МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

173 Авіоніка
Авіоніка

за темою – Невизначений та визначений інтеграли

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, Пузир М.С.

Рецензенти:
***1**.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
***2**.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Інтеграл. Основні поняття.
2. Методи інтегрування.
3. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
4. Інтеграли типу $\int R(\sin x, \cos x)dx$.
5. Визначений інтеграл.

Рекомендована література:

Основна

1. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П, Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7 Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський

державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf
14. https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na

Текст лекції

1. Інтеграл. Основні поняття.

Означення первісної та невизначеного інтеграла

Визначення. Функція $y=F(x)$ називається первісною для функції $y=f(x)$, якщо $F'(x)=f(x)$ (або $dF(x)=f(x)dx$).

Якщо функція $y=F(x)$ – первісна для функції $y=f(x)$, то всі функції, $y=F(x)+C$, де С – довільна стала , теж первісні функції $y=f(x)$.

Визначення. Вираз $F(x)+C$, де $F(x)$ похідна функції $y=f(x)$, а С – довільна стала, називається невизначеним інтегралом від функції $y=f(x)$ і позначається $\int f(x)dx=F(x)+C.$ Операція знаходження первісної для даної функції називається інтегруванням функції.

Теорема 1

Якщо функція $y=f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має первісну.

У подальшому будемо розглядати підінтегральні функції тільки на відрізках їх неперервності, тому теорема звільняє від необхідності кожного разу досліджувати умови існування інтеграла. Інтеграли, які ми розглядаємо, існують. При цьому існують елементарні функції , первісні яких не виражаються за допомогою скінченого числа елементарних функцій.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції: $\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$

2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx.$

3. Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює цій функції плюс довільна стала: $\int dF(x)=F(x)+C$.

4. Невизначений інтеграл від суми скінченого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від функцій.

5. Сталий множник можна винести за знак інтеграла: $\int af(x)dx=a\int f(x)dx.$

6. Якщо $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, то $\int f(ax+b)dx=\frac{1}{a}F(ax+b)+C, C=const.$

7. Якщо $\int f(x)dx = F(x) + C$ і $u = \varphi(x)$ – диференційована функція, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

Таблиця інтегралів

Таблиця основних інтегралів випливає із означення невизначеного інтеграла і таблиці похідних. Справедливість формул легко перевірити диференціюванням.

1. $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ (\alpha \neq -1),\ \int 1\cdot dx = x + C.$

2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$

3. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

4. $\int e^x dx = e^x + C.$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\,arctg\frac{x}{a} + C.$

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$

18. $\int tgx\,dx = -\ln|\cos x| + C.$

19. $\int ctgx\,dx = \ln|\sin x| + C.$

20. $\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + C.$

21. $\int \sqrt{x^2 + a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$

2. Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Обчислення невизначеного інтеграла з використанням таблиці інтегралів та властивостей інтегралів називають безпосереднім інтегруванням. Для обчислення використовують тотожні перетворення підінтегральної функції, щоб звести інтеграл до табличного. Цей метод базується на рівності $dx = \frac{1}{a}d\left(ax + b\right),$ де a та b – сталі й застосовується у тих випадках, коли підінтегральна функція $f\left(x\right)$ має вигляд однієї із підінтегральних функцій табличних інтегралів, але аргумент відрізняється від змінної інтегрування постійним доданком або постійним множником, або постійним доданком і множником.

<u>Приклади 1-6</u>. Знайти інтеграли:

1. $\int\left(2x+1\right)^2 dx.$

Розв'язання.

$$\int\left(2x+1\right)^2 dx = \int\left(4x^2 + 4x + 1\right)dx = 4\int x^2 dx + 4\int x dx + \int dx = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

2. $\int\left(x+3\right)^8 dx.$

Розв'язання. $\int\left(x+3\right)^8 dx = \int\left(x+3\right)^8 d\left(x+3\right) = \frac{\left(x+3\right)^9}{9} + C.$

3. $\int\cos\frac{x}{2}dx.$

Розв'язання. $\int\cos\frac{x}{2}dx = 2\int\cos\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} + C.$

4. $\int\frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sin^2 x}.$

Розв'язання.

$$\int\frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x} = \int\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int\frac{dx}{\cos^2 x} + \int\frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

5. $\int\frac{\left(arctgx\right)^2}{1+x^2}dx.$

Розв'язання.

$$\int\frac{\left(arctgx\right)^2}{1+x^2}dx = \int\left(arctgx\right)^2 d\left(arctgx\right) = \frac{\left(arctgx\right)^3}{3} + C.$$

6. $\int\frac{x}{x+5}dx.$

Розв'язання. $\int\frac{x}{x+5}dx = \int\frac{x+5-5}{x+5}dx = \int dx - 5\int\frac{dx}{x+5} = x - 5\ln\left|x+5\right| + C.$

Метод заміни змінної (підстановки).

Метод інтегрування полягає в тому, що замість змінної x вводять нову змінну t за допомогою підстановки $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – неперервна функція що має неперервну похідну $\varphi'(t)$ і обернену функцію $t=\phi(x)$. Заміна змінної проводиться за формулою: $\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, тобто щоб виконати заміну змінної, треба перетворити до нової змінної підінтегральний вираз. Часто замість підстановки $x=\varphi(t)$використовують підстановку $t=g(x)$. Роблять це в тому випадку, коли підінтегральний вираз $f(x)dx$ можна подати у вигляді $\Phi(g(x))g'(x)dx$, тоді вводять нову змінну $t=g(x)$ і одержують: $\int f(x)dx=\int\Phi(g(x))g'(x)dx=\int\Phi(t)dt.$

Успіх у використанні методу заміни змінної залежить від того, наскільки вдалою буде заміна змінної, що спрощує інтеграл.

Приклади 7-12. Знайти інтеграли:

7. $\int x\sqrt{x-3}\,dx.$

Розв'язання. Замінимо $\sqrt{x-3}=t,$звідки $x=t^2+3, dx=2tdt.$ Тоді маємо:

$$\int x\sqrt{x-3}\,dx=\int\left(t^2+3\right)\cdot t\cdot 2t\,dt=2\int\left(t^4+3t^2\right)dt=\frac{2}{5}t^5+2t^3+C=\frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5}+2\sqrt{(x-3)^3}+C.$$

8. $\int\frac{dx}{\cos x\sin x}.$

Розв'язання. $$\int\frac{dx}{\cos x\sin x}=\int\frac{dx}{\cos^2 x\,tgx}=\begin{bmatrix} tgx=t, \\ \frac{dx}{\cos^2 x}=dt\end{bmatrix}=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=\ln|tgx|+C.$$

9. $\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx.$

Розв'язання. $$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\cdot\sin x}{\cos^4 x}dx=\begin{bmatrix}\cos x=t,\ \sin xdx=-dt, \\ \sin^2 x=1-t^2\end{bmatrix}=$$

$$\int\frac{t^2-1}{t^4}dt=\int\frac{1}{t^2}dt-\int\frac{1}{t^4}dt=\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{t}+C=\frac{1}{3\cos^3 x}-\frac{1}{\cos x}+C.$$

10. $\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}.$

Розв'язання. $$\int\frac{dx}{4x^2+4x+5}=\frac{1}{4}\int\frac{d(x)}{x^2+x+\frac{5}{4}}=\frac{1}{4}\int\frac{d\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1}=$$

$$=\begin{bmatrix}x+\frac{1}{2}=t, \\ dx=dt\end{bmatrix}=\frac{1}{4}\int\frac{dt}{t^2+1}=\frac{1}{4}arctgt+C=\frac{1}{4}arctg\left(x+\frac{1}{2}\right)+C.$$

Для обчислення інтеграла використаний прийом виділення повного квадрата в знаменнику.

11. $\int\frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx.$

Розв'язання. $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}dx = \left| \begin{array}{l} 2\ln x+3=t \\ \frac{2dx}{x}=dt \\ \frac{dx}{x}=\frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int t^3\,dt = \frac{1}{8}t^4 + C =$

$|t=2\ln x+3| = \frac{1}{8}(2\ln x+3)^4 + C; =$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)}.$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\cdot\left(1+\sqrt[3]{x+3}\right)} = \begin{bmatrix} x+3=t^6, \\ dx=6t^5dt \end{bmatrix} = \int \frac{6t^5dt}{t^3\left(1+t^2\right)} = 6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt =$

$= 6\left(\int dt - \int\frac{dt}{1+t^2}\right) = 6\left(t - arctgt\right) + C =$

$= 6\sqrt[6]{x+3} - 6arctg\sqrt[6]{x+3} + C.$

Інтегрування частинами

Цей метод інтегрування базується на використанні формули $\int udv = uv - \int vdu,$ де $u=u(x),\ v=v(x)$ – диференційовані функції. Дана формула випливає з формули диференціала добутку двох функцій: $d(uv)=udv+vdu$, або $udv=d(uv)-vdu.$ Проінтегрувавши останню рівність, одержуємо формулу інтегрування частинами: $\int udv = uv - \int vdu.$ Як бачимо, цю формулу використовують для інтегрування виразів, які можна подати у вигляді добутку двох множників u і dv. При цьому знаходження функції v по її диференціалу dv і обчислення інтеграла $\int vdu$ повинно бути простішим, ніж обчислення інтеграла $\int udv$.

Основні рекомендації використання методу інтегрування частинами.

Якщо підінтегральна функція має вигляд:

А) $P_n(x)\cos\alpha x,\ P_n(x)\sin\alpha x,\ P_n(x)e^{\alpha x}$, то за u приймають многочлен $P_n(x)$;

В) $P_n(x)\ln x,\ P_n(x)\arcsin x,\ P_n(x)arctgx,$ то за u приймають відповідно функції $\ln x,\ \arcsin x,\ arctgx$;

С) $e^{\alpha x}\cos\beta x,\ e^{\alpha x}\sin\beta x,$ то немає різниці , що брати за u.

<u>Приклади 13-15</u>. Знайти інтеграли:

13. $I=\int x\cos x\,dx.$

Розв'язання. $I=\int x\cos x\,dx = \begin{bmatrix} u=x,\ dv=\cos xdx, \\ du=dx,\ v=\sin x \end{bmatrix} = x\sin x - \int\sin xdx =$

$= x\sin x + \cos x + C.$

14. $\int \ln x\,dx.$

Розв'язання. $\int \ln x\,dx = \begin{bmatrix} u=\ln x,\ dv=dx, \\ du=\frac{1}{x},\ v=x. \end{bmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$

15. $\int xarctgx\,dx.$

Розв'язання. $\int x\cdot arctgx\,dx = \left[\begin{array}{l} u = arctgx,\ \ dv = xdx, \\ du = \dfrac{dx}{x^2+1},\ v = \dfrac{1}{2}x^2 \end{array}\right] =$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\left(\int dx - \int\frac{dx}{1+x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^2 arctgx - x + arctgx\right) + C.$$

3. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.

В ході виконання навчальних завдань студенти повинні усі дії супроводжувати необхідними поясненнями застосувань теоретичних положень.

Визначення. Дріб називається раціональним, якщо його чисельник і знаменник є многочленами, тобто має вигляд: $\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$. Раціональний дріб називається правильним, якщо $m > n$.

Визначення. Найпростішими дробами називаються дроби такого вигляду:

I. $\dfrac{A}{x-a}$. **II.** $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2$). **III.** $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$ ($p^2 - 4q < 0$).

Інтегруються найпростіші дроби за допомогою методів, які розглянуто вище.

Теорема 2. Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

Вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника. При цьому можуть бути такі випадки:

1. Корені знаменника дійсні та різні, тобто $Q_m(x) = (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)\ldots(x-a_m)$. У цьому випадку дріб розкладається на суму найпростіших дробів І-го типу:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \ldots + \frac{A_m}{x-a_m};$$

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, тобто $Q_m(x) = (x-a)(x-\beta)^k$. Тобі дріб розкладається на суму найпростіших І та ІІ типів:

$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k};$$

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, крім того знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники.

Тобто $Q_m(x) = (x-a)(x-\beta)^k(x^2+px+q)$. У цьому випадку дріб розкладається на суму дробів І, ІІ, ІІІ-го типів.

Процес інтегрування раціонального дробу складається з таких етапів.

А) Якщо задано неправильний раціональний дріб, слід виділити з нього цілу частину, тобто подати його у вигляді $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)} = M_{m-n}(x) + \dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$, де дріб $\dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$ – правильний.

Б) Розкласти знаменник дробу на лінійні та квадратичні множники.

В) Правильний раціональний дріб розкласти на найпростіші дроби.

Г) Обчислити коефіцієнти в розкладі дробу, використовуючи метод невизначених коефіцієнтів.

Д) Проінтегрувати одержану суму найпростіших дробів.

Приклади 16-18. Знайти невизначені інтеграли.

16. $\int \frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\,dx.$

Розв'язання.

Оскільки корені знаменника дійсні і різні, то дріб розкладається на суму двох найпростіших дробів першого типу: $\frac{38x-82}{(x-3)(x-4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4}$. Зведемо дроби до загального знаменника, одержимо рівність. Ця рівність виконується для будь-яких значень x. $38x-82 = A(x-4)+B(x-3)$. При $x=3$ маємо $38\cdot 3-82=-A$, Звідки одержуємо А= -32. При $x=4$ маємо $38\cdot 4-82=B;\ B=70.$

Таким чином, даний інтеграл розкладаємо і обчислюємо: $\int \frac{38x-82}{(x-3)(x-4)}\,dx = \int \frac{-32}{x-3}\,dx + \int \frac{70}{x-4}\,dx = -32\ln|x-3| + 70\ln|x-4| + C.$

17. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2}.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є правильним дробом, знаменник якого має дійсні корені, серед яких є кратні, тому розклад на найпростіші доби буде містити дроби І та ІІ типів.

$$\frac{x}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)}.$$

Зводимо дроби до загального знаменника, одержуємо тотожність $x = A(x+1)^2 + B(x-1) + D(x^2-1).$

Розкриємо дужки, прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях, одержимо систему лінійних рівнянь з невідомими $A, B, D.$

$$\begin{cases} A + D = 0, \\ 2A + B = 1, \\ A - B - D = 0. \end{cases}$$

Розв'язавши систему, одержимо:

$$\begin{cases} A = 0{,}25, \\ B = 0{,}5, \\ D = -0{,}25. \end{cases}$$

Обчислюємо інтеграл: $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x+1} =$

$$\frac{1}{4}\ln|x-1| - \frac{1}{2}\frac{1}{x+1} - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| - \frac{1}{(2x+2)} + C.$$

18. $\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}.$

Розв'язання.

Підінтегральна функція є правильним раціональним дробом, знаменник якого має дійсний та пару комплексних коренів, тому розклад дробу на найпростіші буде містити найпростіші дроби I , III типів.

$$\frac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}.$$

Звідси $x=A(x^2+1)+(Bx+C)(x-1)$. Використавши метод невизначених коефіцієнтів, знаходимо коефіцієнти

$$A=\frac{1}{2},\ B=-\frac{1}{2},\ C=\frac{1}{2}.$$

Отже $\dfrac{x}{(x-1)(x^2+1)}=\dfrac{1}{2(x-1)}+\dfrac{-x+1}{2(x^2+1)}.$

Остаточно маємо: $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{1}{2}\int\frac{(1-x)dx}{x^2+1}=$

$$=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}arxctg-\frac{1}{4}\int\frac{d(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}arctgx-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+C.$$

4. Інтеграли типу $\int R(\sin x,\cos x)dx$.

Раціоналізація вказаного в заголовку інтеграла досягається за допомогою підстановки $u=tg\dfrac{x}{2}$ $(-\pi<x<\pi)$. Дійсно маємо

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\frac{2u}{1+u^2},$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-u^2}{1+u^2}$$

$$x=2\mathrm{arctg}u\ ,\ dx=\frac{2du}{1+u^2}\text{, тому}$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=2\int R\left(\frac{2u}{1+u^2},\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}.$$

Таким чином, отримали інтеграл від раціональної функції.

<u>**Приклад 19.**</u> Обчислити $\displaystyle\int\frac{dx}{1+\sin x}.$

Використовуючи формули універсальної підстановки, одержимо

$$\int\frac{dx}{1+\sin x}=2\int\frac{du}{(1+u)^2}=-\frac{2}{1+u}+C=-\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+C_1.$$

Зауважимо, що хоча розглядувані інтеграли завжди можна звести до інтеграла від раціонального дробу вказаним методом, при практичному його застосуванні він часто приводить до громіздких обчислень; разом з тим інші методи, зокрема підстановки виду

$$u = \sin x,\ u = \cos x,\ u = tgx,$$

інколи значно швидше дозволяють обчислити потрібний інтеграл.

У вказаних нижче випадках віддається перевага наступним підстановкам, які також раціоналізують інтеграл:

1) Якщо інтеграл має вид $\int R(\sin x)\cos x dx$, то підстановка $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ приводить цей інтеграл до виду $\int R(u)du$.

2) Якщо інтеграл має вид $\int R(\cos x)\sin x dx$, то він зводиться до інтеграла від раціональної функції заміною $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$.

3) Якщо підінтегральна функція залежить тільки від tgx, то заміна $u = tgx$, $x = arctgu,\ dx = \frac{du}{1+u^2}$ зводить цей інтеграл до інтеграла від раціональної функції

$$\int R(tgx)dx = \int R(u)\frac{du}{1+u^2}$$

4) Якщо підінтегральна функція має вид $R(\sin x, \cos x)$, але $\sin x$ і $\cos x$ входять тільки в парних степенях, то застосовується підстановка $u = tgx$, оскільки $\sin^2 x$ і $\cos^2 x$ виражаються раціонально через tgx.

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+u^2}$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{u^2}{1+u^2}$$

$$dx = \frac{du}{1+u^2}$$

<u>Приклад 20.</u>

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \left| \begin{array}{l} u = tgx, \\ x = arctgu, \\ dx = \dfrac{du}{1+u^2}, \\ \sin^2 x = \dfrac{u^2}{1+u^2} \end{array} \right| = \int \frac{du}{\left(2 - \dfrac{u^2}{1+u^2}\right)(1+u^2)} =$$

$$= \int \frac{du}{2+u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{u}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5. Визначений інтеграл.

Визначений інтеграл як границя інтегральних сум

Нехай функція $f(x)$ задана на відрізку $[a,b]$. Розіб'ємо цей відрізок на n частин: $a = x_0 < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$.

У кожному проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо довільну точку ξ_k і обчислимо відповідне значення функції $f(\xi_x)$, $k = 1,2,..., n$.

Побудуємо суму $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, яку називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Визначення. Якщо існує скінчена границя інтегральної суми при $\max \Delta x_k \to 0$, незалежна від способу ділення відрізка $[a, b]$ на частини та добору точок ξ_k, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x)dx$.

Математично це означення можна записати так: $\int_b^a f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$

Відмітимо, що числа a та b називають нижньою та верхньою межами інтегрування, відповідно.

Теорема 3. Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ або обмежена і має скінчену кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція $f(x)$ інтегрована на $[a, b]$.

Властивості визначеного інтеграла

Із означення та основних теорем про границі випливають такі властивості:

1. Постійний множник можна винести за знак визначеного інтеграла, тобто якщо A – стала, то $\int_a^b A \cdot f(x)dx = A \cdot \int_a^b f(x)dx$

2. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченої кількості функцій дорівнює такій самій алгебраїчній сумі інтегралів від кожного доданку, тобто

$$\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x) \pm ... \pm f_m(x)]dx =$$

$$\int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx \pm ... \pm \int_a^b f_m(x)dx.$$

3. Якщо поміняти місцями межі інтегрування, то визначений інтеграл змінює свій знак на протилежний, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

4. Визначений інтеграл з рівними межами дорівнює нулю, тобто

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

для будь-якої функції $f(x)$.

5. Якщо $f(x) \le \varphi(x),\ x \in [a, b],\ \text{то} \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

6. Якщо m та M – найбільше та найменше значення функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

7. $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), äåa < \xi < b$

8. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx; a < c < b$

Формула Ньютона-Лейбніца

Формула Ньютона-Лейбниця являється потужним засобом обчислення визначених інтегралів, бо за допомогою цієї формули можна обчислити визначені інтеграли для всіх функцій, для яких ми можемо знайти невизначені інтеграли.

Теорема 4. Якщо функція $F(x)$ є будь-якою первісною для неперервної функції $f(x), x \in [a,b]$, то має місце формула Ньютона-Лейбниця: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Різницю $F(b) - F(a)$ умовно позначають $F(x)\Big|_a^b$, а формулу Ньютона–Лейбниця записують так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

__Приклад 21.__ Обчислити $\int_0^1 \frac{8x}{1+x^4}dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \frac{8x}{1+x^4}dx = 4\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}dx = 4\int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = 4arctgx^2\Big|_0^1 =$$

$$4(arctg1 - arctg\,0) = 4 \cdot \frac{\pi}{4} = \pi.$$

Обчислення визначеного інтеграла

Основними методами обчислення визначеного інтеграла є інтегрування частинами і підстановки.

Формула інтегрування частинами має такий вигляд:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

__Приклад 22__. Обчислити $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \begin{bmatrix} u = x, dv = e^{-x}dx \\ du = dx,\ v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x}dx = -e^{-1} - e^{-x}\Big|_0^1 =$$

$$-2e^{-1} + 1 = \frac{e-2}{e}.$$

Теорема 5. Нехай задано інтеграл $\int_a^b f(x)dx$, де $f(x)$ неперервна на відрізку $[a;b]$. Зробимо підстановку $x = \varphi(t),\ \ \alpha \le t \le \beta$, де $\varphi(t)$ неперервно диференційована функція на відрізку $[\alpha;\beta]$.

Якщо при зміні t від α до β змінна x змінюється від a до b, тобто $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$, а складна функція $f(\varphi(t))$ визначена і неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$, тоді має місце рівність: $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$

<u>**Приклад 23.**</u> Обчислити $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx.$

Розв'язання. Введемо нову змінну $t = \sqrt{x+1}$, тоді $t^2 = x+1$, $dt = 2tdt$. Нові межі інтегрування:

x	0	3
t	1	2

Обчислюємо інтеграл: $\int_0^3 x\sqrt{x+1}dx = \int_1^2 (t^2-1)2t^2dt = 2\int_1^2 (t^4-t^2)dt = 2\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3}\right)\Big|_1^2 =$

$$= 2\left(\frac{32}{5} - \frac{8}{3}\right) - 2\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\right) = 2\left(\frac{96-40-3+5}{15}\right) = \frac{116}{15} = 7\frac{11}{15}.$$

Контрольні питання:

1. Означення первісної та невизначеного інтеграла.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця інтегралів.
4. Методи інтегрування: Безпосереднє інтегрування.
5. Методи інтегрування: Метод заміни змінної (підстановки)
6. Методи інтегрування: Інтегрування частинами
7. Інтегрування найпростіших раціональних дробів.
8. Визначений інтеграл як границя інтегральних сум.
9. Властивості визначеного інтеграла.
10. Формула Ньютона - Лейбниця.