

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ

ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

із навчальної дисципліни «Вища математика»

обов'язкових компонент

освітньо-професійної програми

першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

173 Авіоніка

Авіоніка

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін, Пузир М.С.*

Рецензенти:

*1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького
національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат
технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2. Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК
ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

**1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами
(заочна форма навчання)**

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр №5							
Тема № 1. Елементи лінійної алгебри.	14	1	-	2	-	11	
Тема № 2. Елементи аналітичної геометрії.	14	-	-	2	-	12	
Тема № 3. Диференціальне числення функцій однієї змінної.	14	1	-	2	-	11	
Тема № 4. Диференціальне числення функцій кількох змінних.	14	-	-	2	-	12	
Тема № 5. Невизначений та визначений інтеграли.	14	1	-	2	-	11	
Тема № 6. Подвійні та потрійні інтеграли, властивості, обчислення.	14	-	-	2	-	12	
Тема № 7. Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського.	14	1	-	2	-	11	
Тема № 8. Диференціальні рівняння.	11	-	-	-	-	11	
Тема № 9. Ряди.	11	-	-	-	-	11	
							Екзамен
Всього за семестр:	120	4		14		102	

2. Методичні вказівки до практичних занять

Тема № 1 Елементи лінійної алгебри.

Практичне заняття: Елементи лінійної алгебри.

Навчальна мета заняття: набути навичок виконання дій над матрицями та обчислення визначників; знаходження оберненої матриці, розв'язок СЛАР матричним методом; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: : 4.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Матриця. Основні поняття.
 2. Обернена матриця. Розв'язок СЛАР матричним методом.
- Література: [1] (стор. 20-58), [4](стор.8-37, 42-46).

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Що називають матрицею розміру $m \times n$?
2. Які матриці можна перемножувати?
3. Які матриці називають узгодженими для множення?
4. Яка матриця називається транспонованою до даної матриці?
5. Які перетворення матриць називають елементарними?
6. Що називається визначником матриці та як він обчислюється?
7. Назвіть основні властивості визначників.
8. Що таке алгебраїчне доповнення?
9. Як знайти обернену матрицю?
10. Для всіх матриць існує обернена?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1. Відомо, що , . Знайдіть:

1. $2A+B$
2. A^2
3. AB
4. $A+AB$
5. $7A- A^2$

Задача 2. Приведіть матрицю до східчастого вигляду та знайдіть її ранг.

1.

2.

Задача 3. Обчислити визначники.

$$1). \quad \left| \begin{array}{ccc} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{array} \right|$$

$$2). \quad \left| \begin{array}{ccc} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{array} \right|$$

Задача 4. . Дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 8 & -7 & -6 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) A^{-1} ; б) AA^{-1} .

Задача 5. Розв'язати системи рівнянь за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 7, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6. \end{cases}$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1. Відомо, що _____, _____ . Знайдіть:

1. $3B+A$

2. B^2

3. BA

4. $B-AB$

5. $B+A^2$

Задача 2. Приведіть матрицю до східчастого вигляду та знайдіть її ранг.

1.

2.

Задача 3. Обчислити визначники.

$$1). \quad \left| \begin{array}{ccc} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{array} \right|$$

$$2) \mid = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 10 \end{vmatrix}$$

$$(2 \uparrow 1$$

$$-2 \searrow$$

Задача 4. . Дано матрицю $B = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) B^{-1}

Задача 5. Розв'язати системи рівнянь за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2z = 9, \\ 2x + 5y - 3z = 4, \\ 5x + 6y - 2z = 18. \end{cases}$$

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

Тема № 2 Елементи аналітичної геометрії.

Практичне заняття: Елементи аналітичної геометрії.

Навчальна мета заняття: набути навичок побудови прямої у просторі, площини у просторі, з'ясування взаємного положення прямої та площини, кута між площинами; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: 2.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Пряма у просторі.
2. Площина у просторі.

Література: [1] (стор. 96-111), [5] (стор.60-75).

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Запишіть умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.
2. Запишіть рівняння площини, що проходить через три точки.
3. Запишіть формулу, за якою знаходять кут між площинами.
4. Запишіть умову паралельності та перпендикулярності площин.
5. Запишіть формулу для обчислення відстані від точки до площини.
6. Запишіть канонічне рівняння прямої у просторі та вкажіть геометричний

зміст параметрів, що входять до цих рівнянь.

7. Запишіть рівняння прямої у просторі, що проходить через дві точки.

8. Запишіть умову паралельності й перпендикулярності прямих у просторі.

9. Запишіть формулу, за якою знаходять кут між прямою у просторі та площиною.

10. Запишіть умову паралельності й перпендикулярності прямої у просторі та площини.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1. Дано три точки $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

Скласти:

а) Рівняння площини ($A_1A_2A_3$);

б) Обчислити: косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною ($A_1A_2A_3$).

- | | | |
|----------------------|-------------------|-------------------|
| 1. $A_1(3, 1, 4)$, | $A_2(-1, 6, 1)$, | $A_3(-1, 1, 6)$, |
| 2. $A_1(3, -1, 2)$, | $A_2(-1, 0, 1)$, | $A_3(1, 7, 3)$, |
| 3. $A_1(3, 5, 4)$, | $A_2(5, 8, 3)$, | $A_3(1, 2, -2)$, |
| 4. $A_1(2, 4, 3)$, | $A_2(1, 1, 5)$, | $A_3(4, 9, 3)$, |

Задача 2. Задано чотири точки $A_1(x_1; y_1; z_1)$, $A_2(x_2; y_2; z_2)$, $A_3(x_3; y_3; z_3)$,

$A_4(x_4; y_4; z_4)$.

1. Скласти рівняння:

а) площини $A_1A_2A_3$;

б) прямої A_1A_2 ;

в) прямої A_4M , перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$;

г) прямої A_3N , паралельній до прямої A_1A_2 ;

д) площини, яка проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої

A_1A_2 .

2. Обчислити:

е) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$;

ж) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1A_2A_3$.

	A_1	A_2	A_3	A_4
а)	(1; 2; 3)	(2; 7; 2)	(-3; 1; -3)	(5; 6; -2)
б)	(1; 2; -3)	(1; 5; 2)	(5; 0; 5)	(-1; 2; 7)
в)	(0; -1; 3)	(-1; 3; 2)	(1; 6; 1)	(-2; 7; 5)
г)	(2; 0; 1)	(0; -4; 1)	(-3; 2; 1)	(-7; 8; -5)

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1. Дано вершини трикутника C : (0, 2), (12, 10), $C(24, -2)$.

Знайти: а) рівняння сторони ; б) рівняння висоти CH ; в) рівняння медіани M ; г) точку N перетину медіани M і висоти CH ; д) рівняння прямої, що

проходить через вершину C паралельно стороні ; є) відстань від точки C до прямої AB .

Задача 2. Дано чотири точки, $A_1(-1,0,2)$, $A_2(4, -1, -2)$, $A_3(4, 0, 3)$, $A_4(2,1, 6)$. Скласти рівняння: а) площини $A_1A_2A_3$; б) прямої A_1A_2 ; в) прямої A_4M , перпендикулярної до площини $A_1A_2A_3$; г) прямої A_3N , паралельної прямій A_1A_2 ; д) площини, що проходить через точку A_4 перпендикулярно до прямої A_1A_2 . Обчислити: е) синус кута між прямою A_1A_4 і площиною $A_1A_2A_3$; ж) косинус кута між координатною площиною Oxy і площиною $A_1A_2A_3$.

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

Тема № 3 Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Практичне заняття: Диференціальне числення функцій однієї змінної.

Навчальна мета заняття: набути навичок знаходження похідних звичайних функцій, складних, заданих параметрично та неявно, дослідження графіку функції; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: 2.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Похідна. Визначення. Основні правила.
2. Логарифмічне диференціювання.
3. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично.
4. Обчислення границь за допомогою похідних.
5. Дослідження функцій.

Література: [1] (стор. 215-251, 272-289), [7] (стор.8-36, 44-50).

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Дайте визначення похідної. Наведіть геометричний та механічний зміст.
2. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції.
3. Основні правила диференціювання.
4. Похідні основних елементарних функцій.
5. Логарифмічне диференціювання.
6. Як знаходять похідні першого та другого порядку від функції, заданої неявно рівнянням $F(x, y) = 0$?
7. Як знайти проміжки зростання та спадання функції?

8. Як знайти екстремуми функції?

9. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

10. Схема повного дослідження функції.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1. Знайти похідні даних функцій.

1. а) $y = \sqrt[3]{3x^4 + 2x - 5}$; б) $y = \operatorname{tg}^4 3x$;
 в) $y = \frac{9 \operatorname{arctg}(x+7)}{x}$; г) $y = (3x^2 - 7) \ln(x - 3x^2)$;
 д) $y = \frac{\sqrt{x+7}(x-3)^4}{(x+2)^5}$.
2. а) $y = \sqrt[3]{(x-3)^4}$; б) $y = (3x^2 - 4) \arcsin 5x$;
 в) $y = \frac{\operatorname{arctg}(2x+3)}{(x+1)^5(x+2)^3}$; г) $y = \ln(4x+7)$;
 д) $y = \frac{\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{(x-1)^3}}$.
3. а) $y = \sqrt{(x-4)^5}$; б) $y = \operatorname{arctg}(7x+5)$;
 в) $y = \frac{\arccos(4x-1)}{(x+2)^3 \sqrt{(x+1)^5}}$; г) $y = (3-x^2) \ln(5x^2 - 2x + 1)$;
 д) $y = \frac{\sqrt{(x+1)^5}}{(x-4)^2}$.
4. а) $y = \sqrt[5]{7x^2 - 3x + 5}$; б) $y = \operatorname{arctg}(3x-2)$;
 в) $y = \frac{\arcsin(x+5)}{(x-2)^5 \sqrt{(x-2)^2}}$; г) $y = (2x-3) \ln(x^2 + x + 4)$;
 д) $y = \frac{\sqrt{(x-2)^2}}{(x+1)^7}$.
5. а) $y = \sqrt[4]{3x^2 - x + 5}$; б) $y = \ln(x^2 - 3x + 7)$;
 в) $y = \frac{\operatorname{arctg}(2x-5)}{(x+1)^2(x-3)^3}$; г) $y = (5-2x) \sin(3x^2 + 2x)$;
 д) $y = \frac{\sqrt{(x+1)^5}}{\sqrt{(x+1)^5}}$.

Задача 2. Знайти похідну неявної функції.

1. $y^2 = 8x$; 2. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{7} = 1$;
3. $y = x + \operatorname{arctg} y$; 4. $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{3} = 1$;
5. $y^2 = 25x - 4$; 6. $\operatorname{arctg} y = 4x + 5y$;
7. $y^2 - x = \cos y$; 8. $3x + \sin y = 5y$;

Задача 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізьку $[a, b]$.

1. $y = \ln(x^2 - 2x + 2)$, $[0; 3]$.
2. $y = e^{\frac{4x-x^2}{x^5-8}}$, $[1; 3]$.
3. $y = \frac{3x}{x^2+1}$, $[0; 5]$.
4. $y = \frac{e^{2x^4+1}}{e^x}$, $[-3; -1]$.
5. $y = \frac{2x-1}{(x-1)^2}$, $[-0,5; 0]$.
6. $y = \frac{e^{2x^4+1}}{e^x}$, $[-1; 2]$.

Задача 4. Дослідити функції, побудувати графіки.

1. а) $y = 4x^3 - 3x^4$, б) $y = \frac{x^2 - 5x}{x + 4}$.
2. а) $y = (x-1)x^2$, б) $y = \frac{x^3}{x^2-1}$.
3. а) $y = \frac{1}{9}(6x^2 - x^4)$, б) $y = \frac{x}{(x-1)^2}$.

Задача 5. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції $y = f(x)$, застосовуючи логарифмічне диференціювання.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$y = \sqrt{x}$	5	$y = x^{\ln x}$
2	$y = x^{\sin x}$	6	$y = (tgx)^{\frac{1}{x}}$
3	$y = (\arctg x)^x$	7	$y = x^{\arcsin x}$
4	$y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	8	$y = x^{\frac{1}{\ln x}}$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1. Знайти похідні даних функцій.

1. а) $y = \sqrt{3x^4 - 2x^3 + x}$; б) $y = \arctg \sqrt{x}$;
- в) $y = \frac{\arctg(3x+2)}{(x-3)^4(x+2)^5}$; г) $y = (4-x^2)\ln(7x-10)$;
- д) $y = \frac{1}{\sqrt[3]{(x-4)^2}}$.

Задача 2. Знайти похідну неявної функції.

1. $\lg y = 3x + 5y$; 2. $xy = \operatorname{ctg} y$;
3. $y = e^y + 4x$; 3. $\ln y - \frac{y}{x} = 7$;

Задача 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = f(x)$ на відрізьку $[a, b]$.

1. $y = (x+2)e^{1-x}$, $[-2; 2]$. 2. $y = x \ln x$, $[\frac{1}{e^2}; 1]$.

Задача 4. Дослідити функції, побудувати графіки.

а) $y = x^4 - 4x^2 + 3$, б) $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$.

Задача 5. Знайти похідну $\frac{dy}{dx}$ функції $y = f(x)$, застосовуючи логарифмічне

диференціювання.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$y = (\sin x)^{\cos x}$	3	$y = (\operatorname{ctg} 3x)^{x^2}$
2	$y = x^{x^2}$	4	$y = (1 + x)^{\frac{3}{x}}$

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

Тема № 4 Диференціальне числення функцій кількох змінних.

Практичне заняття: Диференціальне числення функцій кількох змінних.

Навчальна мета заняття: набути навичок знаходження частинних похідних, екстремумів функції двох змінних; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: : 4.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Поняття функції багатьох змінних.
 2. Частинні похідні. Мішані похідні.
 3. Екстремуми функції двох змінних.
 4. Найбільше і найменше значення функції в замкненій області.
- Література: [2] (стор. 19-50), [8] (стор. 8-36, 44-50).

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Функція двох змінних.
2. Область визначення функції двох змінних.
3. Неперервність функції двох змінних.
4. Що таке частинні похідні?
5. Що таке мішані похідні?
6. Як знайти екстремум функції багатьох змінних?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1. Визначити екстремуми функції $z = f(x, y)$.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$z = y^2 + 2x^2 + 3xy - 4x - 8y$	6	$z = x^2 + y^2 - 9xy + 27$
2	$z = y^2 + x^2 + xy + x - y + 1$	7	$z = x^2 + 3y^2 + x - y$
3	$z = 4(x - y) - y^2 - x^2$	8	$z = 10 + 2xy - x^2$
4	$z = 5xy - 7x - 10y$	9	$z = x^2 + xy$
5	$z = 20 + 9x - 6y - xy + y^2 + x^2$	10	$z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$

Задача 2. Знайти найбільше і найменше значення функції

$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ у трикутнику з вершинами $O(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(0, 2)$.

III. Порядок проведення
заключної частини
заняття. Підведення
підсумків заняття.

$O(0, 0)$, $B(3, 0)$,

Домашнє завдання:

Задача 1. Визначити екстремуми функції $z = f(x, y)$.

Варіант	Завдання	Варіант	Завдання
1	$z = 3x + 6y - xy - y^2 - x^2$	4	$z = x^2 - y^2 + 5x + 4y$
2	$z = 4xy + y^2 + x^2 - 8x - 10y$	5	$z = 3x^2 - xy + x + y$
3	$z = 18x - 6y - 2y^2 - 3x^2 + 2xy - 17$	6	$z = x^2 + 2y^2 + 1$

Задача 2. Знайти найбільше і найменше значення функції

$z = 3x^2 + 3y^2 - 2x - 2y + 2$ у трикутнику з вершинами $C(0, 3)$.

Виконати індивідуальне

розрахункове завдання з теми.

Тема № 5 Невизначений та визначений інтеграли.

Практичне заняття : Невизначений та визначений інтеграли.

Навчальна мета заняття: набути навичок знаходження інтегралів, застосовуючи різні методи інтегрування; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: 2.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Інтеграл. Основні поняття.

2. Методи інтегрування.

3. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

4. Інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x) dx$.

5. Визначений інтеграл.

Література: [2] (стор. 76-98, 156-165, стор. 176-193), [9] (стор.8-11, 14-17, 27-30, 31-34)

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Означення первісної та невизначеного інтеграла.

2. Властивості невизначеного інтеграла.

3. Таблиця інтегралів.

4. Методи інтегрування: Безпосереднє інтегрування.

5. Методи інтегрування: Метод заміни змінної (підстановки)

6. Методи інтегрування: Інтегрування частинами

7. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

8. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум.

9. Властивості визначеного інтеграла.

10. Формула Ньютона - Лейбниця.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача1. Знайти інтеграли.

1. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^2 3x}} dx$; б) $\int \frac{5x^2}{5-2x^3} dx$; в) $\int x \cos 5x dx$;

г) $\int \frac{2-x}{\sqrt{8-x^2-2x}} dx$; д) $\int \frac{dx}{2+tgx}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}-1}$;

2. а) $\int \frac{\cos x}{2\sin x-5} dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3-4}} dx$; в) $\int \frac{\ln(2x+1)}{x^3} dx$;

г) $\int \frac{x}{x^3-7x+13} dx$; д) $\int \frac{dx}{1-\sin^2 x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$;

3. а) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} dx$; б) $\int e^{x^2+2x}(x+1)dx$; в) $\int xe^{3x-5} dx$;

г) $\int \frac{x+2}{\sqrt{x^2+2x+10}} dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - tg^2 x}$; е) $\int \frac{x+2}{\sqrt{3x+1}} dx$;

4. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+5\cos x}} dx$; б) $\int \sqrt{1-2x^2} \cdot x^2 dx$; в) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}} dx$;

г) $\int \frac{2x dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 5}}$; д) $\int \sin 3x \cos 5x dx$; е) $\int (x+1) \cos 2x dx$;

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли .

1. $\int_0^1 x e^{-2x} dx$;	2. $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx$;	3. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$;
4. $\int_0^{\pi/2} \cos^3 x \cdot \sin 2x dx$;	5. $\int_{-0.5}^{0.5} \arccos 2x dx$;	6. $\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{x+1}}$;
7. $\int_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x dx}{(1 - \cos x)^2}$;	8. $\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x \cos x dx$;	9. $\int_0^{\pi/4} 2 \cos x \cdot \sin 3x dx$;

Задача 3. Знайти невизначені інтеграли від раціональних дробів.

1	2	3	4
$\int \frac{2x^3 + x}{x^3 - 27} dx$	$\int \frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + x^2 - 6x} dx$	$\int \frac{x^3 - 6}{x^4 + 6x^2 + 8} dx$	$\int \frac{x^3 + x^2 + 1}{(x+2)(x^2+2)} dx$

Варіант 5

Варіант 6

Варіант 7

Варіант 8

$\int \frac{dx}{4x^3 - x}$	$\int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 2)}$	$\int \frac{3x - 8}{4x^2 + 8x - 12} dx$	$\int \frac{2x^3 + 3}{(x+3)(x^2+9)} dx$
----------------------------	-----------------------------------	---	---

Задача 4. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних виразів.

$\int \sin^4 x dx$	$\int \operatorname{tg}^3 2x dx$	$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^3 x} dx$	$\int \frac{dx}{2 \sin x + \cos x + 2}$
--------------------	----------------------------------	-------------------------------------	---

Варіант 5

Варіант 6

Варіант 7

Варіант 8

$\int \sin^5 \frac{x}{3} dx$	$\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} dx$	$\int \cos 3x \cdot \sin x dx$	$\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x}$
------------------------------	--	--------------------------------	--------------------------------

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1. Знайти інтеграли.

1. а) $\int \frac{dx}{e^{7x+1}}$; б) $\int \frac{dx}{x \ln^2 x}$; в) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx$;
 г) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}}$; д) $\int \sin^2 x dx$; е) $\int \sqrt{4 - x^2} dx$;

2. а) $\int \frac{x^2 dx}{3x^3 - 5}$; б) $\int \frac{\sqrt{2 + \operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx$; в) $\int (2 - x) \cos 3x dx$;
 г) $\int \frac{dx}{3x - 2}$; д) $\int \frac{dx}{4 + 2 \sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(9 + \sqrt[5]{x})^2 x}$;

Задача 2. Обчислити визначені інтеграли .

$$1. \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} dx;$$

$$2. \int_1^2 x^2 \ln x dx;$$

$$3. \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin x + 1} dx;$$

Задача 3. Знайти невизначені інтеграли від раціональних дробів.

$$\int \frac{dx}{4x^3 - x}$$

$$\int \frac{dx}{x(x^2 + 2x + 2)}$$

Задача 4. Знайти невизначені інтеграли від тригонометричних виразів.

$$\int \sin^5 \frac{x}{3} dx$$

$$\int \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{2} dx$$

$$\int \cos 3x \cdot \sin x dx$$

$$\int \frac{dx}{5 + 3 \sin x}$$

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

Тема № 6 Подвійні та потрійні інтеграли, властивості, обчислення.

Практичне заняття №: Подвійні та потрійні інтеграли, властивості, обчислення.

Навчальна мета заняття: набути навичок знаходження подвійних та потрійних інтегралів; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: 4.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Подвійний інтеграл, його геометричний зміст. Властивості. Обчислення подвійних інтегралів.
2. Потрійний інтеграл та його обчислення.
3. Застосування подвійних та потрійних інтегралів.

Література: [11] (стор. 8-132)

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Означення подвійного інтегралу.
2. Властивості властивості інтеграла.
3. Означення потрійного інтегралу.
4. Застосування подвійного інтегралу.
5. Застосування потрійного інтегралу

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1. Обчислити подвійний інтеграл.

№	Завдання	
	Подвійний інтеграл	Область D
1	$\iint_D (x^3 + y^3) dx dy$	$D: y = \frac{1}{2}x, y = x, x = 2$
2	$\iint_D \frac{y}{x} dx dy$	$D: y = x, \sqrt[3]{y} = \frac{x}{3}, x = 1$
3	$\iint_D \frac{x}{y} dx dy$	$D: y = x, y = \frac{x}{3}, x = 1$
4	$\iint_D (6xy^2 - 12x^2y) dx dy$	$D: y = 2, y = 3, x = 0, x = 1$

5	$\iint_D (y+4) dx dy$	$D: (y-1)^2 = x, x = 1$
6	$\iint_D (y+x^2) dx dy$	$D: y = 2x, y = \frac{1}{2}x, xy = 2$ $(x \geq 0)$
7	$\iint_D x \sin(y+x^2) dx dy$	$D: y = 0, y = \frac{\pi}{2}, x = 0,$ $x = \pi$
8	$\iint_D \frac{dx dy}{x+y}$	$D: y = 0, x = 0, x+y = 2$
9	$\iint_D xy dx dy$	$D: x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 = 1$
10	$\iint_{\sqrt{1+y^2}}^{\ln x} dx dy$ —	$1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$

Задача 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями.

№	Лінія 1	Лінія 2	Лінія 3	Лінія 4
1	$2x - y = 0$	$2x - y - 7 = 0$	$x - 4y + 7 = 0$	$x - 4y + 14 = 0$
2	$y = \ln x$	$y = 1 - x^2$	$y = 1$	—
3	$y = -2$	$y = x + 2$	$y = 2$	$y^2 = x$
4	$y^2 + x = 0$	$y = -2$	$y = 2 - x$	$y = 2$
Варіант 5	$x^2 + y^2 = 25$	$y = 0$	$4x + 3y - 25 = 0$	
Варіант 6	$y = x^2$	$y = x^2 + 3$		
Варіант 7	$y - x^2 = 0$	$y = (x+1)^2$	$y = 2$	
Варіант 8	$x^2 + y^2 = 4$	$y = 2 - x$	$y = 1$	

Задача 3. Обчислити потрійний інтеграл.

Завдання

Потрійний інтеграл

Область V

№		
1	$\iiint_V (2x^2 + 3y + z) dx dy dz$	$V: 2 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2,$ $0 \leq z \leq 4$

	$\iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$	$V: x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \ (x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$
2	$\iiint x^2 y z dx dy dz$	$V: -1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 3, 2 \leq z \leq 3$
	$\iiint y \sqrt{x^2 + y^2} dx dy dz$	$V: z > 0, z = 2, y \geq \pm x, z^2 = 4(x^2 + y^2)$
Варіант 3	$\iiint (x + y + 4z^2) dx dy dz$	$V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$
	$\iiint_V z^2 dx dy dz$	$V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
Варіант 4	$\iiint (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$	$V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$
	$\iiint_V y dx dy dz$	$V: x^2 + y^2 + z^2 = 32, y^2 = x^2 + z^2, y \geq 0$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1. Обчислити подвійний інтеграл.

№ Подвійний інтеграл	Завдання	
		Область D
1	$\iint_D xy^2 e^{xy} dx dy$	$0 \leq x \leq 1, 1 \leq y \leq 2$
2	$\iint_D (y - x) dx dy$	$D: y = x, y = 1, y = 2$
3	$\iint_D dx dy$	$D: y = x, y = 3 - x, y = 0, y = 1$
4	$\iint_D (y + x) dx dy$	$D: y = x^2, x = 0, y = 1, y = 2$
5	$\iint_D \frac{x}{1 + y + x^2} dx dy$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
6	$\iint_D x^2 y \cos y x dx dy$	$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq 4$
7	$\iint_D \frac{y}{x} dx dy$	$D: y = x, y = 2x, y = 3 - x$
8	$\iint_D xy dx dy$	$D: y = x^2, y^2 = x$
9	$\iint_D \frac{y}{1 + x^2} dx dy$	$D: y = 1 - x, x^2 + y^2 = 1$

10	$\iint_D x^2 y^2 dx dy$	$D: xy = 1, x = 2, y = 1, y = 2$
----	-------------------------	----------------------------------

Задача 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої лініями.

№	Лінія 1	Лінія 2	Лінія 3	Лінія 4
1	$x^2 + y^2 = 25$	$y = 0$	$4x + 3y - 25 = 0$	
2	$y = x^2$	$y = x^2 + 3$		
3	$y - x^2 = 0$	$y = (x + 1)^2$	$y = 2$	
4	$x^2 + y^2 = 4$	$y = 2 - x$	$y = 1$	

Задача 3. Обчислити потрійний інтеграл.

Завдання

Потрійний інтеграл

Область V

№		
1	$\iiint_V (x + y + 4z^2) dx dy dz$	$V: -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2, -1 \leq z \leq 1$
	$\iiint_V z^2 dx dy dz$	$V: 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 36, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$
2	$\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$	$V: 0 \leq x \leq 3, -1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 3$
	$\iiint_V y dx dy dz$	$V: x^2 + y^2 + z^2 = 32, y^2 = x^2 + z^2, y \geq 0$

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

Тема № 7 Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського.

Практичне заняття: Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула Остроградського.

Навчальна мета заняття: набути навичок знаходження криволінійних та поверхневих інтегралів; розширення, поглиблення й деталізація наукових знань, отриманих здобувачами вищої освіти на лекціях та в процесі самостійної роботи і спрямованих на підвищення рівня засвоєння навчального матеріалу, умінь і навичок, розвиток наукового мислення та усного мовлення.

Кількість годин: : 4.

Місце проведення: навчальний кабінет коледжу.

Навчальні питання:

1. Криволінійні інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
 2. Поверхневі інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
 3. Формула Остроградського.
- Література: [11] (стор. 133-165)

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань (фронтальне опитування).

Питання для попереднього контролю теоретичних знань здобувачів:

1. Криволінійний інтеграл першого роду.
2. Криволінійний інтеграл другого роду.
3. Поверхневий першого роду.
4. Поверхневий інтеграл другого роду.
5. Формула Остроградського.

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок (розв'язання задач).

Задача 1.

а) $\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy)dx + (y^2 - 2xy)dy$, де L_{AB} – дуга $y = x^2$ між точками $(-1; 1)$

та $(1; 1)$;

б) $\int_L \sqrt{2-z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = t \cos t, \\ y = t \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi. \\ z = t \end{cases}$

в) $\oint \sqrt{2y^2 + z^2} dl$, де L – коло $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x = y \end{cases}$

г) $\int_{L_{OA}} (xy - y^2)dx + xdy$, де L_{OA} – дуга $y = 2x^2$ від точки $O(0;0)$ до точки

$(1; 2)$.

Задача 2

а) $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$, де L_{AB} – дуга астероїди $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$ від точки

$(2; 0)$ до точки $(0; 2)$;

б) $\int_L xyz dl$, де L – чверть кола $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4} \\ x \geq 0 \end{cases}$ розміщена в першому

октанті;

в) $\oint (x^2 + y^2) dl$, де L – коло $x^2 + y^2 = 4$;

г) $\int_{L_{OBA}} 2yzdy - y^2dz$, де L_{OBA} – ламана O : $O(0; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 2; 1)$.

Задача 3

а) $\int_{L_{OB}} \frac{dl}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$, де L_{OB} – відрізок прямої, яка з'єднує точки $O(0;0)$ та

$(2;2)$;

б) $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2)dx + 2xydy$, де L_{OA} – дуга параболи $y = x^3$ від точки $O(0; 0)$ до

$(1; 1)$;

в) $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L – частина дуги спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, розташована

всередині круга радіусом R з центром у полюсі;

г) $\int_L \frac{x}{y} dx + \frac{1}{y-a} dy$, де L – дуга циклоїди $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$ де $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

Задача 4. Обчислити поверхневі інтеграли.

№	Завдання	
	Поверхневий інтеграл	Поверхня S
1	$\iint_S (xy + yz + zx) dS$	S – частина поверхні $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, яка вирізана циліндром $x^2 + y^2 = 2x$
2	$\iint_S \left(z + 2x + \frac{4}{3}y \right) dS$	S – частина площини $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$, яка знаходиться в першому октанті
3	$\iint_S x dS$	S – частина сфери $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, яка знаходиться в першому октанті

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

Задача 1.

а) $\oint_L (x + 2y)dx + (x - y)dy$, де L – коло $\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t \end{cases}$ в додатному напрямку

обігу;

б) $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) dl$, де L – відрізок прямої : $(-1; 0), (0; 1)$;

в) $\int_L yzxdx + z\sqrt{R^2 - y^2} dy + xydz$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \\ z = \frac{at}{2\pi} \end{cases}$ де

параметр t пробігає від точки перетину кривої з площиною $z = 0$ до точки перетину з площиною $z = a$.

г) $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$, де L – дуга кривої $\begin{cases} x = a \cos t, \\ y = a \sin t, \\ z = bt \end{cases} 0 \leq t \leq 2\pi$.

Задача 2. Обчислити поверхневі інтеграли.

№	Завдання	
	Поверхневий інтеграл	Поверхня S
1	$\iint_S y dS$	S – півсфера $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$

Виконати індивідуальне розрахункове завдання з теми.

3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Допоміжна

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ- 2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf
14. <https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na>