МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Циклова комісія економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов’язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів

за темою: Геометричні вектори

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2023 №7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2023 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 28.08. 2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:

***1**.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*

***2**.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Поняття вектору. Лінійні операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.
2. Основні теореми про проекції. Координати вектору. Дії над векторами, заданими своїми координатами.
3. Розмірність та базис векторного простору. Розклад вектору за базисом.
4. Добутки векторів.

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші) - К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції 3

1. Поняття вектору. Лінійні операції над векторами. Колінеарні і компланарні вектори.

Визначення. *Вектором* називається направлений відрізок.

Вектор позначається $\overrightarrow{AB}$ (де точка A називається *початком*, а B *кінцем вектора* $\overrightarrow{AB}$) або $\vec{a}$ (рис. 1).

Довжина вектора $\vec{a}$ (або $\overrightarrow{AB}$) називається його *модулем* і позначається $|\vec{a}|$ (або $|\overrightarrow{AB}|$). Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим* і позначається через $\vec{O}$.

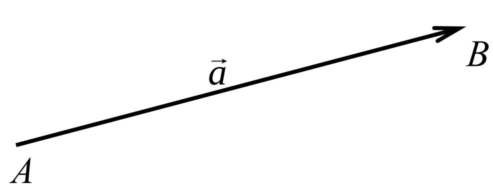

Рис. 1

Визначення. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які розташовані на одній або паралельних прямих, називаються *колінеарними* і позначаються $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Визначення. Два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *рівними*, якщо вони:
1) однакової довжини: $\left|\vec{a}\right| = \left|\vec{b}\right|$;

2) мають однакові напрямки (співнапрямлені), позначають: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, тоді пишуть $\vec{a} = \vec{b}$.

Визначення. Три вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони лежать у одній площині або на паралельних площинах.
Лінійними операціями над векторами є додавання векторів та множення вектора на число.
Нехай вектори $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$, тоді вектор $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$ називається *сумою векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 2), (рис. 3).

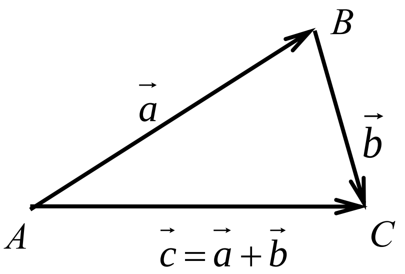

Рис. 2 Правило «трикутника»

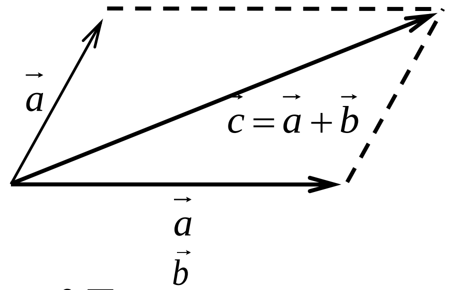

Рис. 3 Правило «паралелограма»

Властивості додавання:
1. Комутативність $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
2. Асоціативність $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

Зауваження. Правило «трикутника» очевидним чином узагальнюється на суму декількох векторів.

Визначення. *Добутком* $\alpha\vec{a}$ *вектора* $\vec{a} \neq 0$ *на число* $\alpha \neq 0$ $(\alpha \in R)$ називається вектор $\vec{b}$, що задовольняє умовам:
1) $\vec{b}$ колінеарний вектору $\vec{a}$;
2) $\left|\vec{b}\right| = \left|\alpha\right| \left|\vec{a}\right|$;

3) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ однаково напрямлені, якщо $\alpha > 0$, і протилежно напрямлені, якщо $\alpha < 0$.

Наслідок. Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то

$$\vec{b} = \alpha\vec{a}, \ (\alpha \neq 0)$$

Наслідок. Якщо $\vec{a}^{\,0}$ $\vec{a}^{\,0}$ – одиничний вектор того самого напряму, що і вектор

$\vec{a}$ ($\vec{a}^0$ – *орт вектора* $\vec{a}$), то $\vec{a} = \left|\vec{a}\right|\vec{a}^0$, звідси орт вектора $\vec{a}$: $\vec{a}^0 = \dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}$.

Властивості добутку вектора на число (α, β – деякі числа):

1. Дистрибутивність відносно додавання чисел $(\alpha+\beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$;

2. Дистрибутивність відносно додавання векторів $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) == \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$;

3. Асоціативність $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$.

Визначення. Вектор $-\vec{a}$ називається *протилежним* вектору $\vec{a}$.

Визначення. *Різницею* $\vec{a}-\vec{b}$ *векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{c}$, що дорівнює сумі векторів $\vec{a}$ і $-\vec{b}$ (рис. 4).

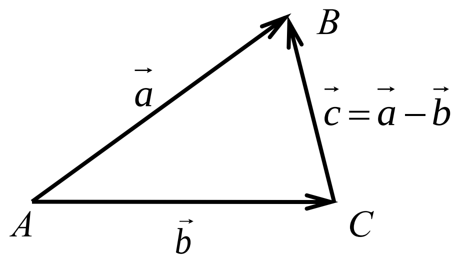

Рис. 4 Правило «трикутника»

2. Основні теореми про проекції. Координати вектора. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Визначення. *Проекцією* $пр_l\,\overrightarrow{AB}$ *вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l називається довжина вектора $\overrightarrow{A'B'}$ (де точка A' – проекція початкової, а B' – кінцевої точок вектора $\overrightarrow{AB}$), взята зі знаком «+», якщо напрямок вектора $\overrightarrow{A'B'}$ та осі l збігаються (рис. 5), і зі знаком «–», якщо ці напрямки протилежні (рис. 6). Очевидно, що $пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\cos\varphi$, де φ – кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю.

Зауваження. *Проекція вектора* $\overrightarrow{AB}$ *на вісь* l дорівнює різниці $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця й початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь (рис. 5), (рис.

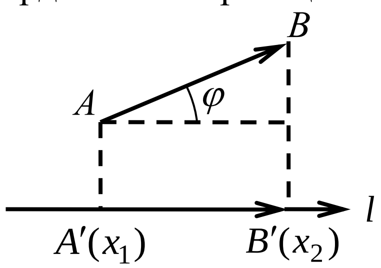

Рис. 5 $пр_l\,\overrightarrow{AB} = \left|\overrightarrow{A'B'}\right|$

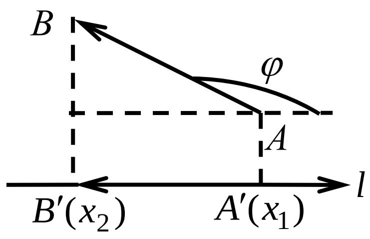

Рис. 6 $пр_l\,\overrightarrow{AB} = -\left|\overrightarrow{A'B'}\right|$

тобто, $пр_l\,\overrightarrow{AB} = x_2 - x_1$.

3. Розмірність та базис векторного простору. Розклад вектору за базисом.

Визначення. Вектор $\vec{a}$ називається *лінійною комбінацією векторів* $\vec{a_i}$ $(i=\overline{1,n})$, якщо

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{a_1} + \alpha_2 \vec{a_2} + ... + \alpha_n \vec{a_n},$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ – деякі числа.

Цей вираз називають *розвиненням вектора* $\vec{a}$ *за векторами* $\vec{a_i}$ $(i = \overline{1,n})$.

Визначення. Два неколінеарні вектори $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, які взято у визначеному порядку та які мають спільний початок, утворюють *базис на площині*.

Теорема 6.1. Кожен вектор $\vec{a}$ площини єдиним чином можна розкласти за базисними векторами $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$: $\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2}$.

Визначення. Трійка некомпланарних векторів $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$, які взято у визначеному порядку та які мають спільний початок, утворюють *базис у просторі*.

Якщо у просторі задано базис, то кожен вектор $\vec{a}$ можна однозначно записати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів:

$$\vec{a} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \alpha_3 \vec{e_3}.$$

Останні дві рівності *називаються розкладами вектора* $\vec{a}$ *за базисами відповідно* $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ і $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$. Числа α_1, α_2 і $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називаються координатами вектора $\vec{a}$ у відповідному базисі і записують це так: $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ або $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$

Зауваження. При додаванні векторів, їх відповідні координати додають, а при множенні на число – координати множать на це число.

Нехай $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ і $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, тоді:

$$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3);$$

$$\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3),$$

де число $\lambda \neq 0$.

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то справджуються співвідношення:

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} = \frac{\alpha_3}{\beta_3},$$

тобто координати колінеарних векторів пропорційні.

Визначення. Базис називається *ортонормованим*, якщо базисні вектори попарно перпендикулярні і кожен із них є ортом.

Визначення. Сукупність точки O і ортонормованого базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ називається *декартовою прямокутною системою координат (ДПСК)*. Вісь $OX \uparrow\uparrow \vec{i}$ називають *віссю абсцис*, $OY \uparrow\uparrow \vec{j}$ – *віссю ординат*, $OZ \uparrow\uparrow \vec{k}$ – *віссю аплікат*. Будь-який вектор $\vec{a}$, що виходить з початку координат можна подати так:

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}.$$

Але $\overrightarrow{OM_1} = np_{OX}\vec{a}\cdot\vec{i}$, $\overrightarrow{OM_2} = np_{OY}\vec{a}\cdot\vec{j}$, $\overrightarrow{OM_3} = np_{OZ}\vec{a}\cdot\vec{k}$. Звідси: $\vec{a} = np_{OX}\vec{a}\cdot\vec{i} + np_{OY}\vec{a}\cdot\vec{j} + np_{OZ}\vec{a}\cdot\vec{k}$, де φ – кут між вектором $\overrightarrow{AB}$ і віссю. Позначимо: $np_{OX}\vec{a}\cdot\vec{i} = a_x$, $np_{OY}\vec{a}\cdot\vec{j} = a_y$, $np_{OZ}\vec{a}\cdot\vec{k} = a_z$. Тоді:

$$\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k} = (a_x, a_y, a_z).$$

Таким чином, у *ДПСК* координатами вектора є його проекції на координатні осі. Остання формула називається *розкладанням вектора* $\vec{a}$ *за координатними осями*.

Визначення. Вектор, що сполучає початок координат з будь-якою точкою простору, називається *радіусом-вектором* цієї точки.

Визначення. *Координатами* довільної точки M простору в *ДПСК* називають координати її радіуса-вектора $\overrightarrow{OM}$.

Таким чином, встановлюється взаємно-однозначна відповідність між точками простору та їх радіусами-векторами. Модуль вектора $\vec{a}$ дорівнює квадратному кореню з суми квадратів його координат:

$$\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Нехай маємо вектор $\overrightarrow{AB}$, де $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, тоді, з урахуванням попередніх рівностей , координати вектора $\overrightarrow{AB}$ знайдемо за формулою:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} + (z_2 - z_1)\vec{k}$$

яку можна записати так: $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Модуль вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Якщо відомі розкладання векторів за осями координат, то лінійні операції з векторами можна виконувати за формулами:

$$\lambda\vec{a} = \lambda a_x\vec{i} + \lambda a_y\vec{j} + \lambda a_z\vec{k};$$

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_x \pm b_x)\vec{i} + (a_y \pm b_y)\vec{j} + (a_z \pm b_z)\vec{k}$$

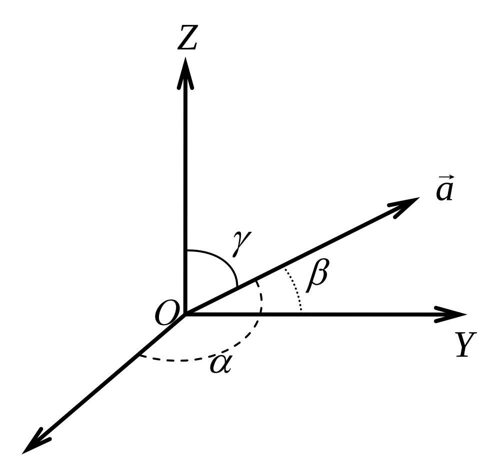

Рис. 7

Напрямок вектору $\vec{a}$ у просторі визначається кутами α, β, γ, які утворює вектор з осями координат (рис. 7).

Косинуси цих кутів називаються *напрямними косинусами вектора* $\vec{a}$.

Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ можна визначити за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{\left|\vec{a}\right|},\quad \cos\beta = \frac{a_y}{\left|\vec{a}\right|},\quad \cos\gamma = \frac{a_z}{\left|\vec{a}\right|}$$. Звідси

дістаємо рівність:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

4. Добутки векторів.

Добутки двох векторів.

Операція множення двох векторів, з одного боку, повинна задовольняти в основному тим самим законам, що й операція множення чисел, а з іншого боку, вона повинна узагальнювати поширені у геометрії та фізиці конкретні процеси. З цих точок зору можливі дві операції множення двох векторів. Одна дає скаляр і тому називається *скалярним множенням*. Друга дає в результаті вектор і тому називається *векторним множенням*.

Скалярний добуток.

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Позначається: $\vec{a}\vec{b}$ або $(\vec{a},\vec{b})$. Отже, $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$, (1)

де φ – кут між векторами.

З (1) дістаємо: $$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}. \quad (2)$$

Оскільки $$np_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}|\cos\varphi,\ np_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\cos\varphi, \quad (3)$$

то, з урахуванням (1), маємо:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|np_{\vec{a}}\vec{b}, \qquad \vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|np_{\vec{b}}\vec{a}. \quad (4)$$

Зауваження. Робота A сталої сили $\vec{F}$, точка прикладання якої переміщується з початку в кінець вектора $\vec{S}$, дорівнює

$$A = \vec{F}\cdot\vec{S}. \quad (5)$$

Скалярний добуток має такі властивості:

1. Комутативність $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$;
2. Дистрибутивність $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;
3. $\lambda(\vec{a}\vec{b}) = \vec{a}(\lambda\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\vec{b}$;
4. $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}$,

де $\vec{a}^2$ – це скалярний добуток вектора самого на себе, який має назву *скалярного квадрату*.

Теорема 1. Необхідною і достатньою умовою перпендикулярності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку:

$$\vec{a}\perp\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}\vec{b} = 0. \quad (6)$$

Теорема 2. Скалярний добуток векторів $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ дорівнює сумі добутків відповідних координат:

$$\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z . \qquad (7)$$

Визначення. Взаємно-перпендикулярні вектори називаються *ортогональними.*

Векторний добуток. *Векторним добутком векторів* $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$ (рис. 3.10), що задовольняє умовам:

1. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярний до векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$
2. Модуль вектора $\vec{c}$ визначається за формулою

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin\varphi, \qquad (8)$$

де φ – кут між векторами.

3. Напрямок вектора $\vec{c}$ вибираємо так, щоб найкоротший поворот вектора $\vec{a}$ до $\vec{b}$ було видно з кінця вектора $\vec{c}$ проти годинникової стрілки.

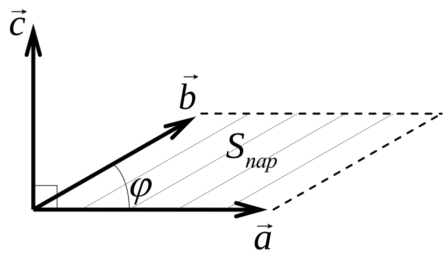

Рис. 1

Векторний добуток векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ позначається : $\vec{a} \times \vec{b}$, або $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$.

Зауваження 1. З означення векторного добутку та рис.1 випливає, що $\left|\vec{a} \times \vec{b}\right|$ чисельно дорівнює площі паралелограма, сторони якого – вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{пар} = \left|\vec{a} \times \vec{b}\right|. \qquad (9)$$

Зауваження 2. Нехай тверде тіло має одну нерухому точку O (рис.2). Нехай до точки M цього тіла прикладено силу $\vec{F}$. З фізики відомо, що дія цієї сили $\vec{F}$ на тіло з нерухомою точкою O характеризується особливою векторною величиною $\overrightarrow{L_0}$, яка називається моментом сили $\vec{F}$ відносно точки O. Момент сили $\vec{F}$ визначає вісь, що проходить через нерухому точку O, навколо якої ця сила намагається обертати тіло. Момент сили $\vec{F}$ відносно точки O й називається векторним добутком вектора $\overrightarrow{OM}$ (плеча сили) і вектора $\vec{F}$ (вектора сили).

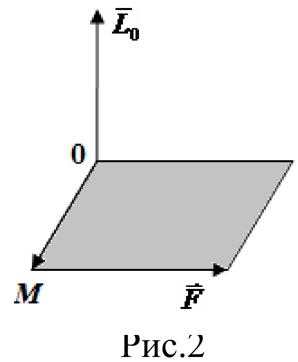

Рис.2

Властивості векторного добутку.

1. Антикомутативність $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;
2. $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;
3. Дистрибутивність $\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$.

Теорема 3. Векторний добуток двох ненульових векторів є нульовим вектором тоді і тільки тоді, коли ці вектори колінеарні, тобто:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = 0. \qquad (10)$$

Теорема 4. Координати векторного добутку векторів $\vec{a}=(a_x,a_y,a_z)$ і $\vec{b}=(b_x,b_y,b_z)$ дорівнюють алгебраїчним доповненням першого рядка визначника:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{vmatrix}. \qquad (11)$$

Добутки трьох векторів. Із трьох векторів можна скласти лише три різних типи добутків.

По-перше, можна перемножити два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ скалярно й одержаний скаляр помножити на третій вектор $\vec{c}$. У результаті дістанемо вектор $(\vec{a}\cdot\vec{b})\cdot\vec{c}$, що називається *найпростішим добутком* трьох векторів. Очевидно, що цей вектор є колінеарним вектору $\vec{c}$.

По-друге, можна перемножити два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторно й одержаний вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити також векторно на третій вектор $\vec{c}$. У результаті дістанемо вектор $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, що називається *подвійним векторним добутком*. Подвійний векторний добуток може бути виражений через найпростіші добутки за формулою $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}=\vec{b}(\vec{a}\vec{c})-\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$.

По-третє, можна перемножити два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ векторно й одержаний вектор $\vec{a}\times\vec{b}$ помножити скалярно на третій вектор $\vec{c}$. В результаті дістанемо скаляр $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}$, що називається *векторно-скалярним* або *мішаним добутком* трьох векторів. Розглянемо мішаний добуток векторів докладніше.

Мішаний добуток. Число, яке дістають як векторно-скалярний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ називається *мішаним добутком трьох векторів*.

Мішаний добуток позначають $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$, тобто:

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}. \qquad (12)$$

Властивості мішаного добутку:

1. Мішаний добуток не зміниться, якщо в ньому поміняти місцями знаки векторного $(\times)$ і скалярного добутку, тобто $(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})$.
2. Мішаний добуток не зміниться при круговій перестановці множників: $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}$.
3. При перестановці будь – яких двох векторів мішаний добуток змінює лише знак: $\vec{b}\vec{a}\vec{c}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{c}\vec{b}\vec{a}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$, $\vec{a}\vec{c}\vec{b}=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Теорема 5. Модуль мішаного добутку трьох неколінеарних векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ чисельно дорівнює об’єму паралелепіпеда, ребрами якого є вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, отже,

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|. \quad (13)$$

Теорема 6. Необхідною і достатньою умовою компланарності трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ – компланарні.} \quad (14)$$

Теорема 7. Мішаний добуток векторів, заданих координатами, визначається за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (15)$$

Приклад 1. Дано точки $A(-3, 1, 4)$, $B(-5, -1, 2)$, $C(0, 4, 1)$, $D(3, 3, -1)$, $E(9, -5, 4)$, $F(10, -5, 1)$. Потрібно: а) обчислити скалярний добуток векторів $2\overrightarrow{CD}$, $3\overrightarrow{EF}$; б) знайти модуль векторного добутку векторів $2\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$; в) обчислити мішаний добуток трьох векторів; г) перевірити, чи будуть колінеарними або ортогональними вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$; д) перевірити, чи будуть компланарними вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{CD}$, $-\overrightarrow{EF}$; е) знайти кут φ між векторами $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{EF}$; ж) знайти проекцію вектора $\overrightarrow{CD}$ на вектор $\overrightarrow{EF}$.

Розв'язання. Обчислимо координати векторів $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{EF}$. Дістаємо: $\overrightarrow{AB}(-2, -2, -2)$, $\overrightarrow{CD}(3, -1, -2)$, $\overrightarrow{EF}(1, 0, -3)$.

а) Скористаємось властивістю 3 скалярного добутку та формулою (7):

$(2\overrightarrow{CD}) \cdot (3\overrightarrow{EF}) = 6(\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{EF}) = 6(3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + (-2) \cdot (-3)) = 54$.

б) Використаємо властивість 2 векторного добутку:

$$(2\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{EF} = 2(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{EF}) = 2\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 6\vec{i} - 8\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Модуль цього вектора знайдемо за формулою:

$\left|(2\overrightarrow{AB}) \times \overrightarrow{EF}\right| = \sqrt{6^2 + (-8)^2 + 2^2} = 2\sqrt{26}$.

в) Оскільки мішаний добуток це векторно-скалярний добуток, то скористаємось властивістю 3 скалярного добутку, властивістю 2 векторного добутку та формулою (15):

$$(9\overrightarrow{AB}, 2CD, -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF}) = -6(\overrightarrow{AB}, CD, \overrightarrow{EF}) = -6\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 132.$$

г) Знаходимо $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(-1,\ -1,\ -1)$. Для того, щоб вектори були колінеарними, необхідно, щоб їхні координати були пропорційними. Оскільки $\frac{-1}{3} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{-1}{-2}$, то вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ не колінеарні.

Ортогональність векторів перевіримо за теоремою 7.1.

$\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right)\cdot\overrightarrow{CD} = (-1)3 + (-1)(-1) + (-1)(-2) = 0$. Отже, вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ ортогональні.

д) За теоремою 7.6 перевіримо, чи компланарні вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2CD, -\overrightarrow{EF}$.

$$(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2CD, -\overrightarrow{EF}) = -(\overrightarrow{AB}, CD, \overrightarrow{EF}) = -\begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -22 \neq 0.$$

Отже, вектори $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, 2CD, -\overrightarrow{EF}$ некомпланарні.

е) За формулою (2) знайдемо косинус кута φ.

$$\cos\varphi = \frac{(-2,-2,-2)(1,0,-3)}{\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+(-2)^2}\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{(-2)1+(-2)0+(-2)(-3)}{2\sqrt{30}} = -\frac{2}{\sqrt{30}},$$

тоді $\varphi = \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{30}}\right) \approx 111^o 30'$.

ж) За формулою (3) дістанємо:

$$np_{\overrightarrow{EF}}\overrightarrow{CD} = \frac{\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{EF}}{\left|\overrightarrow{EF}\right|} = \frac{(3,-1,-2)(1,0,-3)}{\sqrt{1^2+(-3)^2}} = \frac{9\sqrt{10}}{10}.$$