МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

173 Авіоніка
Авіоніка

за темою − Елементи лінійної алгебри

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, Пузир М.С.

Рецензенти:
***1**.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
***2**.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Матриця. Основні поняття.
2. Обернена матриця. Розв’язок СЛАР матричним методом.

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7 Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf

14. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

Текст лекції

1. Матриця. Основні поняття.

Вив же знайомі з поняттям матриці, визначника, знаєте деякі операції, які можна виконувати над матрицями. А в цій темі ми дізнаємось про обернену матрицю, але спочатку повторимо відомості про матриці, які ви вже знаєте, і які знадобляться для вивчення теми.

Визначення. *Матрицею* $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{n1} \end{pmatrix}; \quad A = (a_{ij}) \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Визначення. Матрицю *A* будемо називати *узгодженою* з матрицею *B*, якщо кількість стовпців матриці *A* дорівнює кількості рядків матриці *B*.

Визначення. *Добутком матриці* $A_{m\times r} = (a_{ij})$ розміру $m \times r$ *на матрицю* $B_{r\times n} = (b_{ij})$ розміру $r \times n$ називається матриця $C_{m\times n} = AB = (c_{ij})$ розміру $m \times n$ з елементами c_{ij}, кожний елемент якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A та j-го стовпця матриці B:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ir}b_{rk}.$$

Добуток матриць у загальному випадку не має властивості комутативності, тобто не завжди $AB = BA$. Це очевидно хоча б із того, що з узгодженості матриці A з B матриці не випливає узгодженість B з *A*.

Визначення. Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*.

До *елементарних перетворень матриці* належать такі перетворення:

1) Заміна місцями двох рядків (стовпців) матриці.
2) Множення будь-якого рядка (стовпця) матриці на число $\lambda \neq 0$.

3) Алгебраїчне додавання відповідних елементів двох рядків (стовпців) матриці.

4) Викреслення рядка (стовпця) матриці, в якій розташовані одні нулі.

Приклад 1. Дано дві матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. Знайти AB.

Розв'язок. Знайдемо AB:

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 3+2\cdot 2+0\cdot 0 & 1\cdot(-1)+2\cdot 0+0\cdot 1\\ (-1)\cdot 3+1\cdot 2+2\cdot 0 & (-1)\cdot(-1)+1\cdot 0+2\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Визначення. Квадратна матриця E, що має вигляд

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & 1 & \dots & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix},$$

називається *одиничною матрицею* n-го порядку.

Визначення. Якщо в матриці замінити місцями відповідні рядки і стовпці, не змінюючи в них порядок елементів, то така операція називається *транспонуванням*, і відповідна матриця позначається A^T.

$$A^T=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

Добуток $A\times A^T$ транспонованих матриць завжди існує.

<u>Приклад 2.</u> Дана матриця $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}$. Знайти A^T і $A\times A^T$.

<u>Розв'язок.</u> Транспонуємо матрицю A: $A^T=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Матриця A узгоджена з матрицею A^T. Знайдемо $A\times A^T$.

$$A\times A^T=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ -1 & 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\\ 0 & 4\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot(-1)+1\cdot 3+0\cdot 4\\ (-1)\cdot 2+3\cdot 1+4\cdot 0 & (-1)\cdot(-1)+3\cdot 3+4\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 26\end{pmatrix}.$$

Визначення. *Визначником квадратної матриці* називається визначник, що складається з елементів матриці, розташованих так само, як і в матриці.

Позначається
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Визначення. *Визначником квадратної матриці другого порядку* називають число $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, яке записують у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} . \qquad (1)$$

Визначник матриці A позначають Δ, (A), $\det(A)$.

Визначення. *Визначником квадратної матриці третього порядку* називається число, що обчислюється за правилом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} .$$

Визначення. *Мінором* M_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають визначник $n-1$ порядку, отриманий з даного викреслюванням рядка і стовпчика, на перетині яких розташовано даний елемент.

Визначення. *Алгебраїчним доповненням* A_{ij} елемента a_{ij} визначника n-го порядку називають мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Отже, мінор від алгебраїчного доповнення може відрізнятись лише знаком.

Теорема Лапласа. Визначник n-го порядку дорівнює сумі добутків елементів якого-небудь рядка або стовпчика на їх алгебраїчні доповнення.

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} , \qquad j = 1 \div n .$$

Визначники, що мають порядок вище третього, обчислюють за допомогою теореми Лапласа та основних властивостей.

Основні властивості визначників

1. Значення визначника не змінюється, якщо поміняти місцями відповідні рядки і стовпчики.
2. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпчики), то він дорівнює нулю.
3. Якщо поміняти місцями два сусідні рядки (стовпчики) визначника, то він змінить знак на протилежний.
4. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпчика) визначника можна винести за знак

визначника.

5. Якщо визначник має нульовий рядок (стовпчик), то він дорівнює нулю.

6. Якщо всі елементи двох рядків (стовпчиків) відповідно пропорційні, то він дорівнює нулю.

7. Якщо до всіх елементів рядка (стовпчика) визначника додати відповідні елементи другого рядка (стовпчика) помножені на число α, то значення визначника не зміниться.

2. Обернена матриця. Розв'язок СЛАР матричним методом.

Для квадратних матриць вводять поняття оберненої матриці.

Визначення. Якщо для матриці A існує така матриця A^{-1}, що $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де E - одинична матриця, то A^{-1} називається *оберненою матрицею* матриці A.

Визначення. *Невиродженою* матрицею називається квадратна матриця, визначник якої не дорівнює нулю. У протилежному випадку матриця називається *виродженою*.

Теорема. Якщо матриця A невироджена, то для неї існує обернена матриця

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn}\end{pmatrix}, \qquad (3)$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij} визначника матриці A, а $\det A$ – її визначник.

<u>**Приклад 3.**</u> Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}$.

Знайти: а) A^{-1}; б) AA^{-1}; в) $A^{-1}A$.

<u>Розв'язок.</u> а) Обчислимо визначник матриці A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{vmatrix} = 1\cdot 3\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 1 + (-1)\cdot 4\cdot 2 - 2\cdot 3\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 4 - 0\cdot(-1)\cdot 0 = -22.$$

Тому що $\det A \neq 0$, то обернена матриця існує

$$A^{-1} = -\frac{1}{22}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів матриці:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2\\ 4 & 0\end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3\\ 1 & 4\end{vmatrix} = -7,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = 8, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

Отже, $A^{-1}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-8 & 8 & -6\\ 2 & -2 & -4\\ -7 & -4 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{4}{11} & -\frac{4}{11} & \frac{3}{11}\\ -\frac{1}{11} & \frac{1}{11} & \frac{2}{11}\\ \frac{7}{22} & \frac{2}{22} & -\frac{3}{22}\end{pmatrix}$.

б) $AA^{-1}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-8 & 8 & -6\\ 2 & -2 & -4\\ -7 & -4 & 3\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-8+0-14 & 8+0-8 & -6+0+6\\ 8+6-14 & -8-6-8 & 6-12+6\\ -8+8+0 & 8-8+0 & -6-16+0\end{pmatrix}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-22 & 0 & 0\\ 0 & -22 & 0\\ 0 & 0 & -22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

в) $A^{-1}A=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-8 & 8 & -6\\ 2 & -2 & -4\\ -7 & -4 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ -1 & 3 & 2\\ 1 & 4 & 0\end{pmatrix}=$

$=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-8-8-6 & 0+24-24 & -16+16+0\\ 2+2-4 & 0-6-16 & 4-4+0\\ -7+4+3 & 0-12+12 & -14-8+0\end{pmatrix}=-\frac{1}{22}\begin{pmatrix}-22 & 0 & 0\\ 0 & -22 & 0\\ 0 & 0 & -22\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

<u>Приклад 4.</u> За допомогою елементарних перетворень знайти обернену матрицю до матриці $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}$.

<u>Розв'язок.</u> 1-й крок. Поряд з матрицею A записуємо одиничну матрицю того самого розміру

$$\begin{array}{c} \qquad A \qquad\qquad\qquad E \\ \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\end{array} \quad S_3-2S_1 \quad \Rightarrow$$

2-й крок. За допомогою елементарних перетворень нової матриці досягаємо, щоб на місці матриці A утворилась одинична матриця. Тоді на місці матриці E буде знаходитись матриця A^{-1}.

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} S_1 - 2S_2 \\ \\ S_3 + 4S_2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 18 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c}\frac{7}{18}S_3+S_1\\ S_2+\frac{2}{18}S_3\end{array}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&2/9&-4/9&7/18\\0&1&0&2/9&5/9&-1/9\\0&0&1&-1/9&2/9&1/18\end{array}\right),\text{ отже}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2/9&-4/9&7/18\\2/9&5/9&-1/9\\-1/9&2/9&1/18\end{pmatrix}.$$

Перевірка.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2/9&-4/9&7/18\\2/9&5/9&-1/9\\-1/9&2/9&1/18\end{pmatrix}=$$

$$AA^{-1}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}1&2&-3\\0&1&2\\2&0&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-4&7/2\\2&5&-1\\-1&2&1/2\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

3. Розв'язок СЛАР матричним методом.

Визначення. Системою m лінійних рівнянь із n невідомими $x_1, x_2, \dots, x_n$ називається система, що має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1j}x_j+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2j}x_j+\dots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{ij}x_j+\dots+a_{in}x_n=b_i,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mj}x_j+\dots+a_{mn}x_n=b_m,\end{cases}\qquad(4)$$

де $a_{ij}, b_i \ (i=\overline{1,m}; j=\overline{1,n})$ - довільні числа, названі відповідно *коефіцієнтами при невідомих* і *вільними членами* рівнянь.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}$$ - *основна матриця системи.*

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} \ldots & b_1 \\ \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix}$$ - *розширена матриця системи.*

Визначення. Упорядкована система чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ називається *розв'язком системи* (4), якщо кожне з рівнянь (4) перетворюється на тотожність після підстановки відповідно чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ замість $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Визначення. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язків.

Визначення. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має нескінченну множину розв'язків.

Розв'язати систему – це значить визначити, сумісна вона чи ні, і у випадку сумісності знайти множину всіх її розв'язків.

Систему можна записати в матричній формі: $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи має вигляд $X = A^{-1}B$, якщо визначник системи відмінний від нуля.

<u>Приклад 5.</u> Дослідити на сумісність систему рівнянь і у випадку сумісності розв'язати її за допомогою оберненої матриці (матричним методом).

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -5, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

<u>Розв'язок.</u> Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -26 \neq 0,$$ тобто система сумісна.

Знайдемо розв'язок системи матричним методом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці системи відмінний від нуля, то матриця A має обернену, і розв'язок системи $X = A^{-1}B$.

Для обчислення оберненої матриці A^{-1} обчислимо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

$A_{21} = -$ … , $A_{22} =$ … , $A_{23} = -$ …

− 3 = −6, 3
− 3 = 9,
3
1 = −1,
1

1 − 3
A = −4, 2
$_{31}$= − 3
= −2
2 = −7, 2
A 1 =
$_{32}$= −5.
− 2
−
1
2
A
$_{33}$=
1

Оберненою матрицею системи є матриця $A^{-1} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}$.

Матричний розв'язок системи має вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -8 & -6 & -4 \\ -1 & 9 & -7 \\ 3 & -1 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -5 \\ 17 \\ 4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{26}\begin{pmatrix} -78 \\ 130 \\ -52 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix},$$

звідки $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, $x_3 = 2$.

Контрольні питання:

1. Що називають матрицею розміру $m \times n$?
2. Які матриці можна перемножувати?
3. Які матриці називають узгодженими для множення?
4. Яка матриця називається транспонованою до даної матриці?
6. Які перетворення матриць називають елементарними?
7. Що називається визначником матриці та як він обчислюється?
8. Назвіть основні властивості визначників.
9. Що таке алгебраїчне доповнення?
10. Як знайти обернену матрицю?
11. Для всіх матриць існує обернена?