

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

**з навчальної дисципліни «Вища математика»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**

**173 Авіоніка  
Авіоніка**

**за темою – Диференціальне числення функцій однієї змінної**

**Кременчук 2023**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол  
від 28.08.2023 № 1

**Розробник:**

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та  
фундаментальних дисциплін, Пузир М.С.*

**Рецензенти:**

*1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького  
національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат  
технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2. Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК  
ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Власов С.І.*

### План лекції

1. Похідна. Визначення. Основні правила.
2. Логарифмічне диференціювання.
3. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично.
4. Обчислення границь за допомогою похідних.
5. Дослідження функцій.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

#### Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

13. [http://teta.at.ua/vishha\\_matematika\\_pidruchnik.pdf](http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf)14. <https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na>

### Текст лекції

#### 1. Похідна. Визначення. Основні правила.

**Визначення.** Похідною функцією  $y = f(x)$  за аргументом  $x$  називають границю відношень приросту функції  $\Delta y$  до приросту аргументу  $\Delta x$ , коли  $\Delta x$  довільним чином прямує до нуля.

Якщо ця границя існує, то її позначають через  $f'(x)$  або  $y'$ , або  $y'_x$ , або  $\frac{dy}{dx}$ , або  $\frac{df(x)}{dx}$ . Отже, математично похідна функції визначається за формулою:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

**Визначення.** Операцією знаходження похідної функції  $y = f(x)$  називають диференціюванням цієї функції. Функцію  $f(x)$ , яка має похідну в точці  $x$ , називають диференційованою в точці  $x$ . Якщо функція має похідну в кожній точці деякого проміжку, то її називають диференційованою у цьому проміжку.

**Теорема 1.** Якщо функція  $y = f(x)$  диференційована в деякій точці  $x_0$ , то вона в цій точці неперервна.

**Наслідок.** З цієї теореми випливає, що неперервність функції є необхідною умовою диференційованості функції.

Це означає, що в точках розриву функція не має похідних, тобто вона не диференційована.

Функція, яка неперервна в точці  $x_0$ , може бути не диференційованою в цій точці. Наприклад, функція  $y = |x|$  неперервна в точці  $x = 0$ , але не має похідної в цій точці тому, що  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$ , а  $\lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ , тобто границя відношень  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  залежить від способу прямування  $\Delta x \rightarrow 0$ .

### Основні правила диференціювання.

**Теорема 2.** Похідна постійної величини  $C$  дорівнює нулю, тобто  $C' = 0$

**Теорема 3.** Якщо кожна із функцій  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$   $n$ -скінчене число диференційована в деякій точці  $x$ , то їх алгебраїчна сума також є диференційованою в цій точці, причому похідна алгебраїчної суми цих функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі їх похідних, тобто  $[f_1(x) \pm f_2(x) \pm \dots \pm f_n(x)]' = f_1'(x) \pm f_2'(x) \pm \dots \pm f_n'(x)$

**Теорема 4.** Якщо кожна з функцій  $u(x)$  та  $v(x)$  диференційовані в точці  $x$ , то добуток цих функцій також має похідну в точці  $x$ , причому цю похідну знаходять за формулою:  $[u(x) \cdot v(x)]' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

**Теорема 5.** Якщо  $u(x)$  та  $v(x)$  мають похідні в точці  $x$  і  $v(x) \neq 0$ , то частка цих функцій також має похідну в точці  $x$ , яку знаходять за формулою:

$$\left[ \frac{u(x)}{v(x)} \right]' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

### Похідні основних елементарних функцій.

#### Таблиця основних формул диференціювання.

$$1. (u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u', \alpha \in R.$$

$$2. (\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'.$$

$$3. (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$$

$$4. (a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'.$$

$$5. (e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$6. (\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7. (\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

$$8. (\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$$

$$9. (\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$$

$$10. (\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'.$$

$$11. (\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'.$$

$$12. (\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

$$13. (\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$$

Тут  $u = u(x)$ . Якщо  $u(x) = x$ , то  $u'(x) = x' = 1$ .

**Теорема 6.** Якщо  $y = f(u)$ ,  $u = \varphi(x)$  і функція  $f$  та  $\varphi$  диференційовані функції своїх аргументів, то існує похідна по  $x$  складної функції  $y$ , причому вона дорівнює добутку похідної функції  $y$  по проміжному аргументу  $u$  та похідної функції  $\varphi$  по аргументу  $x$ , тобто  $y'_x = y'_u \cdot u'_x$ .

**Приклад 1.**  $y = 5x^3 - 6x + 7x + 4$ .

**Розв'язання.** Застосовуємо правило диференціювання суми функцій, маємо:  $y' = (5x^3 - 6x^2 + 7x + 4)' = 5 \cdot 3x^2 - 6 \cdot 2x + 7 \cdot 1 = 15x^2 - 12x + 7$ ;

**Приклад 2.**  $y = x^3 \operatorname{arctg} x$ .

**Розв'язання.** Застосовуючи правило диференціювання добутку функцій, маємо:

$$y' = (x^3 \operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + x^3 \frac{1}{1+x^2} = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2};$$

**Приклад 3.**  $y = \frac{\arcsin x}{x}$ .

**Розв'язання.** Застосовуючи правило диференціювання частки функцій, маємо:

$$y' = \left( \frac{\arcsin x}{x} \right)' = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \cdot x - \arcsin x \cdot 1}{x^2} = \frac{x - \sqrt{1-x^2} \cdot \arcsin x}{x^2 \cdot \sqrt{1-x^2}};$$

**Приклад 4.**  $y = x\sqrt{x}(3\ln x - 2)$ .

**Розв'язання.** Перепишемо задану функцію у вигляді:  $y = x^{\frac{3}{2}}(3\ln x - 2)$ . Тоді

$$y' = \left( x^{\frac{3}{2}} (3 \ln x - 2) \right)' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} (3 \ln x - 2) + x^{\frac{3}{2}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{x} = \frac{9}{2} x^{\frac{1}{2}} \ln x.$$

**Приклад 5.**  $y = \left( 17 + \frac{3}{x^4} \right)^{12}.$

**Розв'язання.** Застосовуючи правило диференціювання складної функції, степеневій функції та суми, маємо:

$$y' = \left( \left( 17 + \frac{3}{x^4} \right)^{12} \right)' = \left( \left( 17 + 3x^{-4} \right)^{12} \right)' = 12(17 + 3x^{-4})^{11} \cdot 3 \cdot (-4)x^{-5} =$$

$$= -\frac{144}{x^5} \left( 17 + \frac{3}{x^4} \right)^{11};$$

**Приклад 6.**  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

**Розв'язання.** Застосовуючи правило диференціювання складної функції, логарифмічної функції та суми, маємо:

$$y' = \left( \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \right)' = \left( \ln \left( x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} \right) \right)' = \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\left( 1 + \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x \right) = \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \left( 1 + \frac{x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x + (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}} + x}{(x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}};$$

**Визначення.** Похідною другого порядку функції  $y = f(x)$  називається похідна від її похідної  $y' = f'(x)$ :  $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}.$

Аналогічно, похідною третього порядку функції  $y = f(x)$  є похідна від похідної другого порядку  $y'' = (f')'(x)$ .

Взагалі, похідною  $n$ -го порядку від функції  $y = f(x)$  називається похідна від похідної  $(n-1)$ -го порядку:  $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$

## 2. Логарифмічне диференціювання.

Логарифмічною похідною функції  $y = f(x)$  називається похідна від логарифму цієї функції, тобто  $(\ln y)' = \frac{y'}{y}.$  Послідовне застосування логарифмування та диференціювання функції називається логарифмічним диференціюванням.

**Приклад 7.** Знайти похідну функції  $y = x^{\cos 3x}.$

**Розв'язання.** Маємо складну показникову функцію, бо і основа, і степінь

залежить від  $x$ . Прологарифмуємо задану функцію  $y = x^{\cos 3x}$ .

Маємо:  $\ln y = \cos 3x \cdot \ln x$

Далі диференціюємо обидві частини останньої рівності по  $x$ :  
 $\ln(y)' = (\cos 3x \cdot \ln x)'$ .

Звідси  $\frac{y'}{y} = -\sin 3x \cdot 3 \cdot \ln x + \cos 3x \cdot \frac{1}{x}$

Далі знаходимо  $y'$ :  $y' = y \left( -3 \sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x} \right)$  або

$$y' = x^{\cos 3x} \left( -3 \sin 3x \cdot \ln x + \frac{\cos 3x}{x} \right).$$

**Приклад 8.** Знайти похідну функції:  $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}}$

**Розв'язання.** Запишемо задану функцію у вигляді:  $y = \frac{(2x-1)^3 \cdot (3x+2)^{\frac{1}{2}}}{(5x+4)^2 \cdot (1-x)^{\frac{1}{3}}}$

Прологарифмуємо задану функцію:

$$\ln y = 3 \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(5x+4) - \frac{1}{3} \ln(1-x)$$

Продиференціюємо обидві частини останньої рівності по  $x$ :

$$(\ln y)' = \left( 3 \ln(2x-1) + \frac{1}{2} \ln(3x+2) - 2 \ln(5x+4) - \frac{1}{3} \ln(1-x) \right)'$$

$$\text{Звідси } \frac{y'}{y} = 3 \cdot \frac{1}{2x-1} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3x+2} \cdot 3 - 2 \cdot \frac{1}{5x+4} \cdot 5 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-x} \cdot (-1)$$

$$y' = y \left( \frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right)$$

$$\text{Отже, } y' = \frac{(2x-1)^3 \cdot \sqrt{3x+2}}{(5x+4)^2 \cdot \sqrt[3]{1-x}} \cdot \left( \frac{6}{2x-1} + \frac{3}{2(3x+2)} - \frac{10}{5x+4} + \frac{1}{3(1-x)} \right)$$

### 3. Диференціювання функцій, заданих неявно та параметрично.

Похідна функції, заданої параметрично рівняннями:  $\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases}$

обчислюється за формулою  $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t}$ .

**Приклад 9.** Знайти  $y'_x = \frac{dy}{dx}$  та  $y''_{xx} = \frac{d^2 y}{dx^2}$  від функції, заданої параметрично:

$$\begin{cases} x = \ln t, \\ x = t^3 + 2t + 1. \end{cases}$$

**Розв'язання.**  $y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{d(t^3 + 2t + 1)}{d(\ln t)} = \frac{(3t^2 + 2)t^t}{(\ln t)^t} = \frac{3t^2 + 2}{1} = 3t^3 + 2t$

$$y'_{xx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} y' \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{d(\ln t)} (3t^3 + 2t)' \right) = \frac{(3t^3 + 2t)'_{t'}}{(\ln t)'_t} = \frac{9t^2 + 2}{\frac{1}{t}} = 9t^3 + 2t.$$

Похідна неявної функції.

Якщо залежність між  $x$  та  $y$  задана в не явній формі  $F(x, y) = 0$ , то для знаходження похідної  $y'_x = y'$  треба:

1. Обчислити похідну по  $x$  від лівої та правої частин заданого рівняння  $F(x, y) = 0$ , вважаючи  $y$  функцією  $x$ . Отримаємо  $F_1(x, y, y') = 0$ .
2. Розв'язати останнє рівняння відносно  $y'$ .

**Приклад 10.** Знайти  $y'$  та  $y''$  від функції, заданої неявно рівнянням  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Розв'язання.** Диференціюємо ліву та праву частину рівняння:  $x^2 + y^2 = 1$ , вважаючи, що  $y = y(x)$ . Згідно з правилом диференціювання складної функції, маємо:  $2x + 2y \cdot y' = 0$  або  $x + y \cdot y' = 0$ .

$$\text{Звідси } y' = -\frac{x}{y}.$$

Далі диференціюємо ліву та праву частину рівняння:  $x + y \cdot y' = 0$ , вважаючи, що  $y = y(x)$ ,  $y' = y'(x)$ .

$$\text{Маємо } 1 + y'^2 + y \cdot y'' = 0$$

$$\text{Звідси } y'' = -\frac{1 + y'^2}{y}$$

Враховуючи вираз для  $y' = -\frac{x}{y}$ , отримуємо:

$$y'' = -\frac{1 + \frac{x^2}{y^2}}{y} = -\frac{y^2 + x^2}{y^3}$$

Але згідно з умовою  $x^2 + y^2 = 1$ , отже остаточно маємо:  $y'' = -\frac{1}{y^3}$ .

#### 4. Обчислення границь за допомогою похідних.

**Правило Лопіталя.** Нехай у деякому околі точки  $x_0$  (крім, можливо, самої точки  $x_0$ ) функції  $f(x)$  і  $\varphi(x)$  диференційовані й  $\varphi'(x) \neq 0$ . Якщо

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0 \quad \text{або} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = \infty, \quad \text{тобто частка}$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} \quad \text{в точці } x = x_0 \text{ являє собою невизначеність виду } \left[ \frac{0}{0} \right] \text{ або } \left[ \frac{\infty}{\infty} \right], \text{ то}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}, \quad \text{якщо границя в правій частині цієї рівності}$$

існує.



Якщо границя частки  $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$  в точці  $x = x_0$  приводить знову до невизначеності виду  $\begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$  або  $\begin{bmatrix} \infty \\ - \\ \infty \end{bmatrix}$ , то необхідно перейти до знаходження границі відношення других похідних і т.д.

У випадку невизначеності  $[0 \cdot \infty]$  або  $[\infty - \infty]$  необхідно алгебраїчно перетворити дану функцію так, щоб привести її до невизначеності  $\begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$  або  $\begin{bmatrix} \infty \\ - \\ \infty \end{bmatrix}$  і далі скористатися правилом Лопіталю.

У випадку невизначеності виду  $[\infty^0]$  або  $[1^\infty]$  необхідно прологарифмувати дану функцію і знайти границю її логарифма.

**Приклад 11.** Знайти вказані границі, застосовувши правило Лопіталю.

а)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x}$ .

Маємо невизначеність виду  $\begin{bmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{bmatrix}$ . Застосовуючи правило Лопіталю,

отримаємо

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2 \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 1)'}{(2 \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{2 \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} x^2 = 1.$$

б)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}$ .

Тут для одержання результату необхідно застосовувати правило Лопіталю двічі, тому що задане відношення і відношення похідних призводять до невизначеності типу  $\begin{bmatrix} \infty \\ - \\ \infty \end{bmatrix}$ . Повторні застосування правила Лопіталю записують звичайно в ланцюжок рівностей.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

## 5. Дослідження функцій.

### Зростання та спадання функції.

**Визначення.** Функція  $f(x)$  називається зростаючою на інтервалі  $(a, b)$ , якщо для  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  і таких, що  $x_1 < x_2$  виконується нерівність  $f(x_1) < f(x_2)$ .

**Визначення.** Якщо ж при  $x_1 < x_2$  виконується нерівність  $f(x_1) > f(x_2)$ , то функція називається спадною.

**Теорема 7.** Якщо  $f'(x) > 0$  на  $(a, b)$ , то функція  $f(x)$  зростає на цьому

інтервалі. Якщо  $f'(x) < 0$  на  $(a, b)$ , то функція  $f(x)$  *спадає* на цьому інтервалі.

Інтервали спадання та зростання функції називаються інтервалами *монотонності*.

### Екстремуми функцій.

**Визначення.** Точка  $x = x_0$  називається точкою локального максимуму функції  $f(x)$ , якщо існує такий окіл точки  $x_0$   $O(x_0, \delta)$ , що для  $\forall x \in O(x_0, \delta), x \neq x_0$  виконується нерівність  $f(x) < f(x_0)$ .

**Визначення.** Аналогічно точка  $x = x_0$  — точка локального мінімуму функції  $f(x)$ , якщо для  $\forall x \in O(x_0, \delta), x \neq x_0$  виконується нерівність  $f(x) > f(x_0)$ .

Точки локального максимуму та локального мінімуму функції  $f(x)$  називаються точками локального екстремуму цієї функції.

#### Теорема 8. Необхідна умова екстремуму.

Якщо функція  $f(x)$  диференційована в точці  $x_0$  і має в цій точці екстремум, то  $f'(x_0) = 0$ .

**Визначення.** Точка  $x_0$ , в якій  $f'(x_0) = 0$  називається стаціонарною.

**Визначення.** Точки, в яких  $f'(x_0) = 0$ , нескінченності або не існує, називають *критичними* точками.

#### Теорема 9. Достатні умови екстремуму.

Нехай функція  $f(x)$  диференційована в деякому околі  $O(x_0, \delta)$  критичної точки  $x_0$ , за виключенням, можливо, самої точки  $x_0$ . Тоді, якщо:

а)  $f'(x) > 0, x \in (x_0 - \delta, x_0)$  і  $f'(x) < 0, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то  $x_0$  — точка локального максимуму функції  $f(x)$ ;

б)  $f'(x) < 0, x \in (x_0 - \delta, x_0)$  і  $f'(x) > 0, x \in (x_0, x_0 + \delta)$ , то  $x_0$  — точка локального мінімуму функції  $f(x)$ ;

в)  $f'(x)$  не змінює знака при  $x \in O(x_0, \delta), x \neq x_0$ , то точка  $x_0$  не є точкою локального екстремуму.

### Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.

Якщо функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a, b]$ , то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого та найменшого значень. Для знаходження цих значень треба:

а) знайти всі критичні точки функції  $f(x)$  на відрізку  $[a, b]$ ;

б) обчислити значення функції  $f(x)$  у критичних точках;

в) обчислити значення функції  $f(x)$  у точках  $x = a, x = b$ ;

г) серед обчислених значень вибрати найбільше та найменше.

**Приклад 12.** Знайти найбільше та найменше значення функції

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x - 1 \text{ на відрізку } [-2; 2,5].$$

**Розв'язання.** Знайдемо критичні точки функції. Похідна функції:

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x+1)(x-2).$$

$f'(x) = 0$  при  $x = -1, x = 2$ . Обидві критичні точки належать відрізку  $[-2; 2,5]$ .  
Обчислимо значення функції у цих критичних точках та на кінцях відрізка.  
 $f(-1) = 6, f(2) = -21, f(-2) = -3, f(2,5) = -16,5$ .

Отже, найбільше значення  $f(-1) = 6$ , а найменше значення  $f(2) = -21$ .

*Відповідь:*  $\max_{x \in [-2; 2,5]} f(x) = f(-1) = 6, \min_{x \in [-2; 2,5]} f(x) = f(2) = -21$ .

### Опуклість, вгнутість. Точки перетину.

Нехай  $f(x)$  диференційована функція на інтервалі  $(a, b)$ .

**Визначення.** Графік функції  $f(x)$  називається опуклим уверх або опуклим на інтервалі  $(a, b)$ , якщо він розташований нижче дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу.

**Визначення.** Графік функції  $f(x)$  називається вгнутим униз, або вгнутим на інтервалі  $(a, b)$ , якщо він розташований вище дотичної, проведеної в будь-якій точці цього інтервалу.

Точка  $(x_0, f(x_0))$  графіка функції, яка відділяє його опуклу частину від вгнутої, називається *точкою перегину*.

#### Теорема 10. Достатня умова опуклості (вгнутості) графіка функції.

Нехай функція  $f(x)$  двічі диференційована на інтервалі  $(a, b)$ . Тоді, якщо:

- а)  $f'(x) < 0$  на  $(a, b)$ , то графік функції  $f(x)$  є опуклим на  $(a, b)$ ;
- б)  $f'(x) > 0$  на  $(a, b)$ , то графік функції  $f(x)$  є вгнутим на  $(a, b)$ .

Із означення точки перегину та достатніх умов опуклості (вгнутості) випливає, що, коли  $x_0$  — абсциса точки перегину графіка функції  $y = f(x)$ , то друга похідна дорівнює нулю, нескінченності або не існує.

Точки, в яких  $f'(x) = 0$ , нескінченності або не існують, називаються *критичними точками другого роду*.

#### Теорема 11. Достатня умова точки перегину.

Нехай функція  $f(x)$  двічі диференційована в деякому околі  $O(x_0, \delta)$  критичної точки другого роду  $x_0$ , за виключенням, можливо, самої точки  $x_0$ . Тоді, якщо  $f'(x)$  в інтервалах  $(x_0 - \delta, x_0)$ ,  $(x_0, x_0 + \delta)$  має протилежні знаки, то  $x_0$  — абсциса точки перегину. Якщо ж  $f'(x)$  має однаковий знак у цих інтервалах, то точка з абсцисою  $x_0$  не є точкою перегину.

### Асимптоти.

**Визначення.** Пряма  $L$  називається асимптотою графіка функції  $f(x)$ , якщо відстань від точки  $M$  графіка функції до прямої  $L$   $\rho(M, L) \rightarrow 0$  при віддаленні точки  $M$  у нескінченність.

#### Вертикальні асимптоти.

Пряма  $x = a$  є *вертикальною асимптотою* графіка функції  $f(x)$ , якщо  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty$ . Неперервні функції не мають вертикальних асимптот.

#### Похили асимптоти.

Пряма  $y=kx+b$  є *похилою* асимптотою графіка функції  $f(x)$ , якщо існують скінченні границі  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = b$ .

### **Горизонтальні асимптоти.**

Пряма  $y=b$  є *горизонтальною* асимптотою графіка функції  $f(x)$ . Горизонтальна асимптота є частинним випадком похилої асимптоти  $y=kx+b$  при  $k=0$ .

### **Схема повного дослідження функції.**

Для повного дослідження функції та побудови її графіка можна рекомендувати таку схему:

1. Вказати область визначення функції;
2. Дослідити функцію на парність, непарність (симетрію графіка), періодичність;
3. Знайти точки перетину функції з осями координат;
4. Знайти точки розриву функції, якщо вони існують, і встановити їх характер;
5. Знайти асимптоти графіка функції;
6. Визначити інтервали зростання та спадання функції та екстремуми;
7. Визначити інтервал опуклості та вгнутості функції та точки перегину;
8. Провести необхідні додаткові дослідження: сталість знаку функції, розташування графіку відносно осей координат (вище, нижче), поведінка функції на нескінченності, тощо.

Побудову графіка рекомендується виконувати поступово, переходячи від пункту до пункту схеми, з нанесенням знайдених у кожному пункті характеристик.

**Приклад 12.** Дослідити функцію  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$  та побудувати її графік.

**1.** Область визначення функції  $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ . На інтервалі  $(-\infty, 2)$   $f(x) < 0$ , на інтервалі  $(2, +\infty)$   $f(x) > 0$ .

**2.** Функція не є парною, не є непарною, бо  $f(-x) = \frac{(-x+1)^2}{-x-2} = -\frac{(-x+1)^2}{x+2}$ , тобто  $f(-x) \neq f(x)$ ,  $f(-x) \neq -f(x)$ .

Функція не періодична, бо не існує такого числа  $T, T > 0$ , щоб  $f(x+T) = f(x)$ ,  $\forall x \in D(f)$ .

Отже, маємо функцію загального вигляду.

**1.** Точки перетину з осями координат  $(-1, 0)$  та  $(0, -\frac{1}{2})$ .

**2.** Точка розриву функції  $x=2$ . Маємо розрив другого роду, бо  $\lim_{x \rightarrow 2-0} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 2+0} f(x) = +\infty$

3. Вертикальна асимптота  $x = 2$ , бо  $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$ .

4. Похилі асимптоти шукаємо у вигляді  $y = kx + b$ .

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x(x-2)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left[ \frac{(x+1)^2}{x-2} - x \right] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x+1}{x-2} = 4.$$

Отже,  $y = x + 4$  – похила асимптота.

5. Знаходимо точки екстремуму та визначаємо інтервали монотонності функції.

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-2) - (x+1)^2}{(x-2)^2} = \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} = \frac{(x+1)(x-5)}{(x-2)^2}$$

6. Для знаходження критичних точок розв'язуємо рівняння  $f'(x)=0$ , тобто  $(x+1)(x-5)=0$ , звідки знаходимо  $x_1 = -1, x_2 = 5$ . Критичні точки  $x_1 = -1, x_2 = 5$  та точка  $x = 2$  (це точка розриву функції) поділяють область визначення функції на інтервали, які вказані на наведеній нижній схемі.



Отже,  $y_{\max} = y(-1) = 0$   $y_{\min} = y(5) = 12$ .

На проміжку  $(-\infty, -1) \cup (5, +\infty)$  функція зростає;

На проміжку  $(-1, 2) \cup (2, 5)$  функція спадає.

7. Знаходимо точки перегину графіка кривої та визначаємо інтервали опуклості та вгнутості,

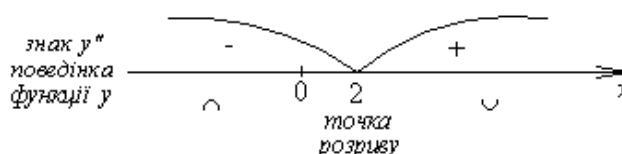
$$f'(x) = \left| \frac{x^2 - 4x - 5}{(x-2)^2} \right| = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2 - 4x - 5)2(x-2)}{(x-2)^4} = \frac{18}{(x-2)^3}$$

$f'(x) \neq 0$ ;

$f'(x) < 0$  на проміжку  $(-\infty, 2)$ , тобто крива опукла на цьому проміжку;

$f'(x) > 0$  на проміжку  $(2, +\infty)$  тобто крива вгнута на цьому проміжку.

Точок перегину немає, бо точка  $x = 2$ , в околі якої змінюється знак другої похідної, є точкою розриву функції. Результати цього дослідження наведені на схемі.



Тут знак  $\cap$  означає опуклість,  $\cup$  - вгнутість.

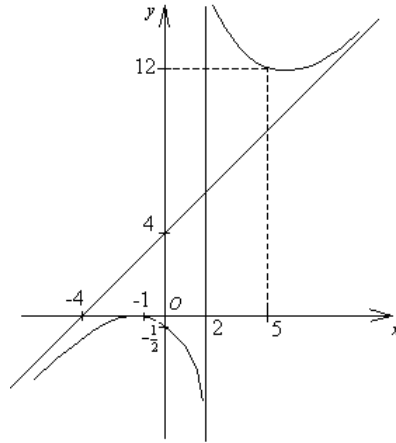
8. Проводимо додаткові дослідження:

а) на інтервалі  $(-\infty, 2)$   $f(x) < 0$  (графік нижче осі  $Ox$ ), на інтервалі  $(2, +\infty)$

$f(x) > 0$  (графік вище осі  $Ox$ );

б) дослідимо поведінку функції на нескінченності:  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{(x+1)^2}{x-2} = \pm\infty$

На основі досліджень поступово будуємо графік функції  $f(x) = \frac{(x+1)^2}{x-2}$ .



### Контрольні питання:

1. Дайте визначення похідної. Наведіть геометричний та механічний зміст.
2. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції.
3. Основні правила диференціювання.
4. Похідні основних елементарних функції.
5. Логарифмічне диференціювання.
6. Як знаходять похідні першого та другого порядку від функції, заданої неявно рівнянням  $F(x, y) = 0$  ?
7. Як знайти проміжки зростання та спадання функції?
8. Як знайти екстремуми функції?
9. Знаходження найбільшого та найменшого значення функції на відрізку.
10. Схема повного дослідження функції.