МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін

МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2023 №7

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2023 №7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08. 2023 №1

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.
Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:
***1**.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
***2**.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		Лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр № 5							
Тема № 1. Елементи теорії матриць та визначників.	10	2		4		4	
Тема № 2. Загальна теорія систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР).	12	2		4		6	
Тема № 3. Елементи векторної алгебри.	12	2		4		6	
Тема № 4 Елементи аналітичної геометрії.	14	2		4		8	
Тема № 5. Границя функції. Неперервність.	12	2		4		6	
Тема № 6. Похідна та диференціал функції.	14	2		4		8	
Тема № 7. Інтегральне числення.	12	2		4		6	
Тема № 8. Диференціальні рівняння першого порядку.	16	2		6		8	
Тема № 9. Ряди.	18	4		6		8	
Всього за семестр:	**120**	**20**		**40**		**60**	**Екзамен**

2. Методичні вказівки до практичних занять

ТЕМА № 1. Матриці та визначники.
Практичне заняття №1. Матриці та дії над ними. Обчислення визначників.
Навчальна мета заняття: Навчити курсантів виконувати лінійні операції з матрицями та виконувати множення матриць, обчислювати визначники II-го та III-го порядків.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Додавання (віднімання) матриць, множення матриці на число.
2. Обчислення лінійних комбінацій матриць.
3. Множення матриць.
4. Обчислення визначників.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
7(с.8-24), **8**(с.6-19), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Що називається матрицею?
2. Як позначаються елементи матриці?
3. Що таке розмірність матриці?
4. Яка матриця називається квадратною?
5. Що називається порядком матриці?
6. Яка матриця називається діагональною?
7. Яка матриця називається одиничною? Як вона позначається?
8. Які матриці можна додавати?
9. Як виконується додавання (віднімання) матриць?
10. Властивості операції додавання матриць.
11. Як множити матрицю на число?
12. Що називається лінійною комбінацією матриць?
13. Які матриці називаються узгодженими?
14. Як виконується множення матриць?
15. Властивості операції множення матриць.
16. Що таке транспонування матриці?
17. Властивості операції транспонування матриці.

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Додавання (віднімання) матриць, матриці множення на число

Приклад 1. Знайти суму та різницю матриць:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix};\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Додаємо елементи матриць, що стоять на відповідних місцях:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2+3 & -1+2 & 3-2 \\ -2-4 & 4+1 & 1-1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ -6 & 5 & 0 \end{pmatrix};$$

Віднімаємо елементи матриць, що стоять на відповідних місцях:

$$A-B=\begin{pmatrix} 2-3 & -1-2 & 3+2 \\ -2+4 & 4-1 & 1+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Знаючи матрицю A (дивись приклад 1), знайти матриці $2A$ і $-3A$.

Розв'язання. Кожний елемент матриці A множимо на число 2, дістаємо матрицю $2A$. Аналогічно, кожний елемент матриці A множимо на число -3, дістаємо матрицю $-3A$

$$2A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ -4 & 8 & 2 \end{pmatrix};\quad -3A=\begin{pmatrix} -6 & 3 & -9 \\ 6 & -12 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Знаходження лінійної комбінації матриць

Приклад 3. Знйти лінійну комбінацію матриць $3A$-$2B$+$4C$, якщо

задані матриці; $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Знаходимо

$$3A\text{-}2B\text{+}4C=3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}-2\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}+4\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -6 & 12 \\ 9 & 15 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ -8 & 2 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -4 & 8 \\ 8 & -12 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 10 & -2 \\ 17 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. Множення матриць

Приклад 4. Дано дві матриці $A=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти AB та BA

Розв'язання. Знайдемо AB:

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+7\cdot3 & 1\cdot(-2)+7\cdot(-1) & 1\cdot0+7\cdot5 \\ 3\cdot1+4\cdot3 & 3\cdot(-2)+4\cdot(-1) & 3\cdot0+4\cdot5 \\ (-1)\cdot1+0\cdot3 & (-1)\cdot(-2)+0\cdot(-1) & (-1)\cdot0+0\cdot5 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

А тепер знайдемо BA:

$$BA=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot1+(-2)\cdot3+0\cdot(-1) & 1\cdot7+(-2)\cdot4+0\cdot0 \\ 3\cdot1+(-1)\cdot3+5\cdot(-1) & 3\cdot7+(-1)\cdot4+5\cdot0 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}.$$

З наведеного прикладу видно, що $AB \neq BA$.

4. Обчислення визначників.

Визначники другого порядку обчислюємо за формулою:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Приклад 5. Обчислити визначники ІІ-го порядку:

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot5-(-3)\cdot4=22; \quad \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 3 \end{vmatrix}=-2\cdot3-(-3)\cdot(-4)=-16$$

Приклад 6. Обчислити визначник ІІІ-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ за правилом Саррюса.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 4\cdot 1 + (-3)(-2)(-1) + 1\cdot 5\cdot 3 - 3\cdot 4\cdot(-1) - 1\cdot(-3)\cdot 1 - 2\cdot 5\cdot(-2) =$$

$$= 8 - 6 + 15 + 12 + 3 + 20 = 52.$$

Приклад 7. Обчислити визначник III-го порядку $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix}$, розкриваючи його за елементами I-го рядка.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2A_{11} - 3A_{12} + 3A_{13} = 2\cdot(-1)^2 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 3\cdot(-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+3\cdot(-1)^4 \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 14 + 3\cdot(-1) + 3\cdot 9 = 28 - 3 + 27 = 52.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання:

1) Дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти: а) $3A + 4B$; б) AB.

2) Обчислити визначники $\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -8 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 1 & -5 \end{vmatrix}$.

3) Обчислити визначники, розкладаючи їх за будь-яким рядком або стовпцем: а) $\begin{vmatrix} -5 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$, б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

ТЕМА № 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)
Практичне заняття № 2. Метод Крамера. Матричний метод.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв'язувати СЛАР.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Метод Крамера.
2. Матричний метод.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8(с.67- 74), **7**(с.25-27,32-40), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Запишіть у загальному вигляді систему лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Що називається розв’язком системи?
3. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною?
4. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною, невизначеною?
5. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи.
6. Обґрунтуйте матричний метод розв’язання систем лінійних рівнянь.
7. Який визначник називається головним визначником системи?
8. Які визначники називаються допоміжними визначниками системи?
9. Запишіть правило Крамера розв’язання невироджених систем лінійних рівнянь. До яких рівнянь його можна застосовувати?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв’язання задач).

1. Метод Крамера

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв’язати її за формулами Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв’язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0, \text{ тобто система сумісна.}$$

Знайдемо розв’язок за формулами Крамера. Для цього знайдемо допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -464,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -232,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -116.$$

Підставляючи знайдені значення визначників до формул Крамера, одержуємо розв'язок системи

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

2. Матричний метод

Приклад 2. Розв'язати систему матричним методом

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо систему рівнянь у матричній формі $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 \\ 20 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці системи відмінний від нуля, то матриця A має обернену, і розв'язок системи має вигляд $X = A^{-1}B$.

Для обчислення оберненої матриці A^{-1}, скористаємось формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Обчислюємо алгебраїчні доповнення елементів матриці A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -23, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} = -16, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

Оберненою матрицею системи є матриця $A^{-1} = -\dfrac{1}{58}\begin{pmatrix} -23 & -16 & -1 \\ -2 & -14 & 10 \\ -13 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$

Матричний розв'язок системи має вигляд:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-23&-16&-1\\-2&-14&10\\-13&-4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\20\\6\end{pmatrix}=-\frac{1}{58}\begin{pmatrix}-464\\-232\\-116\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\4\\2\end{pmatrix},$$

звідки $x_1=8,\quad x_2=4,\quad x_3=2.$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Розв’язати системи лінійних рівнянь за формулами Крамера: а) $\begin{cases}3x+5y=12,\\2x+7y=19.\end{cases}$ б) $\begin{cases}2x+y-z=8,\\-x+3y+z=-2,\\2x+3z=-5.\end{cases}$ в) $\begin{cases}2x+3y+7z=10,\\-3x-4y+5z=-13,\\-2x+y-2z=6.\end{cases}$

2) Розв’язати системи лінійних рівнянь матричним методом:

а) $\begin{cases}x+y-3z=2,\\2x-y+z=3,\\-x+2y-z=-4.\end{cases}$ б) $\begin{cases}4x+y-z=-3,\\-2x+5y-z=1,\\x+2y+z=6.\end{cases}$

ТЕМА № 2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Практичне заняття № 3. Метод Жордана - Гауса

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв’язувати СЛАР.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Метод Жордана – Гауса.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

9(с.67- 74), **7**(с.25-27,32-40), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається розв’язком системи?
2. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною?
3. Яка система лінійних рівнянь називається визначеною, невизначеною?
4. Сформулюйте теорему Кронекера-Капеллі – критерій сумісності системи.
5. Поясніть суть методу Жордана-Гауса розв’язання систем лінійних рівнянь.
6. У чому полягає схема жорданових виключень?

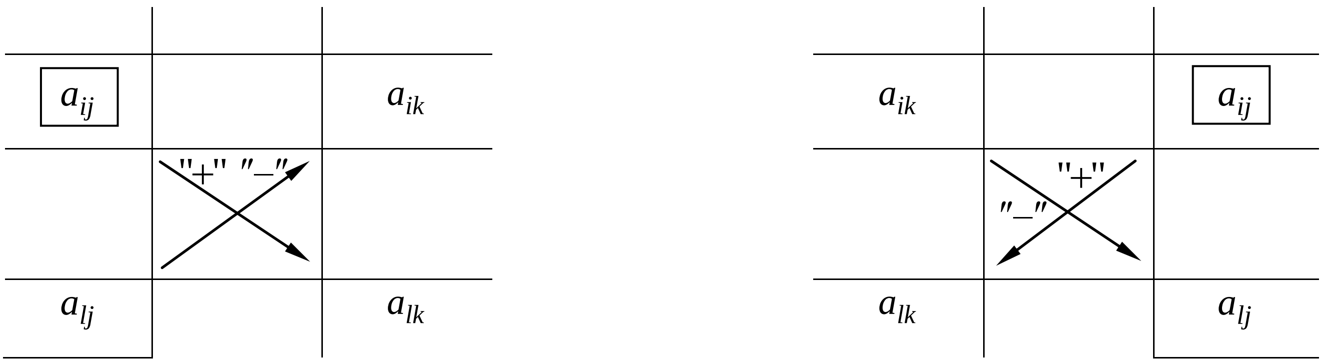
II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв’язання задач).

1. Метод Жордана – Гауса.

Метод Жордана-Гаусса відрізняється від методу Гаусса тим, що невідомі послідовно виключаються не тільки з наступних рівнянь, але й з попередніх. Розв'язок системи рівнянь зводиться до перетворення жорданових таблиць. Перехід від однієї таблиці до іншої відбувається за допомогою двох кроків:
1-й крок. Серед елементів таблиці $a_{ij} \neq 0$ вибирають розрахунковий елемент. Рядок і стовпець, на перетині яких розташовано розрахунковий елемент, називаються відповідно *розрахунковим рядком* та *стовпцем*.
На першому кроці всі елементи розрахункового рядка діляться на розрахунковий елемент. Далі всі елементи розрахункового стовпця, окрім розрахункового елемента, замінюють нулями.
2-й крок. Усі інші елементи жорданової таблиці обчислюють за правилом прямокутника. Нехай a_{ij} – розрахунковий елемент. Нам потрібно отримати отримати на місці елемента a_{lk} новий елемент a'_{lk}:

$$a'_{lk} = \frac{a_{ij} \cdot a_{lk} - a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}} = a_{lk} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}$$

Розрахунки зображено на схемі.



Після перетворень й отримання другої таблиці вибирають новий розрахунковий елемент і відбувається перехід до третьої таблиці й т.д. Жорданові перетворення закінчуються після визначення розрахункових елементів, кількість яких дорівнює рангу матриці системи.
Розв’язання системи в таблицях інколи називають методом жорданових виключень.
Примітка. Двічі в одному рядку вибирати розрахунковий елемент недоцільно.
Приклад 2. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом жорданових виключень

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 = -5, \\ \ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 17, \\ \ x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв’язання. Записуємо систему у вигляді таблиці.

	x_1	x_2	x_3
T_1	2	1	–3
	$\boxed{1}$	–2	2
	1	1	3
T_2	0	5	–7
	1	–2	2
	0	3	1
T_3	0	$\boxed{26}$	$\boxed{0}$
	1	–8	0
	0	3	1
	0	1	0
	1	0	0
	0	0	1

Коментар

При переході до другої таблиці згідно із алгоритмом вибираємо a_{21} за розрахунковий елемент.

При переході до третьої таблиці за розрахунковий вибираємо елемент a_{33}.

При переході до четвертої таблиці за розрахунковий вибираємо елемент a_{12}.

У результаті трьох кроків жорданових перетворень система транспонувалась у наступну

$$\begin{cases} x_2 = -5, \\ x_1 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Приклад 3. Розв’язати систему методом Жордана-Гаусса

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2, \\ -4x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 4x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 3. \end{cases}$$

Розв’язання.
Розвяжемо систему методом Жордана – Гауса.
Записуємо систему у вигляді таблиці.

База	x_1	x_2	x_3	x_4	b_0
T_1	3	–1	$\boxed{2}$	–1	2
	–2	5	–5	4	–1
	2	3	–1	2	3
T_2	–3	1	–2	1	–2
	11	0	5	–1	9
	11	0	5	–1	9
T_3	8	1	17	0	7

Коментар

У системі базисні змінні не визначено. Вводимо до базису x_2.

На другому кроці вводимо до базису x_4.

	–11 0	0 0	–5 0	1 0	–9 0

У результаті двох кроків жорданових перетворень ми отримали систему з двома лінійно незалежними рівняннями

$$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 17x_3 = 7, \\ -11x_1 - 5x_3 + x_4 = -9. \end{cases}$$

Тут базисні змінні – x_2, x_4 а вільні – x_1, x_3. Загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{cases} x_2 = 7 - 8x_1 - 17x_3, \\ x_4 = -9 + 11x_1 + 5x_3. \end{cases}$$

Базисними розв'язками системи будуть – $X_2 = (1,\ -1,\ 0,\ 2)$, $X_3 = (0,\ -10,\ 1,\ -4)$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Розв'язати системи лінійних рівнянь за методам

Жордана – Гауса: а) $\begin{cases} x + 2y - 3z = 1, \\ 2x - y - 3z = 0, \\ 3x + 2y - z = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 12, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9. \end{cases}$

ТЕМА № 3. Геометричні вектори

Практичне заняття № 4. Лінійні операції над векторами. Добутки векторів

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розв'язувати задачі на геометричні вектори, обчислювати добутки векторів

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Координати вектора.
2. Лінійні операції над векторами.
3. Добутки векторів

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.90-95,99-106), **7**(52-66), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається вектором, нульовим вектором, модулем вектора? Запишіть як їх позначають.
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними?
3. Які вектори називають рівними?
4. Що називають сумою двох векторів? Поясніть, як додають вектори за правилами трикутника та паралелограма.
5. Що називають добутком вектора на число? Запишіть властивості додавання та добутку вектора на число.
6. Що називається ортом даного вектора? Яким чином пов'язані даний вектор та його орт?
7. Який вектор називають протилежним даному? Як знайти різницю двох векторів?
8. Що називається проекцією вектора на вісь? Запишіть та пояснить формули для обчислення проекцій.
9. Яким чином додають та множать на число вектори, що задані координатами?
10. Продовжить речення: "Координати колінеарних векторів … ."
11. Яким чином обчислюють координати та модуль вектора?
12. Який вектор називається радіусом-вектором?
13. Що називають напрямними косинусами вектора? Як їх визначають?
14. Що називається скалярним добутком векторів?
15. У якому випадку скалярний добуток дорівнює нулю?
16. Напишіть формулу скалярного добутку в координатах?
17. Як знайти кут між векторами?
18. Який фізичний зміст скалярного добутку?
19. Який добуток векторів називається векторним?
20. Який геометричний зміст векторного добутку?
21. Який фізичний зміст векторного добутку?
22. Як обчислити векторний добуток в координатах?
23. Що називається мішаним добутком трьох векторів?
24. Напишіть мішаний добуток у координатах.
24. Який геометричний зміст мішаного добутку?
25. Сформулюйте умову компланарності трьох векторів

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Координати вектора.

Приклад 1. Дано $|a| = 13, |b| = 19, |a+b| = 24$. Обчислити $|a-b|$.

Розвязання. Побудуємо суму та різницю векторів за правилом паралелограма. Тоді довжина діагоналі, що виходить із спільного початку, є модуль суми векторів, а довжина іншої діагоналі – модуль різниці. За відомою формулою, що пов'язує довжини сторін та діагоналей паралелограма, маємо: $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2+\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2$, звідки $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=2\left|\vec{a}\right|^2+2\left|\vec{b}\right|^2-\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=$

$2\cdot(13^2+19^2)-24^2=484.$ Отже, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=22.$

Приклад 2. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут 60^0, причому $|a|=5, |b|=8.$

Обчислити $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|$.

Розвязання. Побудуємо суму та різницю векторів за правилом паралелограма. Тоді довжина діагоналі, що виходить із спільного початку, є модуль суми векторів, а довжина іншої діагоналі – модуль різниці. Модуль різниці знаходимо за теоремою косинусів: $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 60^0=$

$=25+64-80\cdot 0{,}5=49,$ отже, $\left|\vec{a}-\vec{b}\right|=7.$ Аналогічно знаходимо модуль суми, але вже кут між сторонами паралелограма дорівнює 120^0. Маємо:

$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|^2=\left|\vec{a}\right|^2+\left|\vec{b}\right|^2-2\cdot\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos 120^0==25+64+80\cdot 0{,}5=129,$ отже, $\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{129}.$

Приклад 3. Дано модуль вектора $|a|=2$ і кути, які він утворює з кординатними осями $\alpha=45^0, \beta=60^0, \gamma=120^0.$ Обчислити проекції вектора на координатні осі.

Розвязання. Проекції вектора на осі знаходимо за формулами:

$a_x=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha=2\cdot\cos 45^0=\sqrt{2},\ a_y=\left|\vec{a}\right|\cos\beta=2\cdot\cos 60^0=1,\ a_z=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma=2\cdot\cos 120^0=-1.$

2. Лінійні операції над векторами.

Приклад 4. Дано два вектори $\vec{a}=\{2;-1;3\}$ і $\vec{b}=\{-2;1;0\}.$ Знайти проекції на координатні осі наступних векторів: $\vec{a}+\vec{b};\ \vec{a}-\vec{b};\ 2\vec{a}+3\vec{b}.$

Розвязання. Знаходимо: $\vec{a}+\vec{b}=\{0;0;3\};\ \vec{a}-\vec{b}=\{4;-2;3\};$

$2\vec{a}=\{4;-2;6\},\ 3\vec{b}=\{-6;3;0\},\ 2\vec{a}+3\vec{b}=\{-2;1;6\}.$

Приклад 5. Перевірити чи колінеарні вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$, якщо відомі координати точок початку і кінця цих векторів $A=(-1;\ 5;\ -10)$, $B=(5;\ -7;\ 8)$, $C=(2;\ 2;\ -7)$ і $D=(5;\ -4;\ 2)$.

Розвязання. Знаходимо координати векторів $\overrightarrow{AB}=\{6;-12;18\},\ \overrightarrow{CD}=\{3;-6;9\}.$ Перевіряємо умову колінеарності векторів (пропорційність координат):

$\frac{6}{3}=\frac{-12}{-6}=\frac{18}{9}=2.$ Вектори колінеарні.

Приклад 6. Знайти орт вектора $\vec{a}=\{6;-2;-3\}.$

Розвязання. Знаходимо модуль вектора: $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{36+4+9}=7,$ тепер знаходимо орт:

$\vec{a}^0=\left\{\frac{6}{7};-\frac{2}{7};-\frac{3}{7}\right\}.$

3. Добуток векторів

Приклад 7. Дано точки $A(-3,\ 1,\ 4), B(-5,\ -1,\ 2), C(0,\ 4,\ 1),\ D(3,\ 3,\ -1),$ $E(9,\ -5,\ 4), F(10,\ -5,\ 1)$. Потрібно: а) обчислити скалярний добуток векторів $2\overrightarrow{CD}\cdot 3\overrightarrow{EF}$; б) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; в) знайти кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$;

Розв'язання. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Дістаємо: $\overrightarrow{AB}(-2,\ -2,\ -2)$, $\overrightarrow{CD}(3,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{EF}(1,\ 0,\ -3)$.

а) Скористаємось властивістю скалярного добутку та його формулою:

$(2\overrightarrow{CD})\cdot(3\overrightarrow{EF}) = 6(\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}) = 6(3\cdot 1 + (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot(-3)) = 54$.

б) Знаходимо $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(-1,\ -1,\ -1)$. Для того, щоб вектори були колінеарними, необхідно, щоб їхні координати були пропорційними. Оскільки $\frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-2}$, то вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не колінеарні.

Ортогональність векторів перевіримо, знаходячи їх скалярний добуток:

$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CD} = (-1)3 + (-1)(-1) + (-1)(-2) = 0$. Отже, вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ортогональні.

в) Знаходимо косинус кута φ:

$$\cos\varphi = \frac{(-2,-2,-2)(1,0,-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{(-2)1+(-2)0+(-2)(-3)}{2\sqrt{30}} = -\frac{2}{\sqrt{30}},$$

тоді $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \approx 111^o 30'$.

Приклад 8. Дано точки $A(-3,\ 1,\ 4)$, $B(-5,\ -1,\ 2)$, $C(0,\ 4,\ 1)$, $D(3,\ 3,\ -1)$, $E(9,\ -5,\ 4)$, $F(10,\ -5,\ 1)$. Потрібно: а) знайти модуль векторного добутку векторів $2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$; б) обчислити мішаний добуток трьох векторів.

Розв'язання. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$.

Дістаємо: $\overrightarrow{AB}(-2,\ -2,\ -2)$, $\overrightarrow{CD}(3,\ -1,\ -2)$, $\overrightarrow{EF}(1,\ 0,\ -3)$.

а) Використаємо властивість векторного добутку:

$$(2\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{EF} = 2(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{EF}) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Модуль цього вектора знайдемо за формулою:

$$\left|(2\overrightarrow{AB})\times\overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{6^2+(-8)^2+2^2} = 2\sqrt{26}.$$

б) Оскільки мішаний добуток це – векторно-скалярний добуток, то скористаємось властивістю скалярного добутку, властивістю векторного добутку та формулою мішаного добутку:

$$(9\overrightarrow{AB}, 2CD, -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}) = -6(\overrightarrow{AB}, CD, \overrightarrow{EF}) = -6\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 132$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1. Знайти довжину та напрямні косинуси вектора $\overline{a} = (1;\,-2;\,2)$
2. Перевірити, що чотири точки A(3;-1;2), B(1;2;-1), C(-1;1;-3), D(3;-5;3) є вершинами трапеції.
3. Вектори задано в координатній формі: $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$ і $\vec{b} = 4\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$.

Знайти: а) $\vec{a} \cdot \vec{b}$; б) $(\vec{a} + \vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$.

4. Визначити, при якому α вектори $\vec{a} = (-2,\ 3,\ \alpha)$ і $\vec{b} = (-1,\ -2,\ 2)$ взаємно перпендикулярні?
5. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1,\ 1,\ 1)$, $B(2,\ 3,\ 4)$, $C(4,\ 3,\ 2)$.
6. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах:

$\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 8\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + 10\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$;

ТЕМА № 4. Пряма та криві на площині

Практичне заняття № 5. Різні види рівнянь прямої на площині.
Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити
різні види рівнянь прямої на площині.
Кількість годин – 2.

Навчальні питання:

1. Різні види рівнянь прямої на площині
2. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.119-120,127-136), **7**(с.72-80), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Напишіть загальне рівняння прямої.
2. Напишіть рівняння прямої. що проходить через дві точки.
3. Напишіть рівняння прямої з нормальним вектором.
4. Напишіть рівняння прямої з напрямляючим вектором.

5. Напишіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.
6. Напишіть рівняння прямої. що проходить через задану точку у заданому напрямку.
7. Як знайти кут між прямими?
8. Як знайти відстань від точки до прямої?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Різні види рівнянь прямої на площині

Приклад 1. Скласти рівняння прямої, що проходить через дві точки $A(1,-2)$ і $B(-3,5)$.

Розв'язання. Підставимо у формулу $x_1=1$, $x_2=-3$, $y_1=-2$, $y_2=5$, отримаємо $\frac{y-(-2)}{5-(-2)}=\frac{x-1}{-3-1} \Leftrightarrow \frac{y+2}{7}=\frac{x-1}{-4} \Leftrightarrow -4y-8=7x-7 \Leftrightarrow$ $7x+4y+1=0$.

Приклад 2. Дано вершини трикутника *ABC*: *A*(1, 2), *B*(5, 3), *C*(1, –1). Знайти: а) рівняння сторони *AB*; б) рівняння висоти *CH*; в) рівняння медіани *AM*; г) точку *N* перетину медіани *AM* і висоти *CH*; д) рівняння прямої, що проходить через вершину *C* паралельно стороні *AB*.

Розв'язання. а) Знайдемо рівняння сторони *AB* як прямої, що прохо-дить через дві задані точки *A*(1, 2) і *B*(5, 3):

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \Leftrightarrow \frac{x-1}{5-1}=\frac{y-2}{3-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{4}=\frac{y-2}{1} \Leftrightarrow x-1=4y-8 \Leftrightarrow$$

$x-4y+7=0$ – рівняння *AB*.

б) Знайдемо кутовий коефіцієнт сторони *AB*. Для цього приведемо рівняння *AB* до вигляду рівняння з кутовим коефіцієнтом

$$4y=x+7 \Leftrightarrow y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4} \;\Rightarrow\; k=\frac{1}{4}.$$

У силу перпендикулярності сторони AB і висоти CH кутовий коефіцієнт висоти, що проведена з вершини *C*, дорівнює -4. Рівняння цієї висоти має вигляд

$$y+1=-4(x-1) \quad \Leftrightarrow \quad 4x+y-3=0.$$

в) Точка *M* поділяє сторону *BC* навпіл, тому координати точки *M* знаходимо за формулами:

$$x_M=\frac{x_B+x_C}{2}, \; y_M=\frac{y_B+y_C}{2}. \text{ Тому } x=\frac{5+1}{2}=3, \; y=\frac{3+1}{2}=2.$$

Отже, *M* (3, 2).

Складемо рівняння медіани AM як прямої, що проходить через точки $A(1, 2)$ і $M(3, 2)$.

$$\frac{x-1}{3-1}=\frac{y-2}{2-2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-1}{-2}=\frac{y-2}{0} \quad \Rightarrow \quad y-2=0 \text{ – рівняння } AM.$$

г) Точку N перетину медіани AM і висоти CH знайдемо, розв'язавши систему, складену з рівнянь прямих AM і CH:

$$\begin{cases} 4x+y-3=0, \\ y-2=0; \end{cases} \quad \Rightarrow \quad N\left(\frac{1}{4};2\right).$$

д) Складемо рівняння прямої, що проходить через вершину C паралельно стороні AB.

$x-4y+7=0$ – рівняння AB, $k=\dfrac{1}{4}$. У силу паралельності прямих кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через C паралельно стороні AB, теж дорівнює $\dfrac{1}{4}$. Отже, $y-1=\dfrac{1}{4}(x-1) \Leftrightarrow x-4y+3=0.$

2. Кут між прямими. Відстань від точки до прямої.

Приклад 3. Знайти гострий кут між двома прямими $y=2x+4$ і $y=3x-1$.

Розв'язання. Оскільки нам потрібно знайти гострий кут, то формулу кута між прямими візьмемо за абсолютною величиною:

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|. \text{ В нашому випадку } k_1=2, \quad k_2=3, \quad \text{тому маємо:}$$

$$tg\varphi=\left|\frac{3-2}{1+6}\right|=\frac{1}{7}, \text{ звідси } \varphi=8^0 8'.$$

Приклад 4. Знайти відстань від точки $M_0(2;5)$ до прямої $6x+8y-5=0$

Розв'язання. Скористаємося формулою $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$. Маємо:

$$d=\frac{|6\cdot 2+8\cdot 5-5|}{\sqrt{36+64}}=\frac{47}{10}=4{,}7.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

У трикутнику ABC задані координати його вершин $A(-6;-1)$, $B(5;4;6)$, $C(5;-5)$.

1.1 Скласти рівняння сторони AB

1.2 Рівняння сторони AB записати у вигляді:

а) рівняння прямої, яка проходить через дві дані точки;

б) загального рівняння прямої;

в) рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

1.3 Скласти рівняння прямої, яка проходить через вершину C паралельно AB. Записати його у вигляді рівняння з кутовим коефіцієнтом. Знайти кут нахилу цієї прямої до осі Ox

1.4 Скласти рівняння висоти CD і записати його в загальному вигляді

1.5 Скласти рівняння медіани AM

1.6 Визначити відстань від вершини C до сторони AB

1.7 Надати геометричну інтерпретацію розв'язку.

ТЕМА № 4. Пряма та криві на площині
Практичне заняття № 6. Криві другого порядку: коло,еліпс, гіпербола, парабола.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів навичок складання рівнянь кривих ІІ-го порядку, побудови кривих за їх канонічним рівнянням.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Коло, еліпс.
2. Гіпербола, парабола.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с.119-120,127-136), **7**(с.72-80), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається кривою другого порядку?
2. Що називається колом?
3. Як записується загальне рівняння кола?
4. Що називається еліпсом?
5. Як записується канонічне рівняння еліпса?
6. Яка залежність між параметрами a, b, c еліпса?
7. Як знайти ексцентриситет еліпса та що він характеризує?
8. Напишіть рівняння директрис еліпса.
9. Що називається гіперболою?
10. Як записується канонічне рівняння гіперболи?
11. Яка залежність між параметрами a, b, c гіперболи?
12. Як знайти ексцентриситет гіперболи та що він характеризує?
13. Напишіть рівняння асимптот та директрис гіперболи.
14. Що називається параболою?
15. Як записується канонічне рівняння параболи?
16. Як називається число p і що воно означає?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Коло, еліпс.

Приклад 1. Знайти координати центра і радіус кола

$$x^2 + y^2 - x + 2y - 1 = 0.$$

Розв'язання. Потрібно перетворити це рівняння до виду

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2 .$$

Для цього виділяємо повні квадрати:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}; \qquad y^2 + 2y = (y+1)^2 - 1;$$

Задане рівняння тепер перепишемо у вигляді:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + (y+1)^2 - 1 - 1 = 0, \text{ або остаточно } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y+1)^2 = \frac{9}{4}.$$

Отже, маємо центр кола C(0,5;-1), радіус $R = \frac{3}{2}.$

Приклад 3. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо мала піввісь b = 3, координати фокуса F(5, 0).

Розв'язання. Для того, щоб написати рівняння еліпса, необхідно знайти велику піввісь a. Знаючи координати фокуса, знаходимо половину фокусної відстані c=5. Скориставшись основним співвідношенням, маємо

$$a^2 - b^2 = c^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = c^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 + 9 = 34 .$$

Звідси дістаємо канонічне рівняння еліпса : $\dfrac{x^2}{34} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$

Приклад 4. Знайти довжини осей, координати фокусів та ексцентриситет еліпса: $4x^2 + 9y^2 = 144.$

Розв'язання. Приведемо рівняння еліпса до канонічного вигляду. Для цього поділимо обидві частини на 144, дістаємо:

$$\frac{4x^2}{144} + \frac{9y^2}{144} = 1 \text{ або } \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

Звіди маємо: $a^2 = 36, b^2 = 16,$ отже, $a = 6, 2a = 12, b = 4, 2b = 8.$ Знаючи a і b, із співвідношення $a^2 - b^2 = c^2$ знаходимо $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 2\sqrt{5}.$ Координати фокусів $F_1(-2\sqrt{5};0), F_2(2\sqrt{5};0).$ Екцентриситет $\varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

2. Гіпербола, парабола

Приклад 5. Скласти канонічні рівняння: а) гіперболи; б) параболи (A – точка, що лежить на кривій, a – дійсна напіввісь, ε – ексцентриситет): а) a = 4, ε = 1,5 ; б) вісь симетрії $0y$ і A(3, –2).

Розв'язання. а) Для гіперболи маємо: $a = 4$, $e = 1,5$. $\varepsilon = \frac{c}{a}$. Знайдемо c: $c = \varepsilon a = 1,5 \cdot 4 = 6$. Далі знаходимо: $b^2 + a^2 = c^2 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 36 - 16 = 20$.

Отже, рівняння гіперболи: $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{20} = 1.$

б) Парабола симетрична відносно осі 0y, а тому її канонічне рівнян-ня має вигляд $x^2 = -2py$. Підставивши до цього рівняння координати точ-ки A, маємо: $9 = -2p(-2)$, $p = \frac{9}{4}$. Отже, рівняння параболи $x^2 = -\frac{9}{2}y$, або $y = -\frac{2}{9}x^2$.

Приклад 6. Знайти рівняння асимптот гіперболи $2x^2 - 3y^2 = 6$.

Розв'язання. У гіперболи дві асимптоти, що визначаються рівняннями $y = \pm\frac{b}{a}x$. Приведемо рівняння гіперболи до канонічного виду, поділивши обидві його частини на 6: $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1$. Звідси $a = \sqrt{3}, b = \sqrt{2}$, тому рівняння асимптот такі: $y = \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x$, або $\sqrt{2}x - \sqrt{3}y = 0$ і $\sqrt{2}x + \sqrt{3}y = 0$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1. Задано рівняння лінії другого порядку. Звести рівняння до найпростішого вигляду та визначити тип кривої:

а) $x^2 + 5y^2 - 12x + 30y + 21 = 0$

б) $x^2 + y^2 - 8x + 12y + 36 = 0$

2. Скласти рівняння кола що проходить через точки A(8;5), B(-1;-4), центр якого лежить на осі ординат.

3. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого знаходяться в точках (-4;0) і (4;0), а ексцентриситет дорівнює 0,8.

4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ох , якщо її дійсна вісь дорівнює 24, а уявна - 40.

5. Скласти рівняння гіперболи з фокусами на осі Ох, якщо довжина дійсної осі дорівнює 12, а відстань між фокусами дорівнює 20.

6. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо її фокус знаходиться в точці: а) F(5;0), б) F(0;2).

ТЕМА № 5. Комплексні числа

Практичне заняття № 8. Алгебраїчна, тригонометрична та показникова форми комплексного числа. Дії над комплексними числами.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів виконувати дії з комплексними числами

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Різні форми комплексних чисел.
2. Дії над комплексними числами у різних формах.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
9(с. 121-126), **7**(с.105-119), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1 Що називається комплексним числом?
2. Що називається уявною одиницею?
3. Які комплексні числа називаються рівними?
4. Як знайти суму (різницю) двох комплексних чисел?
5. Як знайти добуток, частку двох комплексних чисел?
6. Які числа називаються спряженими?
7. Чому дорівнює сума двох спряжених комплексних чисел?
8. У чому полягає ідея інтерпретації комплексного числа,як радіус-вектора?
9. Як записується комплексне число в тригонометричній формі?
10. Як виконується множення і ділення комплексних чисел, записаних в тригонометричній формі?
11. Як піднести до степеня комплексне число, записане в тригонометричній формі?
12. Що таке показникова форма запису комплексного числа?
13. Запишіть формулу Ейлера.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Різні форми комплексних чисел.

а) Представити в тригонометричній і показниковій формі формі наступні комплексні числа:

1)2; 2)6i; 3)3+3i; 4) 2-2i; 5)-1- i 6) z= -i

б) Представити у алгебраїчній формі наступні комплексні числа:

1) $2(\cos\pi + i\sin\pi)$; 2) $3(\cos 15^0 + i\sin 15^0)$; 3) $-2e^{i\pi}$.

2. Дії над комплексними числами у різних формах.

а) Виконати дії над числами в алгебраїчній формі:

1) $(2-3i)\pm(-1+2i)$; 2) $(2-3i)(-1+2i)$; 3) $\dfrac{2-3i}{-1+2i}$; 4) $2i^9 - 3i^{35} + 4i^{64}$.

б) Виконати дії над числами в тригонометричній формі:

1) $1{,}5(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\times 4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$; 2) $1{,}5(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}) : 4(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$;

3) $\left(1{,}5(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})\right)^3$; 4) $\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

1) Обчислити: а) $\frac{2+3i}{1-2i}$; б) $\sqrt[4]{\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}}$.

ТЕМА № 6. Функції, границі, неперервність

Практичне заняття № 8. Елементарні функції.Границі функції. Розкриття невизначеностей. Неперервність функцій.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів розрізняти класи основних елементарних функцій, розкриттю невизначеностей та знаходженню границі функції, досліджувати фунцію на неперервність

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Класи елементарних функцій та їх графіки.
2. Границі функції. Розкриття невизначеностей.
3. Неперервність функцій, точки розриву.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

5(с.142-150),**8(1)(**с.161-206), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Які функції називаються лінійними?
2. Як побудувати графік лінійної функції?
3. Які функції називаються степеневими?
4. Наведіть графіки основних степеневих функцій.
5. Які функції називаються показниковими? Графіки?
6. Які функції називаються логарифмічними? Графіки?
7. Накресліть графіки тригонометричних функцій.
8. Сформулюйте означення границі функції в точці
9. Яку функцію називають нескінченно малою, а яку - нескінченно великою?
11. Які види невизначеностей ви знаєте?

12. Як розкрити невизначеність $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$?

13. Як розкрити невизначеність $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, якщо $P(x)\to 0$ і $Q(x)\to 0$?

14. Дайте визначення неперервності функції в точці.
15. В яких точках неперервні елементарні функції?
16. В якій точці функція називається неперервною зліва (справа)?
17. В яких випадках виникають точки розриву?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Класи елементарних функцій та їх графіки.

Приклад 1. Побудувати графіки функцій:

1) $y=-3x^2$; 2) $y=\dfrac{4}{x-2}$; 3) $y=\sqrt{2x}$; 4) $y=\sin x-1$;

Приклад 2. Знайти області визначення функцій:

1) $y=\dfrac{2x+2}{|x|-3}$; 2) $y=\ln(x^2-4)$; 3) $y=\sqrt{9-x^2}$;

2. Границі функції. Невизначеності

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x-2\cos x}{x^3-1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\sin x-2\cos x}{x^3-1}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}(x^2+\sin x-2\cos x)}{\lim\limits_{x\to x_0}(x^3-1)}=$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}x^2+\lim\limits_{x\to x_0}\sin x-2\lim\limits_{x\to x_0}\cos x}{\lim\limits_{x\to x_0}x^3-\lim\limits_{x\to x_0}1}=\frac{0+0-2}{-1}=2.$$

Приклад 4. Обчислити: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{1}{x-2}=\left[\dfrac{const}{0}\right]=\infty$.

Якщо в результаті підстановки значення границі до виразу отримаємо одну із невизначеностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то їх потрібно розкривати.

Приклад 5. Обчислити: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x^2-4}{x^3-2x+3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. У подібних випадках необхідно в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого x і скоротити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-4}{x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}}{\dfrac{x^3}{x^3}-\dfrac{2x}{x^3}+\dfrac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{x^3}}{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{3}{x^3}}=\frac{2}{1}=2,$$

або, скориставшись правилом спрощеного обчислення, отримаємо той самий результат.

Приклад 6. Знайти вказану границю: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$.

Розв'язання. Підстановка числа $x = 1$ під знак границі приводить до невизначеності виду $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо на (x – 1). Скорочення можливе, оскільки $x\to 1$ (прямує), але $x\neq 1$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)}{(x+6)}=\frac{2}{7}.$$

3. Дослідження функції на неперервність

Приклад 7. Знайти точки розриву функцій, якщо вони існують. Зробити ескіз графіка.

$$\text{а)}\ f(x)=\begin{cases} x+4, & x<-1 \\ x^2+2, & -1\le x\le 1 \\ 2x, & x\ge 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Функція визначається кількома аналітичними виразами. Така функція називається *кусково-неперервною.* Основні елементарні функції є неперервними у області свого визначення. Кожна з функцій, що входить до її аналітичного виразу, є неперервною в своїй області визначення. Точками можливого розриву графіка функції є ті, в яких змінюється аналітичний вираз, тобто точки $x=-1$ і $x=1$. Обчислимо односторонні границі в цих точках.

Для точки $x=-1$ маємо:

$$\lim_{x\to -1-0} f(x)=\lim_{x\to -1-0}(x+4)=3,$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x)=\lim_{x\to -1+0}(x^2+2)=3.$$

Односторонні границі рівні між собою, тому в цій точці функція неперервна.

Для точки $x=1$ маємо:

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} (x^2+2) = 3,$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} 2x = 2.$$

Односторонні границі функції в точці $x=1$ існують, але не рівні між собою. Отже, ця точка є точкою розриву першого роду. Графік цієї функції зображено на рис. 1

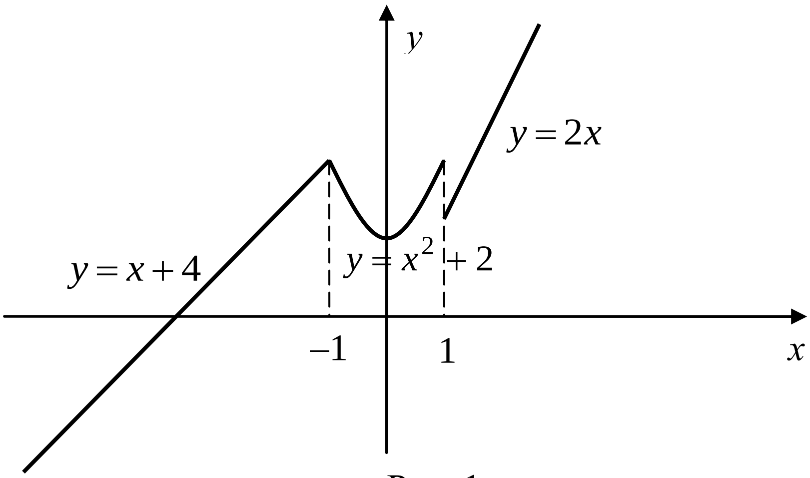


Рис. 1

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: а) Знайти границі:

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{4}{3x^2+2x}$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-8x+15}{x^2-25}$; 4. $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$;

5. $\lim\limits_{x\to\infty}(x^3+3x^2)$; 6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-5x+4}{x^2+2x+3}$; 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x^4-x^3+1}{x^3+2x^2+x}$.

б) Знайти точки розриву функцій, побудувати графіки:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2+1, \text{якщо } x\le 0, \\ 1+2x, \text{якщо } 0<x<2, \\ x-2, \text{якщо } x\ge 2 \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x+\pi, \text{якщо } x<-\pi, \\ \sin x, \text{якщо } -\pi<x\le 0, \\ 3-2x, \text{якщо } x>0 \end{cases}$

Тема № 7. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.

Практичне заняття № 9. Похідна та диференціал.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів обчислювати похідні першого та другого порядку та диференціали.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Застосування правил диференціювання та таблиці похідних.
2. Похідна складеної функції.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
4(с.11- 50),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Що називається приростом аргументу?
2. Що називається приростом функції?
3. Що називається похідною функції однієї змінної?
4. Які правила знаходження похідної ви знаєте?
5. Як обчислити похідну складеної функції?
6. Які функції називають складеними?
7. Які формули диференціювання Ви знаєте?
8. Ща таке похідна другого, третього порядку?
9. Що називається диференціалом функції однієї змінної?
10. Чому дорівнює диференціал аргументу цієї функції?
11. Як обчислити диференціал функції?
12. В чому полягає геометричний зміст диференціалу функції?

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок курсантів
(розв'язання задач).

1. Застосування правил диференціювання та таблиці похідних

Приклад 1. Обчислити похідну першого порядку заданої елементарної функції однієї змінної $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

Розв'язання. За допомогою формул дії над степенями ($\sqrt[m]{x^n} = x^{\frac{n}{m}}$ і $\dfrac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$) перетворюємо задану функцію до вигляду зручного для диференціювання.

$$y = \frac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}} = \frac{x^2}{x^{\frac{3}{4}}} = x^{2-\frac{3}{4}} = x^{\frac{8}{4}-\frac{3}{4}} = x^{\frac{5}{4}}; \qquad y' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)' = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-1} = \frac{5}{4}x^{\frac{5}{4}-\frac{4}{4}} = \frac{5}{4}x^{\frac{1}{4}} = \frac{5}{4}\sqrt[4]{x}.$$

Приклад 2. Обчислити похідну другого порядку заданої елементарної функції однієї змінної $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[4]{x^3}}$;

Розв'язання. $y'' = \left(x^{\frac{5}{4}}\right)'' = \dfrac{5}{4}\left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \dfrac{5}{4}\cdot\dfrac{1}{4}x^{\frac{1}{4}-1} = \dfrac{5}{16}x^{-\frac{3}{4}} = \dfrac{5}{16\sqrt[4]{x^3}}$.

2. Похідна складеної функції.

Приклад 3. Обчислити похідну першого порядку заданої складеної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, однієї змінної $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$.

Розв'язання. Застосовуємо формулу $(\sqrt{u})' = \dfrac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$.

$$y' = (\sqrt{x - \sqrt{x}})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot (x - \sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x - \sqrt{x}}} \cdot \frac{2\sqrt{x} - 1}{2\sqrt{x}} = \frac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x\sqrt{x} - x}}.$$

Приклад 4. Обчислити похідну другого порядку попередньої складеної функції $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, однієї змінної.

Розв'язання.

$$y'' = (\sqrt{x - \sqrt{x}})'' = \left(\frac{2\sqrt{x} - 1}{4\sqrt{x\sqrt{x} - x}}\right)' = \frac{(2\sqrt{x} - 1)'(4\sqrt{x\sqrt{x} - x}) - (4\sqrt{x\sqrt{x} - x})'(2\sqrt{x} - 1)}{16x(\sqrt{x} - 1)} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}}(4\sqrt{x\sqrt{x} - x}) - \dfrac{4}{2\sqrt{x\sqrt{x} - x}}(x\sqrt{x} - x)'(2\sqrt{x} - 1)}{16x(\sqrt{x} - 1)} =$$

$$= \frac{(4\sqrt{x\sqrt{x} - x})\,\sqrt{x\sqrt{x} - x} - (x^{1+\frac{1}{2}} - x)'(2\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{16x(\sqrt{x} - 1)\,\sqrt{x}\,\sqrt{x\sqrt{x} - x}} = \frac{4(x\sqrt{x} - x) - (\frac{3}{2}\sqrt{x} - 1)(2\sqrt{x} - 1)\sqrt{x}}{16x^2(\sqrt{x} - 1)\ \sqrt{\sqrt{x} - 1}}$$

Приклад 5. Обчислити похідну першого порядку функції однієї змінної $y = arctg\,\dfrac{x}{3} + \ln 2x$ в точці $x = 3$.

Розв'язання. Застосовуємо формули $(arctg\,u)' = \dfrac{1}{1 + u^2} \cdot u'$ і $(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$.

$$y' = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{9}} \cdot \left(\frac{x}{3}\right)' + \frac{1}{2x} \cdot (2x)' = \frac{9}{9 + x^2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2x} \cdot 2 = \frac{3}{9 + x^2} + \frac{1}{x}.$$

Підставляємо в одержану похідну $x = 3$:

$$y'(3) = \frac{3}{9 + 3^2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{18} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Приклад 6. Обчислити похідну другого порядку попередньої функції однієї змінної у точці $x = 3$.

Розв'язання.

$$y'' = \left(\frac{3}{9 + x^2} + \frac{1}{x}\right)' = \left(3(9 + x^2)^{-1} + x^{-1}\right)' = -3(9 + x^2)^{-2} \cdot 2x - x^{-2} = -\frac{6x}{(9 + x^2)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$y''(3) = -\frac{6 \cdot 3}{(9 + 3^2)^2} - \frac{1}{3^2} = -\frac{18}{18^2} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{18} - \frac{1}{9} = -\frac{1}{6}.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Знайти похідні: $y = 3 - 2\sqrt{x} + 6x^3$; $y = \ln x \cdot \sqrt[3]{x}$; $y = \sqrt[3]{x^2}$;

$y = \dfrac{x^3 - 5x}{8 - 2x^4}$; $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2}$; $y = x + ctg\dfrac{1}{x}$; $y = \dfrac{3}{x} \cdot \arcsin\dfrac{x}{3}$, $x = 1$; $y = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x}$; $y = \dfrac{1}{2}\ln(x^3 - 3)$;

$y = (x - 3x^3)\sin 2x$, $x = \pi$; $y = arctg(2\sqrt{x})$; $y = (x - 4x^2)tg4x$, $x = \dfrac{\pi}{16}$.

Тема № 7. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних.

Практичне заняття № 10. Монотонність функцій. Екстремуми функції.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити інтервали монотонності, екстремуми функцій та найбільше і найменше значення її на відрізку.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Монотонність функцій
2. Екстремуми функції.
3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.
4. Опуклість та угнутість функції.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

4(с.71- 115),**10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Яка функція називається зростаючою на проміжку?
2. Яка функція називається спадною на проміжку?
3. Сформулюйте умову зростання (спадання) функції.
4. Що таке максимум функції?
5. Що таке мінімум функції?
6. Що називається екстремумом функції?
7. Які точки називаються критичними? Стаціонарними?
8. У яких точках може бути екстремум функції?
9. Сформулюйте необхідну умову екстремуму.
10. Сформулюйте достатні умови екстремуму.

11.В яких точках функція може набувати свого найбільшого та найменшого значень?
12.Яка функція називається опуклою (угнутою) на проміжку?
13.Які умови опуклості (угнутості) функції?
14.Які точки називаються точками перегину?
15.Як знайти точки перегину ?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Монотонність функцій.

Приклад 1. Знайти проміжки зростання та спадання функцій:

а) $y = x^3 - 12x + 11$; б) $y = 4x^3 - 42x^2 + 18x + 20$; в) $y = \dfrac{2x^2}{1 - x^2}$.

2. Екстремуми функції.

Приклад21. Знайти екстремуми функцій:

а) $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2$; б) $y = x^4 - \frac{20}{3}x^3 + 8x^2$; в) $y = 2x + 3\sqrt[3]{(2 - x)^2}$.

3. Найбільше та найменше значення функції на відрізку.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функцій на відрізку:

а) $y = \dfrac{x^4}{4} - \dfrac{x^3}{3} - 7x^2 - 24x + 1$ на відрізку [-5;2] ; б) $y = xe^{-2x}$ на відрізку [0; 1].

4. Опуклість та угнутість функції.

Приклад 4. Знайти інтервали опуклості та угнутості функції, точки перегину:

а) $y = x^4 + 2x^3 - 12x^2 - 5x + 2$; б) $y = e^{-x}$ (крива Гауса).

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Знайти: а) Екстремуми функцій: 1) $f(x) = (x+3)^3(x-1)^2$;

2) $\dfrac{x^2 + 5}{2 - x}$; 3) $f(x) = (3x + 2)e^{3x}$.

б) Найбільше та найменше значення функцій: 1) $y = \dfrac{x^2 - 3x}{x - 4}$ на відрізку [-1;3];

Тема № 7. Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних. Практичне заняття № 11. Частинні похідні. Повний диференціал функції двох змінних. Мішані похідні, градієнт.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів знаходити частинні похідні, повний диференціал, мішані похідні, градієнт
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Частинні похідні.
2. Повний диференціал функції двох змінних.
3. Мішані похідні.
4. Похідна за напрямком. Градієнт.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
5(с.71- 115), **10**(с.208-236), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Дайте визначення функції двох змінних.
2. Що є областю визначення функції двох змінних?
3. Що є графіком функції двох змінних?
4. Що називається частинним приростом функції?
5. Що таке повний приріст функції?
6. Що називається частинною похідною?
7. Як обчислюється частинна похідна?
8. Запишіть формулу повного диференціала функції двох змінних.
9. Які похідні називаються мішаними?
10. Що називається скалярним полем?
11. Які лінії (поверхні) називаються лініями (поверхнями) рівня?
12. Що називається приростом аргументу (функції) за напрямком?
13. Дайте визначення похідної за напрямком.
14. Напишіть формулу похідної за напрямком для функції двох змінних (на площині).
15. Напишіть формулу похідної за напрямком для функції трьох змінних (у просторі).
16. Що називається градієнтом функції?
17. Напишіть формулу для обчислення градієнта.
18. Сформулюйте властивості градієнта.

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок здобувачів освіти(розв’язання задач).

1. Частинні похідні.

Приклад 2. Знайти частинні похідні першого порядку:

1) $z = 3x^2 - 5xy^3 + 5y - 10$; 2) $z = \sin(4x - 2y + 3)$; 3) $z = e^{\frac{y}{x}}$; 4) $u = z^{xy}$;

5) $z = x^{\cos y}$; 6) $z = arctg\frac{x^2}{y}$; 7) $u = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Приклад 3. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння

$$y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

2. Повний диференціал функції двох змінних.

Приклад 4. Знайти повний диференціал і повний приріст функції $z = 3x^2 + xy - y \;\; + 1$.

б) частинні похідні: 1) $z = 5x^2 + 6xy$; 2) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$; 3) $z = \ln tg\frac{x}{y}$.

в) повний диференціал функції: 1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $z = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

3. Мішані похідні.

Приклад 5. Знайти всі частинні похідні другого порядку від функцій:

1) $z = xy$; 2) $z = e^{ax+by}$; 3) $z = \ln(x^2 + y^3)$; 4) $u = \sin(xyz)$; 5) $z = arctg\frac{x+y}{1-xy}$.

4. Похідна за напрямком. Градієнт

Приклад 6. Знайти похідну функції $f(x) = x^2 - y^2$ у точці $M(1,1)$ за напрямком $\bar{l}$, що складає кут 60^0 з додатним напрямком осі Ox.

Приклад 7. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ у точці $P_1(1;2;-1)$ за напрямком від точки P_1 до точки $P_2(2;4;-3)$.

Приклад 8. Знайти похідну функції $u = xz^2 + x^2y + y^2z$ в точці $A(2; 1; -1)$ за напрямком вектору $\bar{a}(2; 1; 3)$ і градієнт функції в цій точці.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання:

а) частинні похідні: 1) $z = 5x^2 + 6xy$; 2) $z = e^x \cos y - e^y \sin x$; 3) $z = \ln tg\frac{x}{y}$.

б) повний диференціал функції: 1) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 2) $z = x + ye^{\frac{x}{y}}$.

в) Знайти мішані похідні другого порядку:

1) $z = x^2 - y^2 + 6x + 3y$; 2); 2) $z = y^{\ln x}$; 3) $z = \arcsin(xy)$; 4) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2xz}$.

г) Знайти похідну функції $f(x)$ в точці A за напрямком вектору $\bar{a}$ і градієнт функції в цій точці:

1) $u = x^2 + (y - z)^2$; $A(-1; 3; 3)$; $\bar{a}$ $(-2; 2; -1$;

2) $u = x^2(y + z)^2$; $A(1; 3; -2)$; $\bar{a}(-2; 4; -3)$.

Тема № 8. Невизначений і визначений інтеграли.
Практичне заняття № 12. Методи інтегрування.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати найпростіші невизначені інтеграли.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Безпосереднє інтегрування.
2. Інтегрування заміною змінної.
3. Інтегрування частинами.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

1. Сформулюйте означення первісної та невизначеного інтегралу
2. Назвіть властивості невизначеного інтегралу
3. Наведіть таблицю основних інтегралів
4. В чому полягає безпосереднє інтегрування?
5. У чому суть методу підстановки? Запишіть формулу інтегрування.
6. Напишіть формулу інтегрування частинами.
7. Які класи функцій можна інтегрувати частинами?

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Метод безпосереднього інтегрування

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int (2x+1)^2\,dx.$

Розв'язання.

$$\int (2x+1)^2\,dx = \int \left(4x^2+4x+1\right)dx = 4\int x^2dx + 4\int xdx + \int dx = = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int (x+3)^8\,dx.$

Розв'язання. $\int (x+3)^8\,dx = \int (x+3)^8\,d(x+3) = \dfrac{(x+3)^9}{9} + C.$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int \cos\frac{x}{2}\,dx.$

Розв'язання. $\int \cos\frac{x}{2}\,dx = 2\int \cos\frac{x}{2}\,d\left(\frac{x}{2}\right) = 2\sin\frac{x}{2} + C.$

***Приклад* 4.** Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = tgx - ctgx + C.$$

***Приклад* 5.** Обчислити інтеграл $\int \frac{x}{x+5} dx.$

Розв'язання. $\int \frac{x}{x+5} dx = \int \frac{x+5-5}{x+5} dx = \int dx - 5\int \frac{dx}{x+5} = x - 5\ln|x+5| + C.$

2. Метод заміни змінної

***Приклад* 6.** Обчислити інтеграл $\int x\sqrt{x-3}\, dx.$

Розв'язання. Замінимо $\sqrt{x-3} = t,$ звідки $x = t^2 + 3, dx = 2tdt.$ Тоді маємо:

$$\int x\sqrt{x-3}\, dx = \int \left(t^2+3\right)\cdot t \cdot 2t\, dt = 2\int \left(t^4 + 3t^2\right)dt = \frac{2}{5}t^5 + 2t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-3)^5} + 2\sqrt{(x-3)^3} + C.$$

***Приклад* 7.** Обчислити інтеграл $\int \frac{dx}{\cos x \sin x}.$

Розв'язання. $\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \int \frac{dx}{\cos^2 x tgx} = \begin{bmatrix} tgx = t, \\ \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \end{bmatrix} = = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|tgx| + C.$

***Приклад* 8.** Обчислити інтеграл $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx.$

Розв'язання.

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = \begin{bmatrix} \cos x = t,\ \sin x dx = -dt, \\ \sin^2 x = 1 - t^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt = \int \frac{1}{t^2} dt - \int \frac{1}{t^4} dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

3. Метод інтегрування частинами

При застосуванні цього методу використовуємо формулу

$$\int u dv = uv - \int v du\,.$$

***Приклад* 9.** Обчислити інтеграл $\int (x+1)\sin x dx.$

Розв'язання.

$$\int (x+1)\sin x\, dx = \begin{vmatrix} u = x+1 & du = dx \\ dv = \sin x\, dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -(x+1)\cos x +$$

$$+ \int \cos x\, dx = -(x+1)\cos x + \sin x + C\,.$$

***Приклад* 10.** Обчислити інтеграл $\int x^2 e^x dx.$

Розв'язання.

$$\int x^2 e^x\, dx = \begin{vmatrix} u = x^2 & du = 2x\, dx \\ dv = e^x\, dx & v = e^x \end{vmatrix} = x^2 e^x - \int 2xe^x\, dx =$$

$$=\begin{vmatrix} u=2x & du=2\,dx \\ dv=e^{x}\,dx & v=e^{x} \end{vmatrix}=x^{2}e^{x}-2xe^{x}+\int 2e^{x}dx=x^{2}e^{x}-2xe^{x}+2e^{x}+C.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Обчислити інтеграли: $\int ctg\,7x dx$; $\int \frac{dx}{3x-7}$; $\int \cos(6-2x)dx$; $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)dx$; $\int \frac{3dx}{\sqrt[3]{x}}$; $\int \frac{x+1}{x^{2}-1}dx$; $\int x\sqrt[4]{x}dx$; $\int \frac{x\,dx}{x^{2}+9}$; $\int y\sqrt{3y^{2}+1}\,dy$; $\int x e^{x^{2}}dx$; $\int x\cos x\,dx$; $\int \frac{\ln x}{x^{2}}$; $\int arctg\,x\,dx$.

Тема № 8. Невизначений і визначений інтеграли.
Практичне заняття № 13. Визначений інтеграл.
Формула Ньютона – Лейбниця. Методи інтегрування.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати визначені інтеграли.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Формула Ньютона – Лейбниця. Безпосереднє інтегрування.
2. Інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять.

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:
1. Сформулюйте означення визначеного інтегралу.
2. Назвіть властивості визначеного інтегралу.
3. Напишіть формулу Ньютона – Лейбниця.
4. Як виконується заміна границь інтегралу у методі підстановки?
5. Напишіть формулу інтегрування частинами.

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок студентів (розв’язання задач).

1. Формула Ньютона – Лейбниця. Безпосереднє інтегрування.

Приклад 1. Обчислити визначені інтеґрали: а) $\int_1^2 xdx$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язання. Знаходимо первісну, а потім застосовуємо формулу Ньютона – Лейбниця:

а) $\int_1^2 xdx = \left.\frac{x^2}{2}\right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}$.

б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin\frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$.

2. Інтегрування заміною змінної

Приклад 2. Обчислити визначений інтеґрал: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Розв'язання.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{lll} x = \sin t & x = 0 & t = 0 \\ dx = \cos t dt & x = 1 & t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,dt =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити визначений інтеґрал: $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}$.

Розв'язання.

$$\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} = \left| \begin{array}{lll} \sqrt{x+1} = t & x = 3 & t = 2 \\ x = t^2 - 1 & x = 8 & t = 3 \\ dx = 2tdt & & \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{(t^2-1)2tdt}{t} = 2\int_2^3 (t^2-1)dt =$$

$$= 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Bigg|_2^3 = \frac{32}{3}.$$

3. Інтегрування частинами

Приклад 4. Обчислити інтеґрал $\int_0^{\pi} x\cos x dx$.

Розв'язання:

$$\int_0^{\pi} x\cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{matrix} \right| = x\sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = cos x\Big|_0^{\pi} = -2.$$

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: Обчислити інтеграли

$$\int_1^e \frac{6x}{3x^2-1}dx; \ \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x}\sin x\,dx; \ \int_0^1 x^2(2x^3+4)^4 dx; \ \int_4^{e+3} \frac{\ln(x-3)}{x-3}dx; \ \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x\cdot\cos x\,dx;$$

Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y = x^2 + x - 2$, $y = 0$; 2) $y = -x^2 + 2x + 8$, $y = 0$.

Тема № 8. Невизначений і визначений інтеграли.

Практичне заняття № 14. Застосування визначених інтегралів.

Навчальна мета заняття: Навчити курсантів обчислювати площі плоских фігур, об’єми тіл обертання, розв’язувати фізичні задачі.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:

1. Обчислення площ плоских фігур.
2. Довжина дуги кривої.
3. Обчислення об’ємів тіл обертання.
4. Фізичні застосування визначеного інтегралу.

Літератури, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.

8, 10(с.208-240), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань студентів (фронтальне опитування).

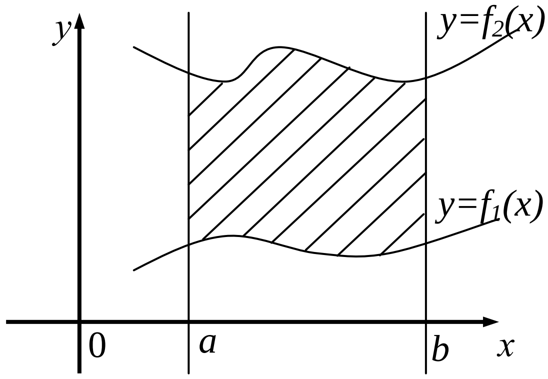
Запитання для фронтального опитування:

1. У чому полягає геометричний зміст визначеного інтегралу?
2. Напишіть формули для обчислення площ плоских фігур за допомогою визначеного інтегралу.
3. Напишіть формулу для обчислення довжини дуги кривої.
4. Напишіть формулу для обчислення об’єму тіла обертання.
5. Які ви знаєте фізичні застосування інтеграла?

II. Порядок проведення основної частини заняття.

Формування практичних умінь і навичок студентів (розв’язання задач).

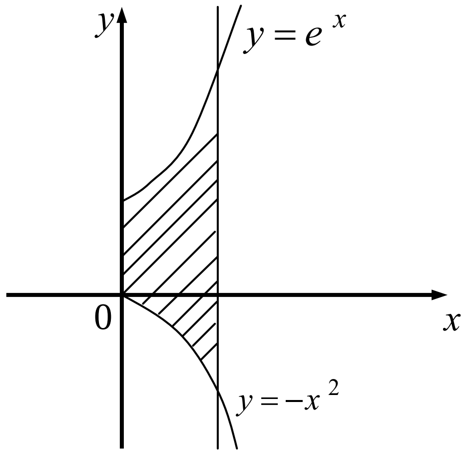
1. Обчислення площ плоских фігур.



Якщо на $[a, b]$ функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ неперервні, то площа області, обме-женої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху – графіком функції $y = f_2(x)$, зліва – прямою $x = a$, справа – прямою $x = b$ обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b \left[f_1(x) - f_2(x) \right] dx.$$

Приклад 1. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = -x^2$, $y = e^x$, віссю ординат і прямою $x = 1$



Розв'язання.

$$S = \int_0^1 \left[e^x - (-x^2) \right] dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 =$$

$$= e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3} \quad \text{(кв.од.)}$$

Приклад 2. Обчислити площу плоскої фігури, обмеженої одною аркою циклоїди $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ і віссю Оx.

Розв'язок. $S = \int_0^{2\pi} 2(1 - \cos t) 2(1 - \cos t) dt = 4 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t)^2 dt =$

$$= 4 \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} \right)^2 dt == 4 \left(t - 2\sin t + \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin 2t \right) \Bigg|_0^{2\pi} = 12\pi \text{ (кв. од.)}$$

2. Довжина дуги кривої

Якщо крива $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$ – гладка (тобто похідна $y' = f'(x)$ неперервна), то довжина відповідної дуги цієї кривої знаходиться за формулою

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Приклад 3. Знайти довжину дуги кривої $y = \ln \sin x$ від $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{\pi}{2}$.

Розв'язок. Знаходимо похідну $y' = \frac{\cos x}{\sin x} = ctg x$, тоді за формулою (4) маємо:

$$L=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+ctg^{2}x}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{dx}{\sin x}=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|\Bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=\ln\left|tg\frac{\pi}{4}\right|-\ln\left|tg\frac{\pi}{6}\right|=\ln 1-\ln\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}\ln 3.$$

3. Об’єм тіла обертання

Нехай крива AB задана рівнянням $y=f(x)$, де $f(x)$ – однозначна неперервна функція змінної x, обертається навколо осі абсцис, описуючи деяку поверхню. Визначимо об'єм тіла обертання, утвореного цією поверхнею та двома площинами $x=a$ і $x=b$, що проходять перпендикулярно осі обертання $0x$. Об'єм тіла обертання визначається формулою:

$$V_x=\pi\int\limits_a^b y^2dx=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$$

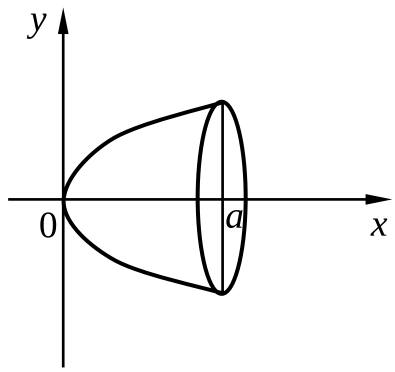


Рис. 3

Приклад 5. Знайти об'єм сегмента параболоїда, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y=2px$ і $x=a$, навколо осі $0x$ (рис.3).

Розв'язок. Оскільки x змінюється від 0 до a, то

$$V_x=\pi\int\limits_0^a y^2dx=\pi\int\limits_a^a 2pxdx=\pi px^2\Big|_0^a=\pi pa^2 \text{ (куб. од.)}$$

4.Фізичні застосування інтеграла

Приклад 6. Гвинтова пружина стискається на *x (м)* пропорційно діючій силі *F (Н)*. Обчислити роботу, що виконує сила *F*, яка стискає пружину на 0,04 *м*. Для стискання пружини на 0,01 *м* потрібна сила 10*Н*.

Розв’язання. За законом Гука абсолютне подовження *x* пружини (в *м*) прямо пропорційне силі *F* (в *Н*): $F=kx$, де k – коефіцієнт пропорційності.

За умовою *F*=10*Н*, *x=0,01м,* тому

$$k=\frac{F}{x}=\frac{10}{0{,}01}=1000\frac{H}{м}\;;\quad k=\frac{F}{x}\;\frac{10}{0{,}01}=1000\;\frac{H}{м}$$

Робота виконана силою $F=f(x)$ при зміщенні по осі *OX* матеріальної точки від *x*=*a* до *x*=*b*, визначається за формулою

$$A=\int_a^b f(x)dx$$

За умовою $f(x)=kx$, *(k=1000, f(x)=1000x), a=0, b=0,04 м*

$$A=\int_0^{0{,}04}1000xdx=1000\int_0^{0{,}04}xdx=1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04}=1000\frac{0{,}04^2}{2}$$

$$A=\int_0^{0{,}04}1000xdx=1000\int_0^{0{,}04}xdx=1000\frac{x^2}{2}\int_0^{0{,}04}=1000\frac{0{,}04^2}{2}=0{,}8 \text{ Дж}$$

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: а) Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

1) $y=x^2+x-2$, $y=0$; 2) $y=-x^2+2x+8$, $y=0$.

б) Знайти довжину лінії:

1) $y=\ln x$ від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$; 2) однієї арки циклоїди $\begin{cases} x=a(t-\sin t) \\ y=a(1-\cos t) \end{cases}$.

3) Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням однієї арки синусоїди навколо осі *Ox*.

Тема № 9. Звичайні диференціальні рівняння.
Практичне заняття № 15. Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв'язувати диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Знаходження загального розвязку рівняння.
2. Знаходження частинного розвязку рівняння.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
16(1)(с.285-315,322-340), **12**(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Яке рівняння називається ДР першого порядку ?
2. Що називається розв'язком ДР?
3. Яка крива називається інтегральною кривою?
3. Що називається загальним розв'язком ДР?
4. Що називається частинним розв'язком?
5. У чому полягає задача Коші?
6. Напишіть загальний вигляд ДР з відокремлюваними змінними?
7. Який алгоритм розв'язання ДР з відокремлюваними змінними?

II. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Знаходження загального розвязку рівняння.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $\cos y\,dy = 2x\,dx$.

Розв'язання. У цьому рівнянні змінні вже відокремлені, тому його розв'язок

$$\int \cos y\,dy = \int 2x\,dx \quad \Rightarrow \quad \sin y = x^2 + C \quad \Rightarrow \quad y = \arcsin(x^2 + C).$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x)y\,dx+(1-y)x\,dy=0$.

Розв'язання. Розділяючи змінні, знаходимо:

$$\frac{(1+x)}{x}dx+\frac{(1-y)}{y}dy=0,\quad \left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=0 \qquad \Rightarrow$$

$$\int\left(\frac{1}{x}+1\right)dx+\int\left(\frac{1}{y}-1\right)dy=C.$$

Інтеґруючи, дістаємо: $\ln|x|+x+\ln|y|-y=C$, або $\ln|xy|+x-y=C$. Останнє співвідношення є загальним інтеґралом даного рівняння.

2. Знаходження частинного розвязку рівняння.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші

$$x^2y\,dx+y^3x\,dy=0,\qquad y(0)=1.$$

Розв'язання. Розділяючи змінні, знаходимо: $x\,dx+y^2\,dy=0$. Інтегруючи, маємо:

$$\int x\,dx+\int y^2\,dy=C,\qquad \frac{x^2}{2}+\frac{y^3}{3}=C.$$

Одержали загальний інтеґрал вихідного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0)=1$. Для цього до загального розв'язку підставляємо початкову умову і визначаємо сталу *C*.

$$\frac{1}{3}=C-0\ \Rightarrow\ C=\frac{1}{3}.$$

Потім, підставивши її значення до загального розв'язку, отримуємо частинний розв'язок, тобто розв'язок задачі Коші $y^3=1-\frac{3}{2}x^2$.

III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки ДР:

1.1 $x^2dx=3y^2dy$; 1.2 $y^2dx+(x-2)dy=0$; 1.3 $(1+y^2)dy$-$\sqrt{x}\,dx$;

1.4 $\sqrt{x}\,dy$=$\sqrt{y}\,dx$.

2. Знайти частинні розвязки рівнянь, що задовольняють указаним умовам:

2.1 $ydy = xdx$, $y(-2)=4$; 2.2 $ds=(3t^2-2t)dt$, $s(2)=4$.

Тема № 9. Звичайні диференціальні рівняння.
Практичне заняття № 16. Однорідні та лінійні диференціальні рівняння І-го порядку

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв’язувати однорідні та лінійні диференціальні рівняння

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Однорідні рівняння І-го порядку.
2. Лінійні рівняння І-го порядку.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
І. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Яке ДР рівняння називається однорідним?
2. Якою підстановкою розв'язується однорідне рівняння?
3. Яке ДР рівняння І-го порядку називається лінійним?
4. Якою підстановкою розв'язується лінійне рівняння?
5. Яке ДР рівняння І-го порядку називається рівнянням Бернуллі?
6. Якою підстановкою розв'язується рівняння Бернуллі?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття.
Формування практичних умінь і навичок студентів
(розв'язання задач).

1. Однорідні рівняння І-го порядку.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $2xyy' = x^2 + y^2$.

Розв'язання. Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + y^2}{2xy}$.

Застосуємо підстановку $y = ux, \quad y' = u'x + u$. Підставляючи в рівняння, дістаємо $u'x + u = \dfrac{x^2 + u^2}{2u}$, або $\dfrac{du}{dx}x = \dfrac{1-u^2}{2u}$. В цьому рівняння змінні розділяються: $\dfrac{2udu}{1-u^2} = \dfrac{dx}{x}$. Інтегруючи, маємо: $\ln C - \ln\left|1-u^2\right| = \ln|x|$, звідки $|x|\left|1-x^2\right| = C.$ Остаточно, $x\left(1-\dfrac{y^2}{x^2}\right) = C.$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок однорідного рівняння:
1) $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx = xdy$; 2) $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x}$.

2. Лінійні рівняння І-го порядку

Приклад 3. Знайдемо загальний розв'язок диференціального рівняння $xy' + y = x^2$.

Розв'язання. Розв'язок шукаємо у вигляді добутку функцій $y = u \cdot v$. Підставляючи, дістаємо рівняння $x(u'v + uv') + uv = x^2$.

Зведемо це рівняння до системи : $\begin{cases} xv' + v = 0, \\ xu'v = x^2. \end{cases}$

Із першого рівняння $xv' + v = 0$ знаходимо: $v' = -\dfrac{v}{x}$, $\dfrac{dv}{dx} = -\dfrac{v}{x}$, $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{dx}{x}$,

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dx}{x}, \quad \ln|v| = -\ln|x|, \quad v = x^{-1}.$$

Із другого рівняння маємо: $xu'x^{-1} = x^2$, $u' = x^2$, $u = \int x^2 dx$, $u = \dfrac{x^3}{3} + c$.

Остаточно записуємо розв'язок: $y = uv$, $y = \left(\dfrac{x^3}{3} + c\right)x^{-1} = \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{c}{x}$.

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок лінійного рівняння:

1) $y' - \dfrac{y}{x} = xe^x$, $y(1) = 0$; 2) $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x$, $y(0) = 0$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки ДР:
а) $x^2 y' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$; б) $y'\mathrm{ctg}x + y = 1 - \sin x$; в) $y' - 2y = y^2 e^x$.
2. Знайти частинні розвязки рівнянь, що задовольняють указаним умовам:
а) $y' + y\mathrm{tg}x = \dfrac{1}{\cos x}$, $y(0) = 0$; б) $xy' - 2y = 2x^4$, $y(0) = 1$.

Тема № 9. Звичайні диференціальні рівняння.
Практичне заняття № 17. Лінійні диференціальні рівняння ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розв'язувати лінійні диференціальні рівняння ІІ-го порядку.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку.
2. Лінійні неоднорідні рівняння ІІ-го порядку.
Літератури, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.208-240), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Напишіть загальний вигляд лінійного ДР ІІ-го порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Яке рівняння називається характеристичним для лінійного однорідного ДР зі сталими коефіцієнтами?
3. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і різні?
4. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння дійсні і рівні?
5. Як записати загальний розв'язок лінійного однорідного ДР, якщо корені характеристичного рівняння комплексні числа?
6. Як записати загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння?
7. Як знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння в залежності від вигляду правої частини?
8. Як записати частинний розв'язок ЛНДР, якщо його права частина має вигляд $f(x) = P_n(x)$?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок студентів (розв'язання задач).

1. Лінійні однорідні рівняння ІІ-го порядку.

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок лінійного однорідного ДР ІІ порядку:
1) $y'' + y' - 2y = 0$; 2) $y'' - 4y' = 0$; 3) $y'' + 6y' + 13y = 0$; 4) $y'' - 2y' + y = 0$.

2. Лінійні неоднорідні рівняння ІІ-го порядку.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного ДР ІІ-го порядку:
1) $y'' + y = 2x - 3$; 2) $y'' - 6y' + 9y = x^2 + x - 3$; 3) $y'' - 4y' + 5y = 3e^{2x}$;
4) $y'' + 2y' + y = 2e^x$.

ІІІ. Порядок проведення заключної частини заняття.

Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: 1. Знайти загальні розвязки однорідних ДР:
а) $y'' - 9y = 0$; б) $y'' + y = 0$; в) $4y'' - 8y' + 5y = 0$; г) $4y'' + 4y' + y = 0$.
2. Знайти частинні розвязки неоднорідних рівнянь:
а) $y'' + 4y = x^2 - 2$; б) $y'' - y = 2e^x$; в) $y'' - 4y' + 5y = xe^x$.

Тема №10. Числові та функціональні ряди.
Практичне заняття № 18. Числові ряди.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів визначати збіжність чи розбіжність рядів за допомогою достатніх ознак збіжності.
Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:
1. Ознака Даламбера.
2. Радикальна ознака Коші.
3. Інтегральна ознака Коші.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
8, 10(с.129-180), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

І. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:
1. Що називається числовим рядом? сумою ряду?
2. Який ряд називається збіжним? Розбіжним?
3. Сформулюйте необхідну ознаку збіжності ряду.
4. Напишіть ряд – геометрична прогресія.
5. Напишіть гармонічний ряд.
6. Сформулюйте ознаку Даламбера.
7. Сформулюйте радикальну ознаку Коші.
8. Сформулюйте інтегральну ознаку Коші.
9. Який ряд називається узагальненим гармонічним рядом?

ІІ. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Ознака Даламбера

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Розв'язання. Скористаємося ознакою Даламбера: маємо $a_n = \frac{n}{2^n}$,

$a_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}$. Знаходимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Даний ряд збіжний.

Приклад 2. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$.

Розв'язання. Застосуємо ознаку Даламбера, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Оскільки $u_n=\frac{5^n\cdot n!}{n^n}$, то $u_{n+1}=\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$.

Обчислимо границю: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\cdot 5^n\cdot n!}=5\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=5\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{5}{e}>1$.

Отже, заданий ряд розбіжний за ознакою Даламбера.

2. Радикальна ознака Коші.

Приклад 3. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\arcsin\frac{n+3}{2n+5}\right)^n$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left[\arcsin\left(\frac{n+3}{2n+5}\right)\right]^n}==\lim_{n\to\infty}\arcsin\frac{n+3}{2n+5}=\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}<1.$$

Робимо висновок, що ряд збігається за радикальною ознакою Коші.

Приклад 4. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Розв'язання. Застосуємо радикальну ознаку Коші, тобто знайдемо границю $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$. Маємо:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1;$$

отже, даний ряд за радикальною ознакою Коші розбігається.

3. Інтегральна ознака Коші.

Приклад 5. Дослідити на збіжність ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ (*узагальнений гармонічний ряд*).

Розв'язання. Скористуємося інтеґральною ознакою Коші. Зробивши заміну n на x у загальному члені $a_n=\frac{1}{n^{\alpha}}$, будемо мати $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$.

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{x^{\alpha}}dx=\lim_{A\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}\,x^{1-\alpha}\Big|_1^{A}=\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}A^{1-\alpha}-\frac{1}{1-\alpha}\right)=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{-1+\alpha}, & \alpha>1 \ \text{збіжний},\\ \infty, & \alpha<1 \ \text{розбіжний}.\end{cases}$$

При $\alpha=1$: $\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\int_1^{A}\frac{1}{x}dx=\lim_{A\to\infty}\ln|x|\,\Big|_1^{A}=\lim_{A\to\infty}(\ln A-\ln 1)=\infty$. Ряд розбіжний.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Дослідити на збіжність наступні числові ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3n^3+4}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5n-1}{(\sqrt{2})^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{3^n(n+1)}$;

г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n-1}{n+2}\right)^{n^2+2n}$; д) $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$; е) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.

ж) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$; з) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+4}$.

Тема №10. Числові та функціональні ряди.
Практичне заняття № 19. Знакопочережні ряди. Степеневі ряди.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів визначати збіжність знакопочережних рядів, радіус та інтервал збіжності степеневих рядів. Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія.

Навчальні питання:
1. Знакопочережні ряди.
2. Степеневі ряди.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
16(2)(с.129-180), конспект лекцій, методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).

Запитання для фронтального опитування:

1. Який ряд називається знакозмінним?
2. Який ряд називається знакопочережним?

3. Сформулюйте ознаку Лейбниця.
4. Який ряд називається функціональним?
5. Що називається областю збіжності функціонального ряду?
6. Які ряди називаються абсолютно збіжними?
7. Які ряди називаються умовно збіжними?
8. Які ряди називаються степеневими?
9. Як знайти радіус збіжності степеневого ряду?
10. Що є областю збіжності степеневого ряду?
11. Як визначити збіжність степеневого ряду на кінцях інтервалу збіжності?

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Знакопочережні ряди.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}$.

Розв'язок. Перша умова ознаки Лейбніца виконується: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>...$ Так як $\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то виконана і друга умова. Отже, даний ряд збіжний.

Складемо ряд з абсолютних величин: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Отримали гармонічний ряд, який розбіжний. Отже, даний ряд умовно збіжний.

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряди:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{n+4}{3n+1}\right)^n$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}$.

2. Степеневі ряди.

Приклад 3. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$.

Розв'язання.

Тут $u_n=\frac{(x-3)^n}{n\cdot 3^n}$, $u_{n+1}=\frac{(x-3)^{n+1}}{(n+1)\cdot 3^{n+1}}$. Тоді маємо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(x-3)^{n+1}\right|n\cdot 3^n}{(n+1)\cdot 3^{n+1}\left|(x-3)^n\right|}= =|x-3|\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)3}=\frac{1}{3}|x-3|.$$ Отже,

інтервал збіжності визначається із нерівності $\frac{1}{3}|x-3|<1$, $|x-3|<3 \Rightarrow$ $0<x<6$. Інтервал збіжності $x\in(0,\ 6)$.

Приклад 4. Знайти інтервал збіжності степеневого ряду

$$x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\ldots+\frac{1}{n}x^n+\ldots$$

Розв'язання.

Маємо $c_n=\frac{1}{n}, c_{c+1}=\frac{1}{n+1}$

Знайдемо радіус збіжності ряду: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1$

Отже, ряд збігається для значень *x* в інтервалі (-1,1).

Приклад 5. Знайти радіус збіжності степеневого ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n!}(x-2)^n$.

Розв'язання. Маємо $a_n=\frac{5^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{5^{n+1}}{(n+1)!}$. Тоді

$R=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n(n+1)!}{n!\,5^{n+1}}=\infty$. Даний ряд є збіжним при будь-якому x.

III. Порядок проведення заключної частини заняття

Підведення підсумків заняття.

Домашнє завдання: 1) Дослідити на збіжність знакопочережні ряди:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n-2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln n}{n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{2n-1}}$.

2) Знайти радіус та інтервал збіжності степеневого ряда:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{\sqrt{n}}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{(2n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{3^n(n+1)}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x}{4}\right)^n\frac{3n}{4n^2+3}$.

Тема №10. Числові та функціональні ряди.

Практичне заняття № 20. Розкладання функцій у степеневі ряди.

Навчальна мета заняття: навчити курсантів розкладати функції у степеневі ряди.

Кількість годин – 2. Місце проведення – навчальна аудиторія

Навчальні питання:

1. Ряди Тейлора і Маклорена.
2. Застосування степеневих рядів.

Література, методичне та матеріально-технічне забезпечення занять.
10(с.129-180), методичні вказівки до проведення практичних занять

План проведення заняття:
I. Порядок проведення вступу до заняття.
Проведення попереднього контролю теоретичних знань курсантів (фронтальне опитування).
Запитання для фронтального опитування:
1. Який ряд називається рядом Тейлора?
2. Як обчислюються коефіцієнти Тейлора?
3. Який ряд називається рядом Маклорена?
4. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції e^x.
5. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\sin x$.
6. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\cos x$.
7. Напишіть розкладання в ряд Маклорена функції $\ln(1+x)$.
8. Напишіть біноміальний ряд.

II. Порядок проведення основної частини заняття. Формування практичних умінь і навичок курсантів (розв'язання задач).

1. Ряди Тейлора і Маклорена.

Приклад 1. Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$:
1) $f(x) = 4x^3 - x^2 - x + 5$; $a=1$; 2) $f(x) = x^4 - 3x^2 + x - 1$; $a=-1$; 3) $f(x) = e^x$; $a=2$.
Приклад 2. Розкласти функцію в ряд Маклорена:

1) $f(x) = \ln\dfrac{1+x}{1-x}$; 2) $f(x) = e^{-x^2}$; 3) $f(x) = \dfrac{\sin\frac{x}{2}}{x^2}$.

2. Застосування степеневих рядів.

Приклад 3. Обчислити з точністю до 0,0001 значення функцій:

1) $\sin 18^0$; 2) $\ln 0{,}725$; 3) $\int\limits_0^{\frac{1}{4}} \dfrac{\sin 2x}{x}dx$;

Приклад 4. Знайти перші чотири відмінні від нуля члени степеневого ряду, що є розв'язком заданого диференціального рівняння:
1) $y'' = e^y + x;\ y(0) = 1;\ y'(0) = 0;$ 2) $y' = x^2 + y^2; \cdots y(0) = 2.$

III. Порядок проведення заключної частини заняття
Підведення підсумків заняття.
Домашнє завдання: 1) Розкласти функцію в ряд Тейлора за степенями $(x - a)$:
а) $f(x) = x^3 - 2x - 3$; $a=2$; б) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 6x - 2$; $a = -2$.

2) Розкласти функцію в ряд Маклорена:

а) $f(x) = x\sin 2x$; б) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

1. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.

2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.

4. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с

5. Мазур К.І., Олешко Т.І., Трофименко В.І. Вища математика. Модуль 5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 104 с.

6. Ковтонюк І.Ю., Коршлович С.Ю., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 6. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

7. Семенов В.О., Ляшенко В.П. та інші. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с.

Додаткова

8. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

9. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

10. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html]