МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ

Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів

за темою: Комплексні числа

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2023 №7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2023 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08. 2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:
Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:
1.*Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
2.*Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Алгебраїчна форма комплексного числа.
2. Геометричне зображення комплексного числа.
3. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа.
4. Дії над комплексними числами
5. Приклади.

Рекомендована література:

Основна

1. Антоненко В.Ф., Олешко Т.І., Паламарчук Ю.А. Вища математика. Модуль 1. Лінійна алгебра: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 140 с.
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Семенов В.О. та ін. Основи лінійної алгебри та аналітичної геометрії: навчальний посібник/ – Кременчук: ПП О.В.Щербатих, 2015. – 200 с

Додаткова

4. Вища математика: методичні вказівки до вивчення курсу для студентів інженерних спеціальностей/ А.О. Рамський, Н.О. Ярецька – Хмельницький: ХНУ, 2021. – 180 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.:Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції

1. Алгебраїчна форма комплексного числа.

Як відомо на множині дійсних чисел не можна виконувати всі дії над числами без обмежень, наприклад, не можна добувати корінь квадратний із від'ємного числа. Але накладання такого обмеження ускладнює, або навіть унеможливлює розв'язок ряду важливих задач, таких як: розв'язок деяких квадратних (коли дискримінант менше нуля) та кубічних рівнянь, доведення багатьох теорем і формул тощо. Вказані обставини призводять до необхідності розширення множини дійсних чисел шляхом введення так званої уявної одиниці $\sqrt{-1} = i$ або $i^2 = 1$. Сам термін «уявне число» виник історично і зберігся до нашого часу, але тепер уже ясно, що без цього числа неможливо було б прийти до багатьох реальних речей. Уявні, або комплексні числа знаходять своє застосування у гідродинаміці, аеромеханіці, теорії пружності, теоретичній фізиці, картографії, електротехніці, теорії фільтрації земних порід, дослідженні поведінки соціальних і економічних систем та багатьох інших галузях науки. Отже, запишемо означення комплексного числа.

Означення. Комплексним числом *z* називають вираз

$$z = x + iy, \qquad (1)$$

де *x* і *y* – дійсні числа, а *i* – уявна одиниця, яка означається рівністю $i^2 = -1$. При цьому *x* називається дійсною частиною комплексного числа *z* і позначається *Rez=x*; *y* – уявною частиною і позначається *Imz=y*. Вираз (1) називається алгебраїчною формою комплексного числа *z*. Комплексні числа $z_1 = x_1 + iy_1$ і $z_2 = x_2 + iy_2$ вважаються рівними, якщо відповідно рівні їх дійсні й уявні частини: $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$.Зокрема, комплексне число $z = x + iy = 0,$ 0= *i*0 +0 тоді і лише тоді, коли *x*=0 і *y*=0. (Порівняння комплексних чисел введено не було).

Якщо *y*=0 , то комплексне число має вигляд *z=i0+ x =x* . Його записують *z=x* і називають дійсним числом.

Якщо *x=0, y≠0*, то комплексне число має вигляд *z=iy*. Його називають чисто уявним числом.

Два комплексні числа *z=x+iy* та $\bar{z}$ *=x-iy* , які різняться лише знаком уявної частини, називаються комплексно – спряженими.

2. Геометричне зображення комплексного числа.

Комплексне число *z=x+iy* геометрично зображається точкою або вектором з координатами *x* , *y* на площині *Oxy*. Цю площину називають комплексною площиною (Рис. 1).

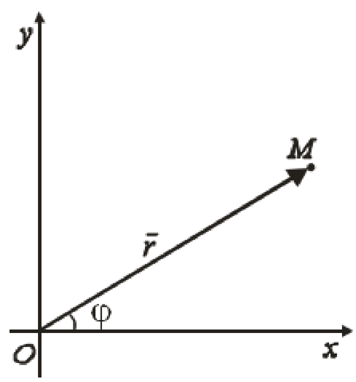

Рис. 1

Комплексне число *x+iy* однозначно визначається його дійсною частиною *x* і уявною частиною *y* . Тому кожному комплексному числу відповідає єдина точка в комплексній площині. Справедливе і обернене твердження, а саме, кожна точка площини *Oxy* зображає єдине комплексне число. Отже, між комплексними числами і точками комплексної площини існує взаємно одно-значна відповідність.

Якщо $z_1=x_1+iy_1$ - дійсне число, тобто $x_1 \neq 0$, $y_1 = 0$, то відповідна точка лежить на дійсній осі. Тому вісь абсцис називають дійсною віссю.

Якщо комплексне число $z_2=x_2+iy_2$ – чисто уявне, тобто $x_2 = 0$, $y_2 \neq 0$, то відповідна точка лежить на осі ординат. Тому вісь ординат називають уявною віссю.

З'єднаємо точку $M(x, y)$ з початком координат. Дістанемо вектор $\overrightarrow{OM}$. В окремих випадках зручно вважати цей вектор геометричним образом числа $x+iy$.

3. Тригонометрична та показникова форми комплексного числа.

Позначимо через r ($r \geq 0$) та φ полярні координати точки A (a, b), вважаючи початок координат полюсом, а додатній напрямок осі Ox – полярною віссю. Тоді мають місце наступні рівності:

$$a = r\cos\varphi; \quad b = r\sin\varphi$$

а, отже, комплексне число z можна записати у вигляді:

$$a+bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi,$$

або

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Вираз, що стоїть справа, називається ***тригонометричною формою*** запису комплексного числа $z = a + bi$; r – називається ***модулем*** комплексного числа z , φ - ***аргументом*** комплексного числа z; вони позначаються так:

$$r = |z|, \quad \varphi = \arg z \qquad (3)$$

Величини r і φ виражаються через a і b наступним чином:

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \varphi = arctg\,\frac{b}{a},$$

Отже,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}; \ \arg z = \arg(a + bi) = arctg\,\frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Аргумент комплексного числа вважається додатним, якщо він відраховується від додатного напрямку осі Ox проти годинникової стрілки, а від'ємним – при протилежному напрямку. Очевидно, що аргумент φ задається не однозначно, а з точністю до доданка $2k\pi$, де k – довільне ціле число.

Зауваження 1. Спряжені комплексні числа $z = a+bi$ та $\bar{z} = a - bi$ мають рівні модулі $|z| = |\bar{z}|$, а їх аргументи рівні за абсолютною величиною, але відрізняються знаком: $\arg z = -\arg \bar{z}$.

Відзначимо, що дійсне число M також може бути записано в тригонометричній формі комплексного числа (2), а саме:

$$M = |M|(\cos 0 + i\sin 0), \text{ при } M > 0,$$

$$M = |M|(\cos\pi + i\sin\pi), \text{ при } M < 0. \qquad (5)$$

Необхідно зауважити, що модуль комплексного числа нуль дорівнює нулю, а його аргументом може бути будь-яке число φ .

Зв'язок між показниковою та тригонометричними функціями подається співвідношенням:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi, \qquad (6)$$

де $e \approx 2,71828...$ – ірраціональне число. Ця рівність носить назву ***формули Ейлера.***

Враховуючи формули (2) та (6) комплексне число можна записати у вигляді:

$$z = re^{i\varphi}. \qquad (7)$$

Ця форма запису комплексного числа називається ***показниковою.***

4. Дії над комплексними числами

Означення. Сумою двох комплексних чисел в алгебраїчній формі $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число, яке задається рівністю

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2). \qquad (8)$$

Означення. Різницею двох комплексних чисел в алгебраїчній формі $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2). \qquad (9)$$

Означення. Добутком двох комплексних чисел у алгебраїчній формі $z_1 = a_1 + ib_1$ і $z_2 = a_2 + ib_2$ називається комплексне число, яке одержимо при множенні цих чисел, як двочленів, за правилами алгебри. При цьому необхідно мати на увазі, що

$$i^2 = -1;\ i^3 = i^2 i = -i;\ i^4 = i^2 i^2 = 1;\ i^5 = i^4 i = i; \ldots; i^{4k} = 1;$$

$$i^{4k+1} = i;\ i^{4k+2} = -1;\ i^{4k+3} = -i.$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2, \text{ тому}$$

Отже,

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i. \qquad (10)$$

Нехай комплексні числа задані у тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2).$$

Тоді $z_1 z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$, тобто добуток двох комплексних чисел є таке комплексне число, модуль якого дорівнює добутку модулів співмножників, а аргумент дорівнює сумі аргументів співмножників.

Означення. Ділення комплексних чисел в алгебраїчній формі задається як дія, що обернена множенню. Практично ж ділення комплексних чисел виконується за наступним правилом: щоб поділити комплексне число $z_1 = a_1 + ib_1$ на інше комплексне число $z_2 = a_2 + ib_2$, необхідно помножити ділене і дільник на комплексне число, спряжене до дільника (тобто, на $a_2 - ib_2$). Тоді дільником буде дійсне число, поділивши на яке дійсну та уявну частини діленого, одержимо частку:

$$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + (a_2 b_1 - a_1 b_2) i}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i.$$

Якщо комплексні числа задані в тригонометричній формі:

$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right), \quad z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right), \quad \text{то}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)}{r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right), \qquad (12)$$

тобто модуль частки двох комплексних чисел дорівнює частці модулів діленого і дільника; аргумент частки дорівнює різниці аргументів діленого і дільника.

Означення. Піднести до цілого n -го степеня комплексне число – це (як і для дійсних чисел) означає перемножити його саме на себе *n* разів. У загальному випадку при довільному цілому додатному числу *n* справедлива формула:

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right). \qquad (13)$$

Ця формула називається ***формулою Муавра.*** Вона показує, що при піднесенні комплексного числа до цілого додатного степеня модуль числа підноситься до цього степеня, а аргумент перемножується на показник степеня.

Добування кореня цілого n -го степеня з комплексного числа краще виконувати в тригонометричній формі за формулою:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \quad (k = \overline{0, n-1}) \qquad (14)$$

Цю формулу легко вивести із (13). Причому, (14) має *n* значень, які можна отримати, підставляючи замість *k* його значення 0, 1, 2, .., *n*-1.

Для алгебраїчної форми запису комплексного числа «легко» можна обчислити лише значення квадратного кореня. Знайдемо квадратний корінь від комплексного числа $a+bi$. Для цього позначимо $x+iy = \sqrt{a+bi}$, тоді $a+bi = x^2-y^2+2ixy$. Враховуючи умову рівності двох комплексних чисел, отримаємо систему: $\begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b, \end{cases}$ розв’язавши яку, отримаємо шукане комплексне число в алгебраїчній формі запису:

$$\sqrt{a+ib} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} + i\sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right)$$

5. Приклади

Приклад 1. Обчислити $z = (2-5i)-(3-4i)+(7+3i)$.

Розв’язання. Додаємо окремо дійсні та уявні частини комплексних чисел. Одержимо:

$$z = \left(2-5i\right) - \left(3-4i\right) + \left(7+3i\right) = 2 - 5i - 3 + 4i + 7 + 3i =$$
$$= \left(2-3+7\right) + \left(-5i + 4i + 3i\right) = 6 + 2i.$$

Приклад 2. Обчислити $z = (3-4i)(5-3i)$.

Розв’язання. Перемножуємо комплексні числа, як двочлени, враховуючи, що $i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ i^5 = i$ і т. д.

Будемо мати:

$$z=(3-4i)\cdot(5-2i)=15-6i-20i+8i^2=15-26i-8=7-26i.$$

Приклад 3. Обчислити $z=(2\text{-}3i)^3$.

Розв'язання. Використовуємо формулу для обчислення кубу різниці двох чисел. Одержуємо:

$$z=2^3-3\cdot2^2\cdot3i+3\cdot2\cdot(3i)^2-(3i)^3=8-36i+54i^2-27i^3=$$
$$=(8-54)+(-36i+27i)=-46-9i.$$

Приклад 4. Обчислити $z=\dfrac{5-2i}{3+4i}$.

Розв'язання. Для одержання результату помножимо чисельник і знаменник дробу на комплексно спряжене число до знаменника. Матимемо

$$z=\frac{5+2i}{3-4i}=\frac{(5+2i)\cdot(3+4i)}{(3-4i)\cdot(3+4i)}=\frac{15+20i+6i+8i^2}{9+16}=$$
$$=\frac{15+26i-8}{25}=\frac{7}{25}+\frac{26}{25}i=0,28+1,04i.$$

Приклад 5. Записати в тригонометричній і показниковій формі число $z=-2+2i\sqrt{3}$.

Розв'язання. Знаходимо:

$$r=|z|=\sqrt{(-2)^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2}=4,\quad \cos\varphi=-\frac{1}{2},\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Кут знаходиться у ІІ чверті, отже, головне значення аргументу $\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ і тому в тригонометричній формі маємо

$$z=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

В показниковій формі $z=4e^{\frac{2}{3}\pi i}$.

Приклад 6. Обчислити $z=(1+i)^{10}$.

Розв'язання. Записуємо число в тригонометричній формі:

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

Тепер застосуємо формулу Муавра:

$$z=\left(\sqrt{2}\right)^{10}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)^{10}=32\cdot\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=32i.$$

Приклад 7. Розв'язати квадратне рівняння $z_2-4z+13=0$.

Розв'язання. Використовуємо формулу для розв'язку квадратного рівняння, одержимо

$$z=2\pm\sqrt{4-13}=2\pm\sqrt{-9}=2\pm\sqrt{9}\cdot\sqrt{-1}=2\pm3i.$$

Тут враховано, що $\sqrt{-1}=i.$

Таким чином, будь – яке квадратне рівняння з дійсними коефіцієнтами має розв'язок у множині комплексних чисел.