати як окремий випадок фізичного маятника, припустивши, що вся маса фізичного маятника зосереджена в одній точці – центрі мас, то, підставивши вираз (22) у формулу (21), одержимо знайомий вираз для малих коливань математичного маятника:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (23)$$

Порівнюючи формули (23) і (21), бачимо, що якщо зведена довжина L фізичного маятника дорівнює довжині l математичного маятника, то їх періоди коливань збігаються. Отже, зведена довжина фізичного маятника – це довжина такого математичного маятника, період коливань якого збігається з періодом коливань даного фізичного маятника.

4. Вільні гармонічні коливання у коливальному контурі

Серед різних електричних явищ особливе місце займають електромагнітні коливання, при яких фізичні величини (заряди, струми, електричні і магнітні поля) періодично змінюються. Для виникнення і підтримування електромагнітних коливань необхідні певні системи, найпростішою з яких є коливальний контур – ланцюг, який складається з увімкнених послідовно котушки індуктивністю L , конденсатора ємністю C і резистора опором R .

Розглянемо послідовні стадії коливального процесу в ідеалізованому контурі, опір якого безмежно малий $R \approx 0$. Для виникнення в контурі коливань конденсатор попередньо заряджають, надаючи його обкладкам заряди $\pm Q$. Тоді в початковий момент часу $t=0$ (рис. 5, а) між обкладками конденсатора виникне електричне поле, енергія якого

$$W = \frac{1}{2C} Q^2.$$

Замкнувши конденсатор на котушку індуктивності, він почне розряджатися й у контурі потече зростаючий з часом струм I . У результаті енергія електричного поля буде зменшуватися, а енергія магнітного поля котушки – зростати.

Оскільки $R \approx 0$, то, відповідно до закону збереження енергії, повна енергія контуру буде дорівнювати

$$W = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2} LI^2 = \text{const},$$

тому що енергія на нагрівання провідників у такому коливальному контурі не витрачається. У момент часу $t = \frac{1}{4}T$, коли конденсатор повністю розрядиться, енергія електричного поля зменшується до нуля, а енергія магнітного поля, а отже і струм досягають найбільшого значення (рис. 5,б). Починаючи з цього моменту часу струм у контурі буде зменшуватися; отже, почне слабшати магнітне поле котушки й індукований у ній струм, який тече (відповідно до правила Ленца) у тому ж напрямку, що й струм розрядки конденсатора. Конденсатор почне перезаряджатися, при цьому виникне електричне поле, яке намагатиметься послабити струм, який зрештою зменшується до нуля, а заряд на обкладках конденсатора досягне максимуму (рис. 5, в). Далі ті ж процеси почнуть протікати в зворотному напрямку (рис. 5, г) і система до моменту часу $t = T$ прийде в початковий стан (рис. 5, а). Після цього почнеться повторення розглянутого циклу розрядки і зарядки конденсатора.

Якби втрат енергії не було, то в контурі відбувалися б періодичні незагасаючі коливання, тобто періодично змінювалися (коливалися) б заряд Q на обкладках конденсатора, напруга U на конденсаторі і сила струму I , яка тече через котушку індуктивності.

Отже, у контурі виникають електричні коливання з періодом T , причому протягом першої половини періоду струм тече в одному напрямку, протягом другої половини – у зворотному. Коливання супроводжуються перетвореннями енергій електричних і магнітних полів.

Електричні коливання у коливальному контурі можна зіставити з механічними коливаннями маятника (рис. 7), які супроводжуються взаємними перетвореннями потенціальної і кінетичної енергій маятника.

У даному випадку потенціальна енергія маятника $\frac{kx^2}{2}$ аналогічна енергії електричного поля конденсатора $\frac{Q^2}{2C}$, кінетична енергія маятника $\frac{mv^2}{2}$ – енергії магнітного поля котушки $\frac{LI^2}{2}$, а швидкість руху маятника – силі струму в контурі.

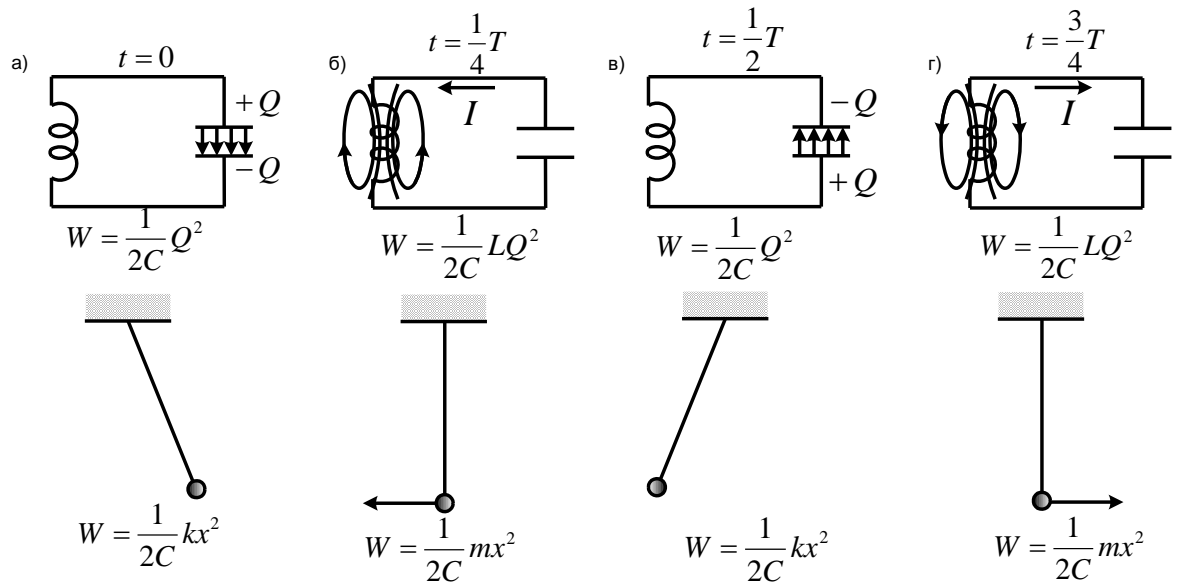


Рис.7

Роль інерції маятника буде зводитися до самоіндукції котушки, а роль сили тертя, яке діє на маятник – до опору контуру.

Відповідно до другого правила Кірхгофа, для контуру, який містить котушку індуктивністю L , конденсатор ємністю C і резистор опором R маємо

$$IR + U_C = \varepsilon_s,$$

де IR – спад напруги на резисторі;

$U_C = \frac{Q}{C}$ – напруга на конденсаторі;

$\varepsilon_s = -L \frac{dI}{dt}$ – е.р.с. самоіндукції, яка виникає в котушці при протіканні в ній змінного струму (ε_s – єдина е.р.с. у контурі).

Отже,

$$L \frac{dI}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = 0. \quad (24)$$

Розділивши (24) на L і підставивши $I = \dot{Q}$ і $\frac{dI}{dt} = \ddot{Q}$, одержимо диференціальне рівняння коливань заряду Q у контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0. \quad (25)$$

У даному коливальному контурі зовнішні е. р. с. відсутні, тому розглянуті коливання є вільними коливаннями. Якщо опір $R = 0$, то вільні електромагнітні коливання у контурі є гармонічними. Тоді з (25) одержимо диференціальне рівняння вільних гармонічних коливань заряду Q в контурі:

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0. \quad (26)$$

З виразу (26) випливає, що заряд Q в коливальному контурі виконує гармонічні коливання за законом

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (27)$$

де Q_m – амплітуда коливань заряду конденсатора з циклічною частотою ω_0 , яка називається власною частотою контуру:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (28)$$

і періодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (29)$$

Формула (29) вперше була отримана Томсоном і називається формулою Томсона.

Сила струму в коливальному контурі буде дорівнювати

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}), \quad (30)$$

де $I_m = \omega_0 Q_m$ – амплітуда сили струму.

Напруга на конденсаторі

$$U_c = \frac{Q}{C} = \frac{Q_m}{C} \cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (31)$$

де $U_m = \frac{Q_m}{C}$ — амплітуда напруги.

З виразів (30) і (31) випливає, що коливання струму I випереджають за фазою коливання заряду Q на $\pi/2$, тобто коли струм досягає максимального значення, заряд (також і напруга) зменшуються до нуля і навпаки.

Цей взаємозв'язок був установлений при розгляді послідовних стадій коливального процесу в контурі і на підставі енергетичних міркувань. Вільні електромагнітні коливання в контурі є незгасаючими.

5. Додавання гармонічних коливань однакового напрямку і однакової частоти. Биття

Розглянемо додавання двох гармонічних коливань однакового напрямку з однаковими періодами, які відбуваються з деякою різницею фаз і мають різні амплітуди. Нехай ці коливання відбуваються в напрямі осі x . Запишемо рівняння цих коливань

$$\begin{cases} x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \\ x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \end{cases} \quad (1)$$

Циклічні частоти ω в обох випадках однакові. Зміщення x від положення рівноваги, при участі тіла одночасно в двох коливаннях, виражається алгебраїчною сумою

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

або

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (2)$$

Для знаходження результуючої амплітуди A і початкової фази результуючого коливання φ використаємо векторну діаграму (рис.1).

Оскільки вектори \vec{A}_1 і \vec{A}_2 обертаються з однаковою циклічною частотою ω , то різниця фаз $(\varphi_2 - \varphi_1)$ між ними залишається постійною. Результуючу амплітуду A в цьому випадку визначають за теоремою косинусів, тобто

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)], \quad (3)$$

або з урахуванням того, що $\cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ одержуємо:

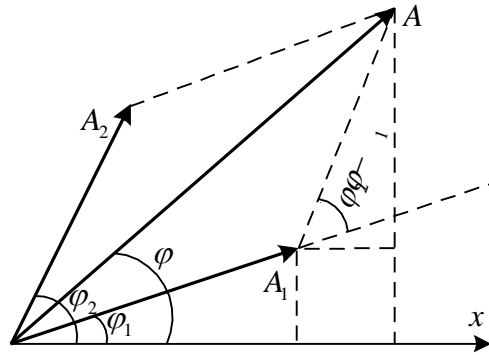


Рис.1

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (4)$$

і

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (5)$$

Початкова фаза результуючого коливання φ дорівнює

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}. \quad (6)$$

Значення амплітуди (5) і початкової фази (6) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$x = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \cos(\omega t + \arctg \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}). \quad (7)$$

Як видно з (7), сумарне коливання має такий же напрям і відбувається з тією ж циклічною частотою ω . Амплітуда результуючого коливання залежить від різниці фаз обох коливань.

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm 2\pi m$, де $(m = 0, 1, 2, \dots)$, то $A = |A_1 + A_2|$;

Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm(2m+1)\pi$, де $(m = 0, 1, 2, \dots)$, то $A = |A_1 - A_2|$.

Оскільки $\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ може набувати значень від -1 до $+1$, то межі зміни амплітуди будуть такими:

$$|A_1 + A_2| \geq A \geq |A_1 - A_2| \quad (8)$$

Окремим випадком можна розглядати додавання коливань з близькими циклічними частотами ω_1 і ω_2 ($\omega_1 \approx \omega_2$). Періодична зміна амплітуди з часом, яка відбувається в цьому випадку, називається *биттям*. Нехай додаються два гармонічних коливання з амплітудами $A_1 = A_2 = A_0$ і близькими циклічними частотами ω_1 і ω_2 . Початкові фази таких гармонічних коливань можна вибрати однаковими, тому

$$x_1 = A_0 \cos(\omega_1 t + \varphi), \quad (9)$$

$$x_2 = A_0 \cos(\omega_2 t + \varphi). \quad (10)$$

Різниця фаз двох коливань (9) і (10) буде дорівнювати $(\omega_2 - \omega_1)t$.

Скористаємось теоремою косинусів для визначення амплітуди биття

$$A^2 = 2A_0^2 [1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t]. \quad (11)$$

Замінімо вираз в квадратних дужках у відповідності з формулою

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos(\omega_2 - \omega_1)t = 2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \quad (12)$$

Вираз (12) підставимо в (11)

$$A^2 = 4A_0^2 \cos^2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \quad (13)$$

або

$$A = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \quad (14)$$

Фаза результуючого коливання для довільного проміжку часу знаходиться із графіка (рис.2)

$$\Delta\Phi = \frac{\omega_2 t + \varphi + \omega_1 t + \varphi}{2} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi. \quad (15)$$

Результуюче коливання биття матиме вигляд:

$$x = \left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right| \cdot \cos\left(\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t + \varphi\right), \quad (16)$$

де $\left| 2A_0 \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \right|$ – амплітуда биття.

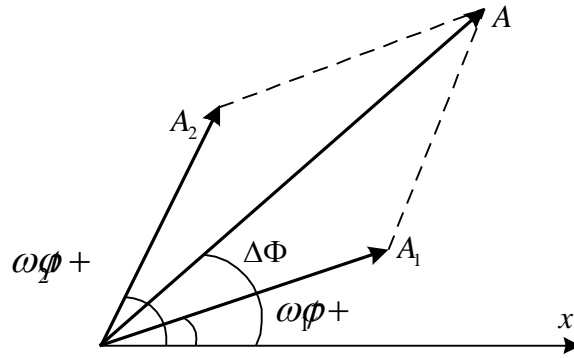


Рис.2

Графік залежності (16) має вигляд (рис 3):

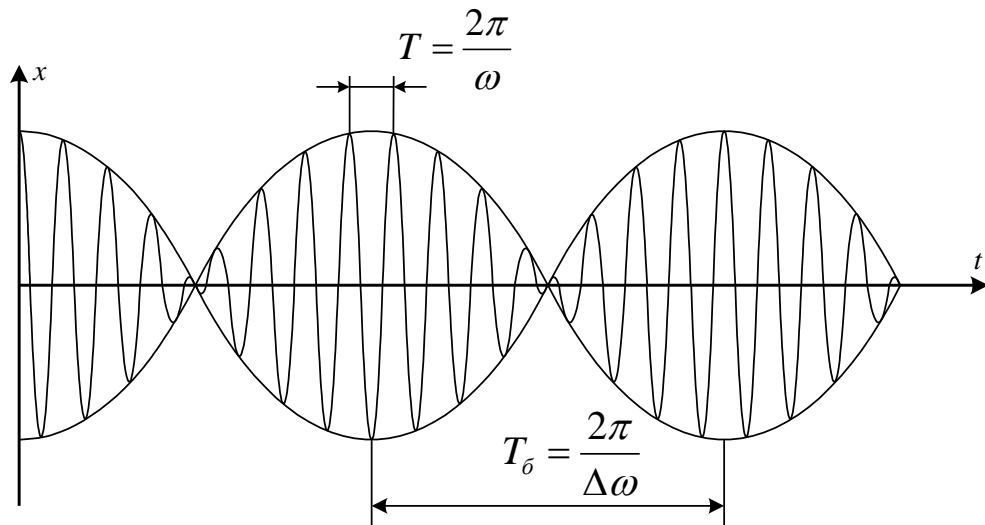


Рис. 3

Періодичність зміни амплітуди від максимуму до максимуму дає час, який називається *періодом биття*

$$\frac{\omega_2 - \omega_1}{2} T_б = \pi, \quad \text{звідки} \quad T_б = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (17)$$

Періодичність зміни амплітуди високочастотних коливань визначається за формулою

$$\frac{\omega_2 + \omega_1}{2} T = 2\pi, \quad \text{звідки} \quad T = \frac{4\pi}{\omega_2 + \omega_1}. \quad (18)$$

Оскільки циклічні частоти досить близькі, то наближено

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (19)$$

За час $T_б$ відбувається n гармонічних високочастотних коливань, тому

$$T_6 = nT. \quad (20)$$

З урахуванням співвідношень (17) і (19) вираз (20) перепишеться

$$\frac{2\pi}{\Delta\omega} = n \frac{2\pi}{\omega}, \quad (21)$$

звідки $\Delta\omega = \frac{\omega}{n}$, а для частот $\Delta\nu = \frac{\nu}{n}$.

В процесі биття частоти генераторів визначаються в таких межах:

$$\nu - \frac{\nu}{n} < \nu < \nu + \frac{\nu}{n}. \quad (22)$$

Биття використовується для градуювання шкал невідомих генераторів в процесі їх виготовлення. Додавання однаконо направлених коливань забезпечує амплітудну модуляцію в радіотехніці, а також проміжну частоту супергетеродинного прийому радіо- і телепередач.

6. Додавання взаємно перпендикулярних коливань. Фігури Ліссажу

Нехай матеріальна точка C одночасно бере участь у двох гармонічних коливаннях з однаковою циклічною частотою у взаємно перпендикулярних напрямках (рис. 4).

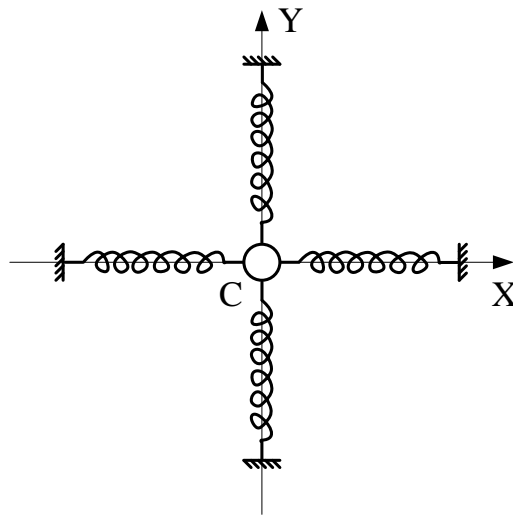


Рис.4

При збудженні коливань матеріальна точка C буде рухатись по деякій криволінійній траєкторії, форма якої залежить від різниці фаз обох коливань.

Рівняння коливань точки в напрямках осі x і осі y матимуть вигляд

$$x = A_1 \cos \omega t, \quad y = A_2 \cos(\omega t + \Delta\varphi), \quad (23)$$

де $\Delta\varphi$ – спільна різниця фаз цих коливань.

Щоб отримати рівняння траєкторії у звичайному вигляді, треба виключити з цих рівнянь час t .

$$\frac{x}{A_1} = \cos \omega t, \quad \sin \omega t = \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}},$$

$$\frac{y}{A_2} = \cos(\omega t + \Delta\varphi) = \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi - \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi;$$

$$\left(\frac{y}{A_2} - \frac{x}{A_1} \cos \Delta\varphi \right)^2 = \left(-\sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \Delta\varphi \right)^2,$$

$$\frac{x^2}{A_1^2} \cos^2 \Delta\varphi - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi + \frac{y^2}{A_2^2} = -\frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \Delta\varphi + \sin^2 \Delta\varphi.$$

В результаті отримаємо

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \Delta\varphi = \sin^2 \Delta\varphi.$$

(24)

Рівняння (24) є рівнянням траєкторії результуючого коливання точки C . Це рівняння є еліпсом, осі якого повернуті відносно осей x і y . Орієнтація еліпса і величина його півосей залежить від амплітуд A_1 і A_2 і різниці фаз $\Delta\varphi$.

Замкнуті траєкторії, які рисуються одночасно коливальною точкою у взаємно перпендикулярних напрямках, називаються *фігурами Ліссажу*. Форма цих кривих залежить від співвідношення амплітуд, частот і різниці фаз коливань, які додаються.

На рис. 8 показана одна із найпростіших траєкторій, одержаних при додаванні взаємно перпендикулярних коливань з відношенням циклічних частот 1:2 і різниці фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$. Рівняння коливань мають вигляд:

$$x = A_1 \cdot \cos \omega t, \quad y = A_2 \cdot \cos(2\omega t + \frac{\pi}{2}). \quad (28)$$

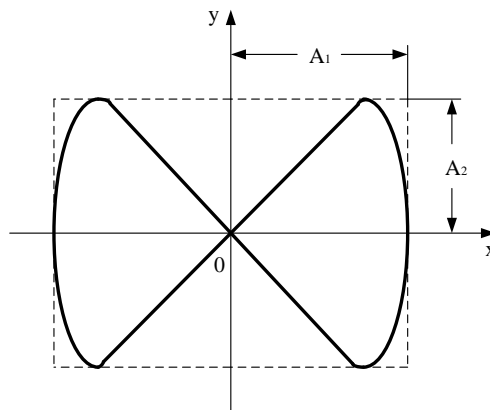


Рис. 8

Якщо відношення частот $\omega_1:\omega_2$ дорівнює 1:2, а різниця фаз $\Delta\varphi=0$, то траєкторія коливань точки вироджується в незамкнуту криву (рис. 9), вздовж якої рухається точка то в одну то в протилежну сторони.

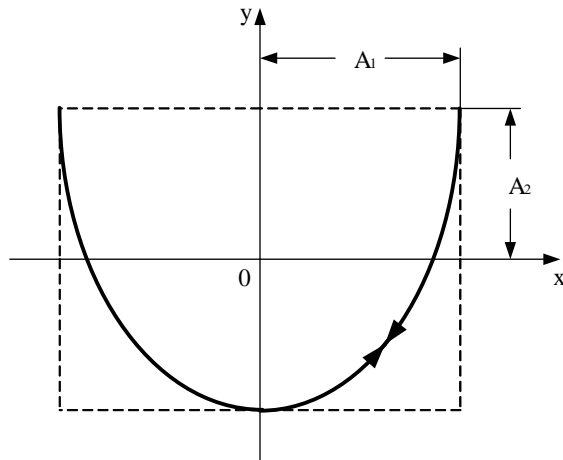


Рис. 9

Чим ближче до одиниці буде відношення частот $\omega_1:\omega_2$, тим складнішою буде фігура Ліссажу. Для прикладу на рис. 10 наведена крива фігури Ліссажу з відношенням частот 3:4 і різницею фаз $\Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$.

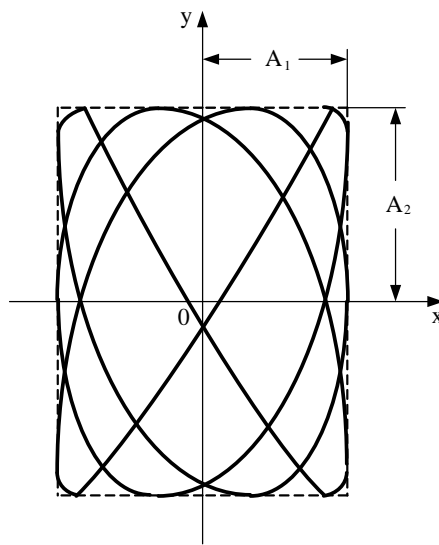


Рис. 10

7. Диференціальне рівняння вимушених коливань і його розв'язування

Щоб у реальній коливальній системі одержати незгасаючі коливання, треба компенсувати цій системі втрати енергії. Таку компенсацію можна здійснити за допомогою будь-якого періодично діючого фактора $X(t)$, який змінюється за гармонічним законом:

$$X(t) = X_0 \cos \omega t.$$

Для механічних коливань пружинного маятника роль $X(t)$ відіграє зовнішня вимушувальна сила

$$F = F_0 \cos \omega t. \quad (1)$$

З урахуванням цієї сили закон руху пружинного маятника запишеться у вигляді

$$m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t.$$

Якщо скористатися позначеннями $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{r}{m} = 2\beta$, то прийдемо до рівняння

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (2)$$

Рівняння (2) є неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням другого порядку. Розв'язок такого рівняння має складатися з двох частин, загального розв'язку відповідного рівняння без правої сторони і окремого розв'язку цього рівняння з правою стороною, тобто

$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha) + A \cos(\omega t + \varphi),$$

де A_0 — амплітуда зміщення в початковий момент часу ($t=0$);

A — амплітуда коливань, які будуть усталені через деякий час.

Через деякий час t_1 , завдяки дії вимушувальної сили F_0 , амплітуда коливань досягне максимального значення (рис. 1).

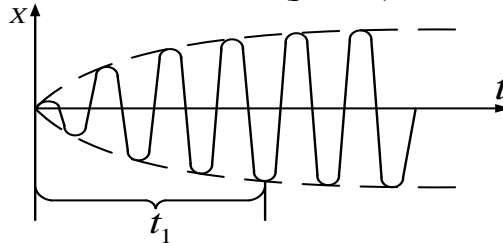


Рис. 1

З цього моменту часу розв'язком рівняння (2) буде лише функція

$$x = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (3)$$

Відповідні похідні від (3) підставимо в рівняння (2), одержимо

$$A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi + \pi) + 2\beta A\omega \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}) + A\omega_0^2 \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (4)$$

У виразі (4) сталі величини A і ω повинні мати такі значення, щоб гармонічна функція $\frac{F_0}{m} \cos \omega t$ дорівнювала сумі трьох гармонічних функцій, які стоять в лівій частині рівняння. Для виконання цієї умови, необхідно щоб сума трьох векторів при відповідних косинусах в лівій частині (4) дорівнювала вектору, який стоїть біля косинуса в правій частині. Однак вектори $A\omega^2$ і $A\omega_0^2$ напрямлені по одній лінії, але в різні боки. Вектор $2\beta A\omega$ напрямлений

перпендикулярно до перших двох. Зазначена вище умова може бути реалізована за допомогою векторної діаграми (рис. 2).

Векторна діаграма дає можливість визначити амплітуду і початкову фазу вимушених коливань. З діаграми видно, що

$$\left(\frac{F_0}{m}\right)^2 = (2\beta A\omega)^2 + (\omega_0^2 - \omega^2)^2 A^2. \quad (5)$$

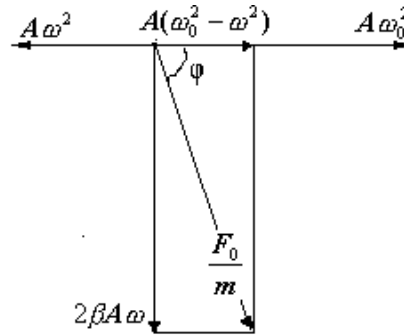


Рис. 2

Звідки амплітуда вимушених коливань буде дорівнювати

$$A = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (6)$$

Початкова фаза вимушених коливань, як видно з векторної діаграми, дорівнює

$$\varphi = \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (6) і (7) розв'язок диференціального рівняння вимушених коливань (2) матиме вигляд

$$x = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos(\omega t + \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}). \quad (8)$$

Якщо розглянути електричний коливальний контур, то змінною величиною в цьому випадку буде е.р.с., або змінна напруга

$$U = U_m \cos \omega t. \quad (9)$$

Диференціальне рівняння вимушених коливань в коливальному контурі, з урахуванням (9), буде мати вигляд

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (10)$$

Використовуючи позначення, аналогічні до (2), прийдемо до рівняння

$$\ddot{Q} + 2\beta\dot{Q} + \omega_0^2 Q = \frac{U_m}{L} \cos \omega t. \quad (11)$$

Розв'язком рівняння (11) є функція, аналогічна до (3), тобто

$$Q = Q_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (12)$$

Амплітуда заряду вимушених електромагнітних коливань буде дорівнювати

$$Q_m = \frac{U_m}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}. \quad (13)$$

Підстановка значень β і ω^2 в (13) дає значення амплітуди електромагнітних коливань в такому вигляді

$$Q_m = \frac{U_m}{\omega \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}}. \quad (14)$$

Похідна за часом від (12) дає можливість одержати в коливальному контурі закон зміни електричного струму

$$I = I_m \cos(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}),$$

де $I_m = Q_m \omega$ — максимальний струм у коливальному контурі.

8. Амплітуда і фаза вимушених коливань (механічних і електромагнітних). Резонанс. Резонансні криві. Параметричний резонанс

Розглянемо залежність амплітуди A вимушених механічних (6) або електромагнітних (13) коливань від частоти ω . Механічні й електромагнітні коливання будемо розглядати одночасно, називаючи коливну величину або зміщенням (x) коливного тіла від положення рівноваги, або зарядом (Q) конденсатора.

З формули (6) випливає, що амплітуда A зміщення точок від положення рівноваги має максимум. Щоб визначити резонансну частоту $\omega_{рез}$ — частоту, при якій амплітуда A зміщення досягає максимуму, — потрібно дослідити на максимум функцію $A = f(\omega)$. Диференціюємо підкореневий вираз цієї функції за ω і прирівнюємо його до нуля:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} [(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2] &= 0, \\ -4\omega(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\beta^2\omega &= 0 \end{aligned}$$

Ця рівність виконується при двох умовах $\omega = 0$, і $\omega = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, фізичний зміст яких має лише додатне значення. Отже, резонансна частота буде дорівнювати

$$\omega_{рез} = \pm\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (15)$$

Явище різкого зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти вимушувальної сили до $\omega_{рез}$, називається *резонансом* (відповідно механічним або електричним). У випадку коли $\beta^2 \ll \omega_0^2$, значення $\omega_{рез}$ практично збігається з власною частотою ω_0 коливної системи. Підставляючи (15) у формулу (6), одержимо

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2\beta m \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (16)$$

На рис. 3 наведені залежності амплітуди вимушених коливань від частоти при різних значеннях коефіцієнта згасання β . З виразів (15) і (16) випливає, що чим менший коефіцієнт β , тим вище і правіше лежить максимум даної кривої. Якщо $\omega_0 \rightarrow 0$, то всі криві (див. рис.3) сходяться в одній точці, яка відповідає, відмінному від нуля граничному значенню амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, так званому статичному відхиленню.

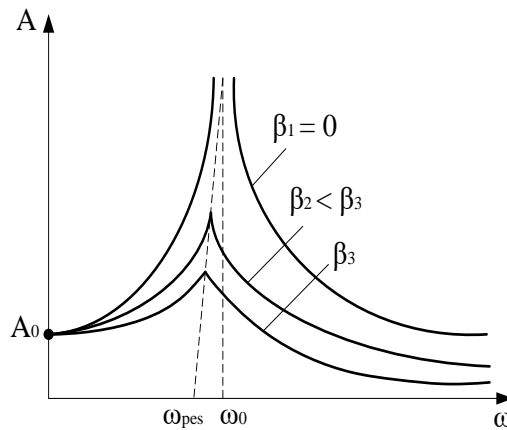


Рис.3

У випадку електромагнітних коливань $A_0 = \frac{U_m}{L\omega_0^2}$. Якщо $\omega \rightarrow \infty$, то всі криві мають асимптотичне наближення до нуля. Показані на рис. 3 криві називаються *резонансними кривими*.

З формули (16) випливає, що при малому згасанні ($\beta^2 \ll \omega_0^2$) резонансна амплітуда зміщення буде мати вигляд

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\beta\omega_0}. \quad (17)$$

Поділимо значення резонансної амплітуди (17) на статичне значення амплітуди $A_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$, одержимо добротність коливальної системи

$$\theta = \frac{A_{\text{рез}}}{A_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} = \frac{2\pi}{2\beta T} = \frac{\pi}{\delta}, \quad (18)$$

де δ — логарифмічний декремент згасання.

Як видно з (18), добротність коливальної системи характеризує її резонансні властивості. Чим більше число добротності, тим більша резонансна амплітуда.

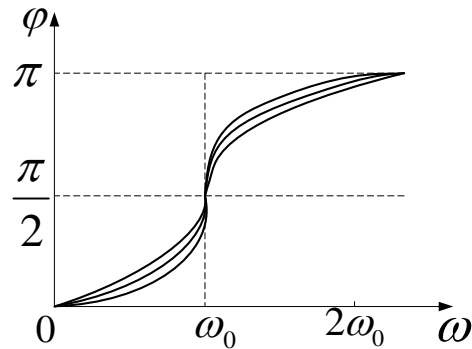


Рис. 4

Залежність φ від ω при різних коефіцієнтах β графічно показана на рис. 4, з якого випливає, що при зміні ω змінюється і зсув фаз φ . З формули (7) видно, що при $\omega = 0$, $\varphi = 0$, а при $\omega = \omega_0$ незалежно від значення коефіцієнта згасання β , $\varphi = \pi/2$, тобто сила випереджає за фазою коливання на $\pi/2$. При подальшому збільшенні ω зсув фаз зростає і при $\omega \gg \omega_0$, $\varphi \rightarrow \pi$, тобто фаза коливань майже протилежна до фази зовнішньої сили. Сімейство кривих, зображених на рис. 4, називається *фазовими резонансними характеристиками*.

Зупинимось коротко на явищі *параметричного резонансу*. Виявляється, що існують інші види зовнішніх взаємодій, з допомогою яких можна значно збільшити амплітуду коливань. Цей вид взаємодій полягає в тому, що в такт коливань періодично змінюють один із параметрів коливальної системи. Так, наприклад, зменшують довжину математичного маятника l , коли він перебуває в крайніх положеннях і дещо збільшують її, коли маятник проходить положення рівноваги, від цього маятник почне сильно розгойдуватись, амплітуда коливань буде швидко зростати, тобто наступить *явище параметричного резонансу*.

Збільшення енергії маятника відбувається за рахунок зміни довжини маятника. Сила натягу нитки маятника в цьому випадку є різною, — меншою в крайніх положеннях і більшою в момент проходження маятником положення рівноваги. При зменшенні довжини маятника (крайні положення) — зовнішні сили виконують від'ємну роботу, а при збільшенні його довжини — додатну. Оскільки додатна робота за модулем є більшою за від'ємну, то сумарна робота за час одного повного коливання (період коливань) є більшою за нуль.

Прикладом параметричного резонансу є коливання гойдалки. Без будь-яких зовнішніх впливів дитина, перебуваючи на гойдалці, сама здатна збільшувати амплітуду коливань. Потрібно лише в крайніх положеннях підніматись, а в положенні рівноваги – трохи присідати. В цьому випадку коливальна система поповнюється енергією за рахунок мускульної сили ніг дитини.

Явища резонансу можуть бути як шкідливими, так і корисними. Наприклад, при конструюванні машин і різного роду споруд необхідно, щоб їх власна частота коливань не збігалася з частотою можливих зовнішніх впливів, інакше можуть виникнути вібрації, які призведуть до значних руйнувань. З іншого боку, наявність резонансу дозволяє знайти навіть дуже слабкі коливання, якщо їх частота збігається з частотою власних коливань приладу. Так, телебачення, радіотехніка, прикладна акустика, що сприймають електричні коливання, основані на використанні явища резонансу.

9. Змінний струм

Вимушені електромагнітні коливання, які виникають в колі, що містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор, можна розглядати як змінний струм. В той же час змінний струм вважають квазістаціонарним, оскільки миттєві значення сили струму в усіх перетинах кола практично однакові. У порівнянні із швидкістю світла будь-які зміни в колі відбуваються досить повільно. Для миттєвих значень квазістаціонарних струмів виконуються закон Ома і правила Кирхгофа.

Розглянемо послідовно процеси, які відбуваються в колі, яке містить резистор, котушку індуктивності і конденсатор при вмиканні його до джерела змінної напруги

$$U = U_m \cos \omega t, \quad (19)$$

де U_m – амплітуда напруги.

1. Розглянемо коло, в яке ввімкнули лише резистор R , а індуктивність L і ємність C – відсутні (рис.5,а).

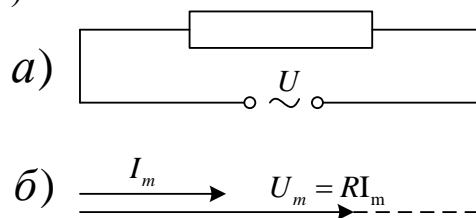


Рис.5, а,б

При виконанні умови квазістаціонарності струм через резистор R визначається законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_m}{R} \cos \omega t,$$

де амплітуда сили струму дорівнює

$$I_m = \frac{U_m}{R}.$$

На векторній діаграмі (рис. 5,б) показано, що зсув фаз між напругою і струмом в колі, в якому є лише резистор R , дорівнює нулю.

2. Розглянемо випадок, коли змінний струм тече через котушку індуктивності L , в цьому випадку резистор R і ємність C в колі відсутні (рис. 6,а).

Якщо до кола прикладена змінна напруга (19), то через котушку потече змінний струм, в результаті чого в ній виникне е.р.с. самоіндукції $E = -L \frac{dI}{dt}$.

Тоді закон Ома для даного замкнутого кола буде мати вигляд

$$U_m \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0,$$

звідки

$$L \frac{dI}{dt} = U_m \cos \omega t. \quad (20)$$

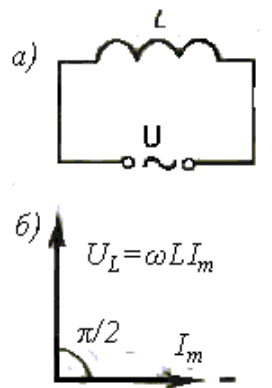


Рис. 6, а,б

Оскільки зовнішня напруга прикладена до котушки індуктивності, то

$$U_L = L \frac{dI}{dt} \quad (21)$$

визначає спад напруги на котушці. З рівняння (20) випливає, що

$$dI = \left(\frac{U_m}{L} \right) \cos \omega t dt,$$

або після інтегрування, з урахуванням того, що постійна інтегрування дорівнює нулю, одержимо

$$I = \frac{U_m}{\omega L} \sin \omega t = \frac{U_m}{\omega L} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right) = I_m \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (22)$$

де

$$I_m = \frac{U_m}{\omega L}.$$

Величина

$$R_L = \omega L \quad (23)$$

називається *реактивним індуктивним опором* (або індуктивним опором).

З виразу (22) випливає, що для постійного струму, коли $\omega = 0$, котушка індуктивності опору не чинить. Підстановка значення $U_m = \omega L I_m$ у вираз (20) з врахуванням (21) приводить до наступного значення спаду напруги на котушці індуктивності:

$$U_L = \omega L I_m \cos \omega t. \quad (24)$$

Порівнюючи вирази (22) і (24) приходимо до висновку, що спад напруги U_L випереджає за фазою струм I , який тече через котушку, на $\pi/2$, що й показано на векторній діаграмі (рис. 6, б).

3. Нехай змінний струм у колі тече через конденсатор ємністю C , в цьому випадку активний опір R і котушка індуктивності L відсутні, (рис. 7, а).

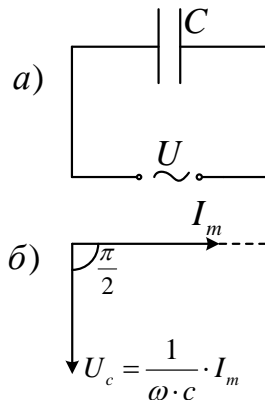


Рис.7, а,б

Якщо змінна напруга (19) прикладена до конденсатора то, в результаті постійного його перезарядження, у колі потече змінний струм. Оскільки вся зовнішня напруга прикладена до конденсатора, а опором підвідних проводів можна знехтувати, то

$$\frac{Q}{C} = U_c = U_m \cos \omega t.$$

Сила струму в цьому випадку буде дорівнювати

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\omega C U_m \sin \omega t = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2}), \quad (25)$$

де

$$I_m = \omega C U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}.$$

Величина $R_c = \frac{1}{\omega C}$ називається *реактивним або ємнісним* опором. Для постійного струму ($\omega = 0$) $R_c = \infty$, тобто постійний струм через конденсатор текти не може. Спад напруги на конденсаторі у нашому випадку буде дорівнювати

$$U_c = \frac{1}{\omega C} I_m \cos \omega t. \quad (26)$$

Порівнюючи вирази (25) і (26) приходимо до висновку, що спад напруги U_c відстає за фазою від струму, який тече через конденсатор, на $\pi/2$. Це показано на векторній діаграмі (рис. 7, б).

4. Розглянемо коло змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті резистор, котушку індуктивності і конденсатор. На рис. 8, а показане коло, що містить резистор опором R , котушку індуктивністю L і конденсатор ємністю C , на кінці якого подається змінна напруга (19).

У колі виникне змінний струм, який викличе на всіх елементах кола відповідні спади напруг U_R , U_L і U_c . На рис. 8, б показана векторна діаграма амплітуд спадів напруг на резисторі U_R , котушці U_L і конденсаторі U_c .

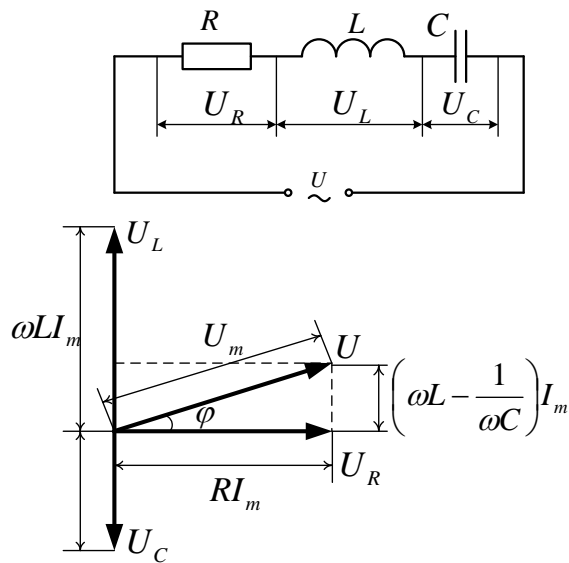


Рис. 8, а, б

Результуюча амплітуда U_m прикладеної напруги повинна бути рівною геометричній сумі амплітуд всіх спадів напруг. Як видно з рис. 8, б, кут φ визначає різницю або зсув фаз між напругою і силою струму. З рисунка випливає, що

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}. \quad (27)$$

З прямокутного трикутника, скориставшись теоремою Піфагора, одержуємо, що

$$(RI_m)^2 + \left[\left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) I_m \right]^2 = U_m^2,$$

звідки амплітуда сили струму буде дорівнювати

$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (28)$$

Отже, якщо напруга в колі змінюється за законом

$$U = U_m \cos \omega t,$$

то в колі тече струм

$$I = I_m \cos(\omega t - \varphi), \quad (29)$$

де φ і I_m визначаються відповідно формулами (27) і (28). Величина

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} = \sqrt{R^2 + (R_L - R_C)^2} \quad (30)$$

називається *повним опором кола* змінного струму, а величина

$$X = R_L - R_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}$$

називається *реактивним опором*.

Розглянемо окремий випадок, коли в колі відсутній конденсатор. У цьому випадку спад напруг U_R і U_L в сумі дорівнює прикладеній напрузі U . Векторна діаграма для даного випадку показана на рис. 9, з якої видно, що

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\omega L}{R}, \\ I_m &= \frac{U_m}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}. \end{aligned} \quad (31)$$

Отже, відсутність конденсатора в колі означає, що $C = \infty$, а не $C = 0$.

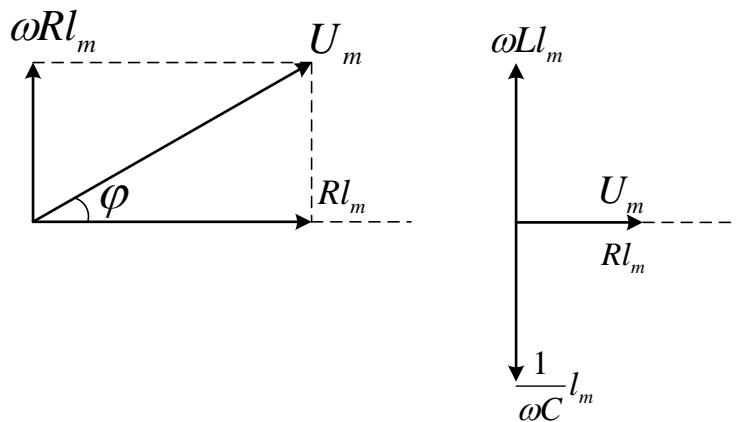


Рис. 9, а, б

Даний висновок можна трактувати так: зближаючи обкладки конденсатора до їх повного зіткнення, прийдемо до кола, у якому конденсатор відсутній (відстань між обкладками прямує до нуля, а ємність – до нескінченності).

10. Резонанс напруг

Якщо в колі змінного струму, що містить послідовно ввімкнуті конденсатор, котушку індуктивності і резистор (рис. 8,а)

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}, \quad (32)$$

то кут зсуву фаз між струмом і напругою (27) перетворюється в нуль ($\varphi = 0$), тобто зміни струму і напруги відбуваються в одній фазі. Умову (32) задовольняє частота

$$\omega_{рез} = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

У даному випадку повний опір кола Z (30) стає найменшим, рівним активному опорі R , а струм у колі визначаючись активним опором, досягає найбільших значень (при даному значенні U_m). При цьому спад напруги на активному опорі дорівнює зовнішній напрузі, прикладеній до кола ($U_R = U$), а спади напруг на конденсаторі (U_C) і котушці індуктивності (U_L) однакові за амплітудою і протилежні за фазою.

Розглянуте явище називається *резонансом напруг* (послідовним резонансом), тому що при цьому відбувається взаємна компенсація напруг U_L і U_C , кожна з яких може значно перевищувати прикладену до кола напругу U . Векторна діаграма для резонансу напруг показана на рис. 9,б.

У випадку резонансу напруг

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез},$$

тому, підставивши в цю формулу значення резонансної частоти й амплітуди напруг на котушці індуктивності і конденсаторі, одержимо

$$(U_L)_{рез} = (U_C)_{рез} = \sqrt{\frac{L}{C}} I_m = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} U_m = \theta U_m,$$

де θ - добротність контуру.

Оскільки добротність звичайних коливальних контурів більша одиниці, то напруга на котушці індуктивності, а також і на конденсаторі перевищує напругу, прикладену до кола. Тому явище резонансу напруг використовується в техніці для підсилення колювання напруги певної частоти. Наприклад, у випадку резонансу на конденсаторі можна одержати напругу з амплітудою θU_m (θ у даному випадку – добротність контуру), що може бути значно більше U_m . Це підсилення напруги можливе тільки для вузького інтервалу частот біля резонансної частоти контуру, що дозволяє виділити з багатьох сигналів одне колювання певної частоти, тобто на радіоприймачі налаштуватися на потрібну

довжину хвилі. Явище резонансу напруг необхідно враховувати при розрахунку ізоляції електричних ліній, які містять конденсатори і котушки індуктивності, тому що інакше може спостерігатися їх пробій.