

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ**

**Циклова комісія економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт Оператор безпілотних літальних апаратів

за темою: Системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР)

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 №7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально –
гуманітарних та фундаментальних дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

*Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.*

*Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та
фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.*

Рецензенти:

*1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького
національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат
технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК
ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} - \text{основна матриця системи.}$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{pmatrix} - \text{розширена матриця системи.}$$

визначення. Впорядкована система чисел (c_1, c_2, \dots, c_n) називається *розв'язком системи*, якщо кожне з рівнянь системи перетворюється в істинність після підстановки замість x_1, x_2, \dots, x_n відповідно чисел c_1, c_2, \dots, c_n .

визначення. Якщо в правій частині системи всі вільні члени дорівнюють нулю, то система називається *однорідною*, якщо ж принаймні один з членів b_i , $i = \overline{1, m}$, не дорівнює нулю, то система називається *неоднорідною*.

визначення. Система лінійних рівнянь називається *сумісною*, якщо вона має хоча б один розв'язок, і *несумісною*, якщо вона не має розв'язку.

визначення. Сумісна система лінійних рівнянь називається *визначеною*, якщо вона має єдиний розв'язок, і *невизначеною*, якщо вона має більше одного розв'язку.

Ізлати систему – означає з’ясувати, сумісна вона чи ні, та у якості знайти множину всіх її розв’язків.

системами лінійних рівнянь можна виконувати наступні елементарні перетворення:

- Замість цього, можна встановити деякі правила, які дозволяють зменшити обидві частини будь-якого рівняння системи на дійсне число, не змінюючи його розв'язку. Ці правила можна записати так:
- 1. Ділити обидві частини будь-якого рівняння на одне й те саме дійсне число.
 - 2. Додати до обох частин будь-якого рівняння відповідні частини інших рівнянь, помножені на деяке число α ;
 - 3. Замінити деякі з членів рівняння на інші, не змінюючи їх місця в рівнянні.

нтарні перетворення приводять до систем, еквівалентних даній.

2. Метод Крамера розв'язання СЛАР

Розглянемо систему n лінійних рівнянь із n невідомими x_1, x_2, \dots, x_n

[illegible]

Визначник основної матриці системи Δ , називається головним *визначником*

системи. Якщо $\Delta \neq 0$, то єдиний розв'язок системи можна знайти за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ – допоміжні визначники n -ого порядку, утворені із головного визначника системи Δ заміною 1, 2, ..., n -ого стовпців відповідно стовпцем вільних членів b_1, b_2, \dots, b_n .

Якщо визначник системи $\Delta = 0$ й хоча б один із визначників $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ відмінний від нуля, то система розв'язків не має.

Якщо $\Delta = 0$ і при цьому $\Delta_1 = \Delta_2 = \dots = \Delta_n = 0$, то система може не мати розв'язків; але якщо за цих умов система має хоча б один розв'язок, то вона має безліч розв'язків.

Приклад 1. Дослідити на сумісність систему рівнянь й у випадку сумісності розв'язати її за формулами Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 20, \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 6. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо головний визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -58 \neq 0, \text{ тобто система сумісна.}$$

Знайдемо розв'язок за формулами Крамера. Для цього знайдемо допоміжні визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 20 & 3 & -4 \\ 6 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -464, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 20 & -4 \\ 3 & 6 & -5 \end{vmatrix} = -232, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 2 & 3 & 20 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = -116.$$

Підставляючи знайдені значення визначників до формул Крамера, одержуємо розв'язок системи

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-464}{-58} = 8, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-232}{-58} = -4, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-116}{-58} = 2.$$

3. Матричний метод

Скориставшись правилом добутку матриць, систему можна записати у матричній формі: $AX = B$, де A – основна матриця системи, X – матриця-стовпець невідомих, B – матриця-стовпець вільних членів:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо матриця A не вироджена, то, помноживши обидві частини матричного рівняння зліва на A^{-1} , дістаємо: $A^{-1}AX = A^{-1}B$. Беручи до уваги, що $A^{-1}A = E$, а $EX = X$, знаходимо розв'язок системи в матричній формі

$$X = A^{-1}B.$$

4. Метод Жордана-Гауса

Метод Жордана-Гауса полягає у тому, що невідомі послідовно виключаються як з наступних рівнянь, так і з попередніх. Розглянемо систему лінійних рівнянь. Із цією системою пов'язана таблиця жорданових перетворень, що має вигляд

Таблиця 1

База	x_1	x_2	x_n	b_i
	a_{11}	a_{12}	a_{1n}	b_1
	a_{21}	a_{22}	a_{2n}	b_2

	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	b_m

Розв'язок системи рівнянь зводиться до перетворення жорданових таблиць. Перехід від однієї таблиці до іншої відбувається за допомогою двох кроків:

1-й крок. Серед елементів таблиці $a_{ij} \neq 0$ вибирають розрахунковий елемент.

Рядок і стовпець, на перетині яких розташовано розрахунковий елемент, називаються відповідно *розрахунковим рядком* та *стовпцем*. На першому кроці всі елементи розрахункового рядка діляться на розрахунковий елемент. Далі всі елементи розрахункового стовпця, окрім розрахункового елемента, замінюють нулями.

2-й крок. Усі інші елементи жорданової таблиці обчислюють за правилом прямокутника. Нехай a_{ij} – розрахунковий елемент. Нам потрібно отримати на місці елемента a_{lk} новий a'_{lk} :

$$a'_{lk} = \frac{a_{ij} \cdot a_{lk} - a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}} = a_{lk} - \frac{a_{lj} \cdot a_{ik}}{a_{ij}}$$

Розрахунки зображено на схемі.

a_{ij}		a_{ik}
	"+" "-"	
a_{lj}		a_{lk}

a_{lj}		a_{lk}
	"+" "-"	
a_{ij}		a_{ik}

a_{ik}		a_{ij}
	"+" "-"	
a_{lk}		a_{lj}

a_{lk}		a_{lj}
	"+" "-"	
a_{ik}		a_{ij}

Після перетворень й отримання другої таблиці вибирають новий розрахунковий елемент і відбувається перехід до третьої таблиці й т.д. Жорданові перетворення закінчуються після визначення розрахункових елементів, кількість яких дорівнює рангу матриці системи.

Розв'язання системи в таблицях інколи називають методом жорданових виключень.

Примітка. Двічі в одному рядку вибирати розрахунковий елемент недоцільно.