

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія природничих дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

з навчальної дисципліни «Вища математика»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**173 Авіоніка  
Авіоніка**

**за темою** – Криволінійні та поверхневі інтеграли, формула  
Остроградського.

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 30.08.2023 № 7

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 28.08.2023 № 1

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол  
від 28.08.2023 № 1

**Розробник:**

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та  
фундаментальних дисциплін, Пузир М.С.*

**Рецензенти:**

*1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького  
національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат  
технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК  
ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

### План лекції

1. Криволінійні інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
2. Поверхневі інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.
3. Формула Остроградського.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 1. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 296 с.
2. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 2. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 276 с.
3. Денисюк В. П., Репета В. К. Вища математика. Модульна технологія навчання: Навч. посібник: У 4 ч. – Ч. 3. – К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005. – 444 с.
4. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
5. Кравченко В.В., Лубенська Т.В., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 2. Векторна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 144 с.
6. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
7. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4. Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
8. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.
9. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.
10. Андрощук Л.В., Ковтун О.І., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 7. Ряди. Диференціальні рівняння : Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

#### Додаткова

11. Бубняк Т.І. Вища математика: Навчальний посібник. - Львів: «Новий світ-2000», 2009. – 436 с.
12. Жиленко Т. І. Обчислення та застосування кратних і криволінійних інтегралів : навч. посіб. / Т. І. Жиленко, О. А. Білоус. – Суми : Сумський державний університет, 2017. – 224 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

13. [http://teta.at.ua/vishha\\_matematika\\_pidruchnik.pdf](http://teta.at.ua/vishha_matematika_pidruchnik.pdf)

14. <https://edu-lib.com/izbrannoe/dubovik-v-p-yurik-i-i-vishha-matematika-na>

## Текст лекції

### 1. Криволінійні інтеграли першого та другого роду:

#### властивості і обчислення

Нехай функція  $f(x, y)$  визначена і неперервна в кожній точці  $M(x, y)$  дуги  $AB$  плоскої гладкої або кусково-гладкої кривої  $L$ . Розітнемо дугу  $AB$  довільно на  $n$  частинних дуг так, щоб  $A_0 = A, A_1, A_2, \dots, A_n = B$ . На кожній дузі  $A_i A_{i+1}$  виберемо довільну точку  $M_i(x_i, y_i)$ . Обчислимо в цій точці значення заданої на кривій функції  $f(x, y)$  і помножимо його на довжину дуги  $A_i A_{i+1} = \Delta l_i$ . Склавши всі добутки, одержимо інтегральну суму

$$S = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta l_i \quad (1)$$

**Визначення.** Границя скінченної інтегральної суми (1), коли  $\max \Delta l_i \rightarrow 0$ , не залежить ні від способу розбиття кривої  $L$ , ні від вибору точок  $M_i$  на частинних дугах називається *криволінійним інтегралом першого роду* (або *криволінійним інтегралом по довжині дуги*) від функції  $f(x, y)$  по дузі  $AB$ .

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\max \Delta l_i \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i, y_i) \Delta l_i. \quad (2)$$

Якщо підінтегральна функція  $f(x, y) \geq 0$ , то з геометричної точки зору криволінійний інтеграл першого роду  $\int_{AB} f(x, y) dl$  визначає площу частини циліндричної поверхні, поміщеної між поверхнями  $z = f(x, y)$  і  $z = 0$ , при цьому напрямною слугує дуга кривої  $AB$ , а твірна паралельна осі  $Oz$ , тобто  $S = \int_{AB} f(x, y) dl$ .

З механічної точки зору формула криволінійний інтеграл першого роду визначає масу кривої, коли  $f(x, y)$  розглядається як густина речовини, зосередженої вздовж кривої  $AB$ , тобто  $m = \int_{AB} f(x, y) dl$ .

#### Обчислення криволінійного інтеграла першого роду

Якщо крива  $AB$  задана рівнянням  $y = f_1(x)$  ( $a \leq x \leq b$ ), то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, f_1(x)) \sqrt{1 + (y')^2} dx \quad (3)$$

**Властивості.** Має ті ж самі властивості, що й визначений інтеграл, за

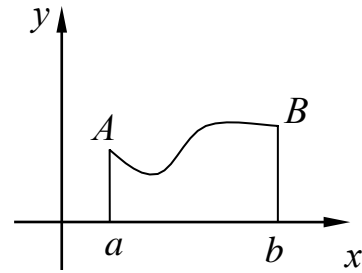


Рис. 1

винятком  $\int_{AB} f(x, y)dl = \int_{BA} f(x, y)dl$ .

### Криволінійний інтеграл другого роду

Нехай у просторі задана неперервна лінія  $L$ , на якій вказано напрямок (рис. 2).

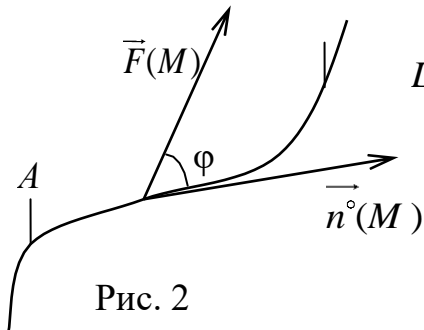


Рис. 2

Нехай у точці  $A$  її початок, а в  $B$  – кінець. Позначимо через  $\vec{n}^o(M)$  одиничний вектор дотичної до цієї лінії в кожній точці  $M(x, y, z)$  у напрямі кривої. Нехай на лінії  $L$  задана вектор-функція

$$\vec{F} = \vec{F}(M) = P(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

**Визначення.** Криволінійним інтегралом другого роду (або криволінійним інтегралом по координатах) називається інтеграл

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (4)$$

У випадку, коли дуга  $AB$  задана на площині, а на ній дві неперервні функції  $P(x, y)$  і  $Q(x, y)$ , то розглядають інтеграл другого роду у вигляді

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (5)$$

### Властивості криволінійного інтегралу 2-го роду

При обчисленні криволінійних інтегралів другого роду важливе значення має напрям інтегрування.

1. При зміні напрямку інтегрування криволінійний інтеграл знак на протилежний.

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = - \int_{BA} P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad (6)$$

2. Якщо точка  $C$  знаходиться всередині дуги  $AB$ , то криволінійний інтеграл 2-го роду обчислюється за формулою

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_{AC} Pdx + Qdy + \int_{CB} Pdx + Qdy \quad (7)$$

**Зауваження.** Якщо  $L$  замкнута крива, то криволінійний інтеграл також існує. У цьому випадку слід внапрямі інтегрування. Позитивним напрямом обходу замкнутого контуру вважається той, при якому область інтегрування залишається зліва. Інтегрування по замкнутому контуру позначається символом

$$\oint_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy. \quad (8)$$

**Обчислення.** Якщо крива  $L$  задана параметрично і  $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$ , то

$$\int_L P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} \{P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\}dt \quad (9)$$

**Приклад 2.** Обчислити  $\int_L (2 + xy^2)dx + (x^2y - 3)dy$ , де  $L$  – дуга еліпса  $x^2/4 + y^2/9 = 1$  від точки  $A(-2, 0)$  до точки  $B(2, 0)$ .

**Розв'язання.** Запишемо параметричне рівняння еліпса  $\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = 3 \sin t \end{cases}$ .

Знайдемо нові межі інтегрування  $\begin{cases} x = -2; \cos t = -1; t = \pi \\ x = 2; \cos t = 1; t = 0 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_L (2 + xy^2)dx + (x^2y - 3)dy &= \\ &= \int_{\pi}^0 \left[ (2 + 2 \cos t \cdot 9 \sin^2 t) \sin t + (4 \cos^2 t \cdot 3 \sin t - 3) 3 \cos t \right] dt = \\ &= \int_{\pi}^0 (36 \cos^3 t \sin t - 9 \cos t - 4 \sin t - 36 \sin^3 t \cos t) dt = \\ &= \left( -9 \cos^4 t - 9 \sin t + 4 \cos t + 9 \sin^4 t \right) \Big|_{\pi}^0 = 8. \end{aligned}$$

Якщо крива  $L$  задана явним рівнянням  $y = f(x)$ ,  $a < x < b$ , то

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_a^b \{ P(x, f(x)) + Q(x, f(x)) f'(x) \} dx \quad (10)$$

**Приклад 3.** Обчислити  $\int_L (xy - y^2)dx + xdy$  вздовж прямої  $y = 2x$  від точки  $A(0, 0)$  до точки  $B(2, 4)$ .

**Розв'язання.**

$$\begin{aligned} \int_L (xy - y^2)dx + xdy &= \int_0^2 (x \cdot 2x - 4x^2 + x \cdot 2)dx = \\ &= \int_0^2 (2x - 2x^2)dx = \left( x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^2 = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

## 2. Поверхневі інтеграли першого та другого роду: властивості і обчислення.

### Поверхневий інтеграл першого роду

Нехай функція  $f(M) = f(x, y, z)$  визначена і неперервна в кожній точці  $M(x, y, z)$  гладкої поверхні  $\Sigma$ .

**Визначення.** Поверхня називається гладкою, якщо в кожній її точці існує дотична

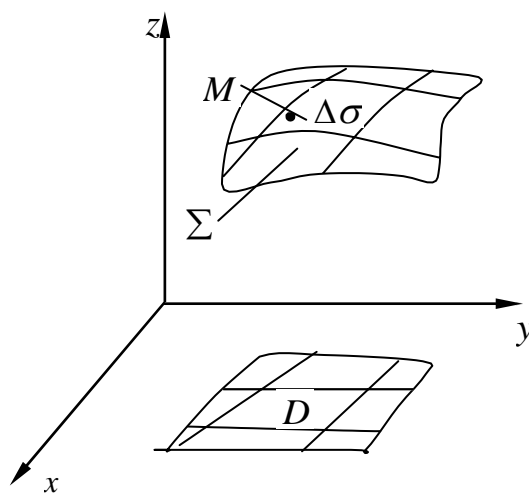


Рис. 3

площина, положення якої неперервно змінюється разом з точкою дотику.

**Визначення.** Поверхня називається *кусково-гладкою*, якщо вона складається зі скінченного числа гладких частин, що примикають одна до одної по кусково-гладких або просто гладких лініях.

Іншими словами, в кожній точці поверхні  $z = z(x, y)$  існують скінченні частинні

похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

Розіб'ємо поверхню  $\Sigma$  кусково-гладкими кривими довільним чином на частини  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ . Площу кожної частини позначимо як  $\Delta\sigma_i$ . Виберемо в кожній із цих частин довільну точку  $M_i$ , обчислимо значення функції  $F(M_i)$  у кожній із цих точок і складемо інтегральну суму

$$T = \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i. \quad (11)$$

**Визначення.** Якщо границя інтегральних сум  $T$  прямує до деякої скінченної границі за умови, що найбільший із діаметрів  $\Delta\sigma_i$  прямує до нуля, то вона називається *поверхневим інтегралом першого роду* від функції  $f(x, y, z)$  по поверхні  $\Sigma$  і позначається символом

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) d\sigma = \lim_{\max \Delta\sigma_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i. \quad (12)$$

### Зведення поверхневого інтеграла до подвійного

Обчислення поверхневого інтеграла I роду зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції поверхні  $\Sigma$  на одну з координатних площин.

Якщо поверхня, задана рівнянням  $z = z(x, y)$  і проектується на площину  $xOy$  в область  $D$ , а функція  $z(x, y)$  і її частинні похідні  $\frac{\partial z}{\partial x}$  і  $\frac{\partial z}{\partial y}$  неперервні в

замкнутій області  $D$ , то поверхневий інтеграл I роду перетворюється на подвійний інтеграл

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy \quad (13)$$

При цьому поверхневий інтеграл, що стоїть зліва, існує, якщо існує подвійний інтеграл, що стоїть у правій частині рівності (13).

### Поверхневий інтеграл другого роду

Розрізняють односторонні та двохсторонні поверхні.

Візьмемо на гладкій поверхні довільну точку  $M(x, y, z)$  і побудуємо в ній нормаль до поверхні. Якщо обходячи по будь-якому замкненому контуру, що повністю лежить на поверхні  $\Sigma$  не перетинає її межі, ми повертаємось у точку  $M$  і при цьому напрямок нормалі не змінюється, то поверхня

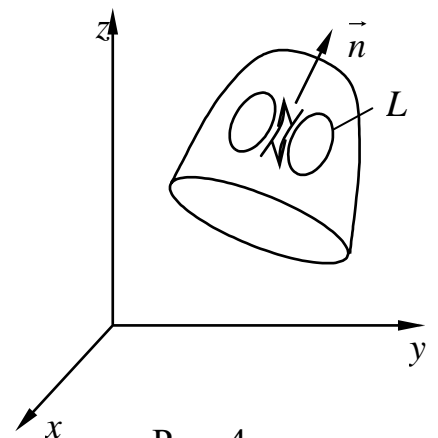


Рис. 4

називається *двосторонньою*, а якщо змінюється, то *односторонньою*. Напрямок обходу контуру  $L$  вважається позитивним, якщо спостерігач, розташований на поверхні, а його тулуб збігається з напрямком нормалі, обходить контур  $L$ , залишаючи поверхню  $\Sigma$  увесь час зліва від себе (рис. 4). Позначається

$$\Sigma^+ - \cos(\vec{n}, z) > 0, \quad \Sigma^- - \cos(\vec{n}, z) < 0.$$

Такі поверхні називаються *орієнтованими*.

Нехай на деякій орієнтованій поверхні  $\Sigma \in z = z(x, y)$  визначена неперервна функція  $F(x, y, z)$ . Виберемо певну сторону поверхні  $\Sigma$  і розіб'ємо її довільно на частини  $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ . Позначимо через  $\Delta\sigma_i$  площу проекції на площину  $xOy$  частини  $\Sigma_i$ , узятую зі знаком “плюс”, якщо на  $\Sigma_i$  обрана верхня сторона поверхні, і зі знаком “мінус”, якщо на  $\Sigma_i$  обрана нижня сторона поверхні. Візьмемо в кожній частині  $\Sigma_i$  довільну точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$ , обчислимо значення функції  $F(M_i)$  у кожній із цих точок і складемо інтегральну суму:

$$\begin{aligned} & F(x_1, y_1, z_1)\Delta\sigma_1 + F(x_2, y_2, z_2)\Delta\sigma_2 + \dots + F(x_n, y_n, z_n)\Delta\sigma_n = \\ & = \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i)\Delta\sigma_i. \end{aligned} \quad (14)$$

**Визначення.** Скінченна границя інтегральної суми при прямуванні найбільшого з діаметрів  $d(\sigma_i)$  до нуля, називається *поверхневим інтегралом другого роду* по обраній стороні поверхні  $\Sigma$  від функції  $F(x, y, z)$ , тобто

$$\iint_{\Sigma} F(x, y, z) dx dy = \lim_{\max d(\sigma_i) \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n F(x_i, y_i, z_i) \Delta\sigma_i \quad (15)$$

Ця границя не залежить ні від способу розбиття поверхні  $\Sigma$  на частини  $\Sigma_i$ , ні від вибору точок  $M_i$  у кожній з них. При цьому сторону поверхні вказують додатково. Тут  $dx dy$  площа проекції елемента поверхні на площину  $xOy$ .

Поняття поверхневого інтеграла II роду вводиться тільки для двосторонніх поверхонь.

### Зведення поверхневого інтеграла другого роду до подвійного

Нехай  $\Sigma$  – поверхня, задана рівнянням

$z = z(x, y)$  і  $R(x, y, z)$  – деяка обмежена функція на  $\Sigma$ . Тоді

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (16)$$

де  $D_{xy}$  – проекція  $\Sigma$  на площину  $xOy$ .

**Правило.** Для того, щоб інтеграл  $\iint_{\Sigma} R(x, y, z) d\sigma$ , узятий по стороні гладкої орієнтованої поверхні  $\Sigma^+$ , визначеної рівнянням  $z = z(x, y)$ , перетворити в

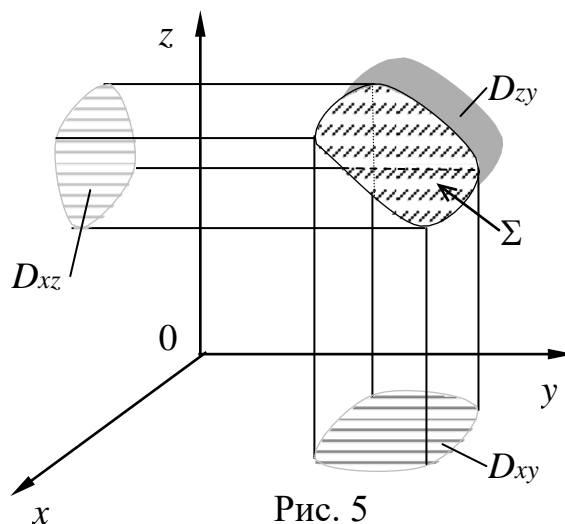


Рис. 5



подвійний, необхідно у підінтегральну функцію замість  $z$  підставити відповідно  $z = z(x, y)$ , а інтегрування по поверхні  $\Sigma^+$  замінити інтегруванням по її проекції  $D_{xy}$  на площині  $xOy$ . Якщо інтеграл береться по нижній стороні поверхні  $\Sigma_-$ , то у виразі (16) беремо знак "-" у правій частині: 
$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Аналогічно одержимо формули:

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz, \quad (17)$$

$$\iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dz dx, \quad (18)$$

де  $D_{yz}$ ,  $D_{xz}$  – проекції  $\Sigma$  на площини  $yOz$  і  $xOz$ .

### 3. Формула Остроградського

Формула Остроградського встановлює зв'язок між поверхневим інтегралом по замкненій поверхні з потрійним інтегралом по просторовій області, обмеженій цією поверхнею. Замкнена просторова область називається *простою*, якщо кожна пряма, що паралельна одній із координатних осей, перетинає межу області не більше ніж у двох точках.

**Теорема.** Нехай  $V$  – проста область, обмежена кусково-гладкою поверхнею  $\Sigma$ , і  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – функції, неперервні в області  $V$  разом із похідними  $\frac{\partial P}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$ . Тоді справедлива формула Остроградського:

$$\iiint_V \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

де поверхневий інтеграл другого роду слід обчислювати по зовнішній стороні поверхні  $\Sigma$ , яка обмежує область  $V$ .

**Зауваження** Використовуючи адитивну властивість поверхневого інтеграла, можна цю формулу узагальнити на довільну замкнену область  $V$ , яку можна розбити на скінченну кількість простих областей.

### Контрольні питання:

1. Криволінійний інтеграл першого роду.
2. Криволінійний інтеграл другого роду.
3. Поверхневий інтеграл першого роду.
4. Поверхневий інтеграл другого роду.
5. Формула Остроградського.