

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

**Циклова комісія економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів**

за темою: Матриці та визначники

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 №7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально –
гуманітарних та фундаментальних дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

*Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.*

*Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.*

Рецензенти:

*1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького
національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат
технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК
ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Матриця та її складові. Види матриць.
2. Операції над матрицями: транспонування матриці, лінійні операції над матрицями, множення матриць. Властивості операцій над матрицями.
3. Визначники квадратних матриць. Властивості визначників та їх обчислення.

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [<https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html>]

1 Матриця та її складові. Види матриць

Визначення. Матрицею $A = (a_{ij})$ розміру $m \times n$ називається прямокутна таблиця чисел, складена з m рядків і n стовпців:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A = (a_{ij}) \quad i = \overline{1, m}; \quad j = \overline{1, n}.$$

Визначення. Якщо у матриці лише один стовпчик (рядок), то така матриця називається відповідно *матрицею-стовпцем* (*матрицею-рядком*), або відповідно *вектор-матрицею*.

Визначення. Матриця, у якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається *квадратною*.

Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її *порядком*. Розмір квадратної матриці дорівнює $n \times n$.

Визначення. У квадратній матриці елементи $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ складають *головну діагональ*, а елементи $a_{n1}, a_{n-1, 2}, \dots, a_{1n}$ – *побічну діагональ* матриці.

Визначення. Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розташовані вище (нижче) головної діагоналі, дорівнюють нулю, називається *верхньою* (*нижньою*) *трикутною матрицею*.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. Квадратна матриця, у якої всі елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, рівні між собою, називається *симетричною*.

Для елементів симетричних матриць виконується рівність

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Визначення. *Нульовою матрицею* називається матриця, всі елементи якої дорівнюють нулю, тобто

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Визначення. *Діагональною* називається квадратна матриця, у якої відмінними від нуля є лише елементи головної діагоналі:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Визначення. Квадратна матриця E , у якої всі елементи головної діагоналі дорівнюють одиниці, а решта елементів – нулі, називається *одиничною матрицею n -го порядку*

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначення. Дві матриці вважаються *рівними*, якщо вони однакових розмірів й елементи однієї матриці дорівнюють відповідним елементам іншої.

2. Операції над матрицями: лінійні операції над матрицями, множення матриць, транспонування матриці. Властивості операцій над матрицями.

Визначення. Сумою (різницею) двох матриць $A_{m \times n} = (a_{ij})$ і $B_{m \times n} = (b_{ij})$ називається матриця $C_{m \times n} = (c_{ij})$, для елементів якої справджується рівність $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$), і яка позначається $C = A \pm B$.

Операція додавання має місце тільки для матриць однакових розмірів.

Визначення. Добутком матриці $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число $\alpha \neq 0$ називається матриця $B_{m \times n} = (b_{ij})$, для якої $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ ($i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}$).

Визначення. Операції додавання матриць та множення матриці на число називають *лінійними операціями* над матрицями, а суму виду $\alpha A + \beta B + \gamma C$ – *лінійною комбінацією* матриць.

Визначення. Матрицю A будемо називати *узгодженою* з матрицею B , якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B .

Визначення. Добутком матриці $A_{m \times r} = (a_{ij})$ розміру $m \times r$ на матрицю $B_{r \times n} = (b_{ij})$ розміру $r \times n$ називається матриця $C_{m \times n} = AB = (c_{ij})$ розміру $m \times n$ з елементами c_{ij} , кожний елемент якої дорівнює сумі добутків відповідних елементів i -го рядка матриці A на відповідні елементи j -го стовпця матриці B :

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{ir}b_{rj}.$$

Будь-яка квадратна матриця A не змінюється при множенні на одиничну матрицю E :

$$AE = EA = A.$$

Одинична матриця відіграє в операції множення таку саму роль, як число

одиниця при множенні чисел.

Добуток матриць у загальному випадку не комутативний, тобто не завжди $AB = BA$. Це очевидно хоча б із того, що з узгодженості матриці A з B не випливає узгодженість матриці B з A .

Добуток двох ненульових матриць може дорівнювати нульовій матриці, що показує наступний приклад: якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Приклад 1. Дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти AB та

BA .

Розв'язання. Знайдемо AB :

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 1 \cdot (-2) + 7 \cdot (-1) & 1 \cdot 0 + 7 \cdot 5 \\ 3 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-1) & 3 \cdot 0 + 4 \cdot 5 \\ (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) & (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 22 & -9 & 35 \\ 15 & -10 & 20 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

А тепер знайдемо BA .

$$\begin{aligned} BA &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 + 0 \cdot (-1) & 1 \cdot 7 + (-2) \cdot 4 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 + 5 \cdot (-1) & 3 \cdot 7 + (-1) \cdot 4 + 5 \cdot 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -1 \\ -5 & 17 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

З наведеного прикладу видно, що $AB \neq BA$.

Визначення. Дві матриці називаються *перестановочними* (комутативними), якщо виконується рівність $AB = BA$.

Прикладом комутативних матриць є квадратна та одинична матриці одного розміру $AE = EA$. Можна розглядати добуток кількох матриць. Щоб визначити можливість існування добутку кількох матриць, необхідно пересвідчитись у тому, що матриця, що є добутком двох попередніх матриць, узгоджена з наступною.

Для добутку трьох матриць, якщо він можливий, справджується асоціативний закон добутку

$$A(BC) = (AB)C.$$

Має місце комутативний закон відносно скалярного множника α

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$$

та два дистрибутивних закони

$$(A + B)C = AC + BC, \quad C(A + B) = CA + CB.$$

Для будь-якої квадратної матриці існує операція піднесення до натурального степеню n за правилом

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ раз}}.$$

Приклад 2. Дано дві матриці $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$. Знайти:

а) $3A + 4B$; б) AB .

Розв'язання. а) $3A + 4B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \\ 9 & -6 & -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 16 & 12 & 12 \\ 12 & 8 & 4 \\ 4 & 12 & 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 18 & 9 \\ 6 & 5 & 10 \\ 13 & 6 & 17 \end{pmatrix}.$

б) $AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \\ (-2) \cdot 4 + (-1) \cdot 3 + 2 \cdot 1 & (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 & (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 3 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 + (-1) \cdot 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Визначення. Якщо у матриці поміняти місцями відповідні рядки і стовпці, не змінюючи в них порядок елементів, то така операція називається *транспонуванням*, і здобута таким чином матриця позначається A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Добуток $A \cdot A^T$ транспонованих матриць завжди існує.

Визначення. Два рядки i та l матриці A називаються пропорційними, якщо існує число $\alpha \neq 0$, для якого виконується умова $\frac{a_{ij}}{a_{lj}} = \alpha$.

Приклад 3. Дана матриця $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Знайти A^T і $A \cdot A^T$.

Розв'язання. Транспонуємо матрицю A : $A^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$

Матриця A узгоджена з матрицею A^T . Знайдемо $A \cdot A^T$.

$$A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 & 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 & (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3 Визначники квадратних матриць. Властивості визначників та їх обчислення.

Розглянемо квадратну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратній матриці можна поставити у відповідність певне число, яке називається *детермінантом* або *визначником матриці*. Детермінант матриці позначається так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Детермінант так само, як і матриця, має порядок. Він дорівнює порядку відповідної матриці. Поняття детермінанта вводиться лише для квадратних матриць.

Визначення. Визначником квадратної матриці другого порядку є число, яке обчислюється за правилом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (1.2)$$

Визначник матриці A позначають ΔA , $\det A$.

Визначення. Визначником квадратної матриці третього порядку є число, що обчислюється за формулою:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}. \quad (1.3)$$

Щоб запам'ятати, які добутки в правій частині рівності (1.3) беруть з прямим знаком "+", а які зі зворотним "-" можна використовувати правило трикутника (інакше, правило Саррюса), схематичний запис якого наведено нижче:



Визначення. Мінором M_{ij} елемента a_{ij} матриці n -го порядку називають визначник $n-1$ порядку, що утворюється з даної матриці внаслідок викреслювання рядка i стовпця, на перетині яких розташований елемент a_{ij} .

Визначення. Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника n -го порядку називають мінор цього елемента, помножений на $(-1)^{i+j}$.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Отже, мінор від алгебраїчного доповнення може відрізнитись лише знаком.

Теорема Лапласа (розкриття визначника за рядком (стовпцем))
Визначник n -го порядку дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця на їх алгебраїчні доповнення, тобто

$$\Delta = \sum_{i=1}^n a_{ij} A_{ij}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Визначники, що мають порядок вище третього, обчислюють за допомогою теореми Лапласа та основних властивостей.

Основні властивості визначників:

1. Значення визначника не змінюється при його *транспонуванні*, тобто заміні кожного його рядка стовпцем із тим самим номером.
2. Якщо визначник має два однакових рядки (стовпці), то він дорівнює нулю.
3. Якщо поміняти місцями два рядки (стовпці) визначника, то він змінить знак на протилежний.
4. Спільний множник усіх елементів рядка (стовпця) визначника можна винести за знак визначника.
5. Якщо визначник має нульовий рядок (стовпець), то він дорівнює нулю.
6. Якщо всі елементи двох рядків (стовпців) відповідно пропорційні, то визначник дорівнює нулю.
7. Якщо до всіх елементів рядка (стовпця) визначника додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця) помножені на одне і те саме число α , то значення визначника не зміниться.
8. Якщо кожний елемент будь-якого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то такий визначник дорівнює сумі двох визначників, в одному з них відповідний рядок (стовпець) складається з перших доданків, а в іншому – із других; решта рядків (стовпців) – ті ж самі, що й у вихідного визначника.

Застосовуючи властивість 7, можна всі елементи певного рядка (стовпця), крім одного, зробити рівними нулю, не змінюючи при цьому величини

визначника. Розкладаючи потім визначник за елементами цього рядка (стовпця), можна звести визначник n -ого порядку до визначника $(n-1)$ -ого порядку.

Визначення. Діагональ визначника, що проходить через елементи a_{ii} з верхнього лівого в нижній правий кут, називається *головною діагоналлю визначника*.

Наслідок з властивості 7 визначника.

Теорема. Якщо всі елементи визначника Δ , що розташовані нижче головної діагоналі, дорівнюють нулю, то визначник дорівнює добутку елементів, що розташовані на головній діагоналі.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$