МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ
ХАРКІВСЬКОГО НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів

за темою: Функції, границі, неперервність

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08. 2023 №7

СХВАЛЕНО
Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08. 2023 №1

ПОГОДЖЕНО
Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 28.08. 2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:
Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:
***1**.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
***2**.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

План лекції

1. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції. Основні властивості функцій.
2. Основні елементарні функції. Елементарні функції.
3. Поняття границі функції в точці. Розкриття деяких невизначеностей.
4. Неперервність функції, точки розриву.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функций однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html

Текст лекції

1. Поняття функції. Область визначення і область значень функції. Способи задання функції. Основні властивості функцій.

Нехай $D=\{x\}$ та $E=\{y\}$ – непусті числові множини, а x та y – відповідно їх елементи.

Визначення. Якщо кожному елементу $x\in D$ за певним законом або правилом поставлено у відповідність єдиний елемент $y\in E$, то вважають, що між змінними x та y установлена *функціональна залежність*; x називають *незалежною змінною* (або *арґументом*), а y – *залежною змінною* (або *функцією*).

Символічний запис функції: $y=f(x)$, $x\in D$, $y\in E$.

Множину D називають *областю визначення* функції та позначають $D(f)$, а множину E називають *областю значень* функції та позначають $E(f)$.

Вважають також, що функція f *відображає множину D на множину E:* $\overset{def}{D \Rightarrow E}$.

Таким чином, символом $f(x)$ позначають число *y,* якому, згідно із законом *f*, відповідає значення $x \in D$. Наприклад, $f(x_0)$ є значення функції в точці $x = x_0$, якщо $x_0 \in D$. Якщо x_0 не належить D ($x_0 \notin D$), то вважають, що функція $f(x)$ *не визначена або не існує* в точці x_0.

Для функцій $f(x)$ та $g(x)$, заданих на одній множині *D*, вводяться поняття суми, добутку і частки. Це нові функції $f(x)+g(x)$, $f(x)-g(x)$, $f(x)g(x)$, $f(x)/g(x)$, де у випадку частки вважається, що $g(x) \neq 0$ на множині *D*.

Часто при розв'язуванні задач доводиться мати справу з функцією від арґументу, який в свою чергу є функцією від іншого арґументу. Таку функцію називають *функцією від функції* або *складеною функцією*.

Нехай функція $z = \varphi(y)$ визначена в деякій області $Y = \{y\}$, а функція $y = g(x)$ – в області $X = \{x\}$, причому всі значення функції $y = g(x)$ містяться в області Y. Розглядатимемо $\varphi(y) = \varphi(g(x)) = f(x)$ як функцію від змінної x в області $X = \{x\}$. Тоді функцію $z = f(x) = \varphi(g(x))$ називають *складеною функцією* від змінної x в області $X = \{x\}$, а операцію утворення функції $z = f(x)$ називають *суперпозицією* (накладанням) функцій $g(x)$ і $\varphi(y)$.

Способи задання функції

Задати функцію – це значить вказати область її визначення і правило, за допомогою якого за даним значенням незалежної змінної знаходять відповідні їй значення функції.

Функцію можна задати одним з чотирьох способів: табличним, аналітичним (за допомогою формули), словесним та графічним.

Табличний спосіб полягає в тому, що функцію задають у вигляді таблиці в одному рядку (або стовпчику) якої записані значення аргументу, а в другому – відповідні їм значення функції.

При *аналітичному способі* функція задається формулою, за якою значення y обчислюється за заданим значенням x.

При *словесному* заданні функції залежність між *x* та *y* описується словесно. Наприклад, "*y* є найбільше ціле число, яке не перевищує *x*". Цю функцію прийнято позначати $y = [x]$. Для $x = 2 \Rightarrow y = [2] = 2$; $x = 5{,}3 \Rightarrow y = [5{,}3] = 5$; $x = -1{,}1 \Rightarrow y = [-1{,}1] = -2$.

Більш наочним є *графічний спосіб* задання функції. При графічному заданні функції відповідність між арґументом і функцією задають у вигляді графіка функції.

Визначення. *Графіком функції* називається множина точок площини, абсцисами яких є допустимі значення арґументу, а ординатами – відповідні їм значення функції.

Основні властивості функцій

Парність і непарність

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *парною* (*непарною*) , якщо $\forall x \in D$ значення $(-x) \in D$ та виконується рівність $f(-x) = f(x)$ ($f(-x) = -f(x)$).

Згідно з означенням, парна та непарна функції повинні бути визначені на множині, симетричній відносно початку координат. Властивість графіка парної функції – він симетричний відносно осі ординат $0y$. Властивість графіка непарної функції – він симетричний відносно початку координат.

При побудові графіків парних і непарних функцій достатньо побудувати лише праву його вітку для додатних значень арґументу, а потім доповнити його лівою віткою, яка симетрична їй відносно осі ординат для парних функцій та симетричною їй відносно початку координат лівою віткою для непарних функцій. Більшість функцій не належать ні до парних, ні до непарних.

Періодичність

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *періодичною,* якщо $\exists T \neq 0$, таке, що $\forall x \in D$ значення $(x+T, x-T) \in D$ та виконується рівність $f(x) = f(x+T)$. Число T називають *періодом* функції.

Будь-яка періодична функція має нескінченну множину періодів. Основним періодом називають найменше з усіх чисел $T > 0$, яке задовольняє даному вище визначенню. Періодичною є і будь-яка стала функція, причому її періодом може бути будь-яке число. Дослідження властивостей періодичної функції проводять у межах одного періоду.

Нулі функції

Визначення. *Нулем* функції називають таке дійсне значення *x*, при якому значення функції дорівнює нулю.

Для того, щоб знайти нулі функції, необхідно розв'язати рівняння $f(x) = 0$. Дійсні корені цього рівняння є нулями функції $y = f(x)$. Нулями функції є абсциси точок, у яких її графік або перетинає вісь абсцис, або дотикається до неї.

Монотонність

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *зростаючою* (*спадною*), якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 арґументу x, що належать її області визначення D, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$).

Визначення. Функція $y = f(x)$ називається *неспадною* (*незростаючою*), якщо для будь-яких двох значень x_1 і x_2 арґументу x, що належать її області визначення D, з нерівності $x_1 < x_2$ випливає справедливість співвідношення $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$).

Визначення. Функції зростаючі, спадні, незростаючі й неспадні називають *монотонними*. Функції зростаючі й спадні називають *строго монотонними*.

Обернена функція

Визначення. Функція $x=\varphi(y)$ називається *оберненою* по відношенню до функції $y=f(x)$, якщо:

1) область визначення функції f є областю значень функції φ;

2) область значень функції f є областю визначення функції φ;

3) одному значенню змінної $x\in D(f)$ відповідає одне і тільки одне значення змінної $y\in D(\varphi)$.

Графіки прямої та оберненої функцій симетричні між собою відносно бісектриси першого та третього координатних кутів.

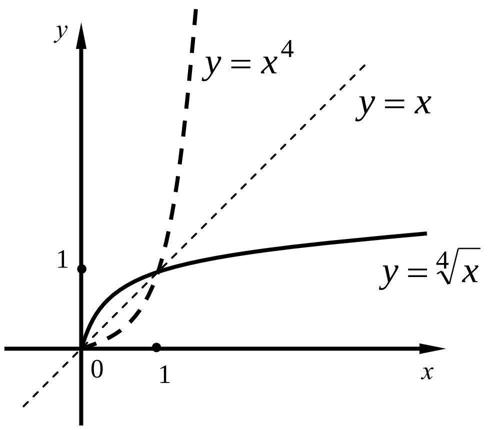

Рис. 1

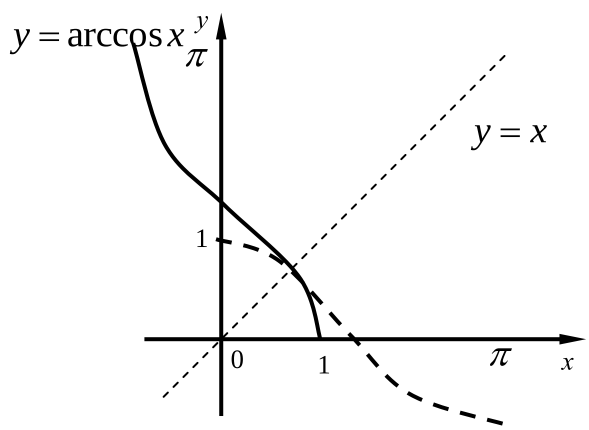

Рис. 2

2. Основні елементарні функції. Елементарні функції

Визначення. *Елементарною функцією* називається функція, яка може бути задана однією формулою $y=f(x)$, де вираз $f(x)$ складений з основних елементарних функцій і сталих за допомогою скінченої кількості арифметичних дій і операцій взяття функції від функції.

Основні елементарні функції:

1. Степенева функція $y=x^n$;
2. Показникова функція $y=a^x$, $a>0$, $a\neq 1$;
3. Логарифмічна функція $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;
4. Тригонометричні функції $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$;
5. Обернені тригонометричні функції $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$.

3. Поняття границі функції в точці. Розкриття невизначеностей.

Визначення. Функція $y=f(x)$ *має в точці* x_0 *границю* A, якщо для будь-якого наперед заданого як завгодно малого числа $\varepsilon>0$ можна знайти таке число $\delta>0$, що для всіх відмінних від x_0 значень x із області визначення функції, які задовольняють умову $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Записують це так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Визначення. Число A називають *границею функції* $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\Delta > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівність $x > x_0$, $x > \Delta$ ($x < x_0$, $x < -\Delta$), виконується нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Це позначають відповідно так: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$ ($\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$).

Зауваження 1. Границя може існувати при $x \to x_0$, якщо навіть функція $y = f(x)$ у точці x_0 не існує.

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = const$, а $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \infty$.

Щоб знайти границю функції, необхідно підставити значення границі до виразу, що стоїть під знаком границі. Якщо в результаті підстановки отримаємо число або нескінченність, то границю визначено.

Приклад 1. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \sin x - 2\cos x}{x^3 - 1}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \sin x - 2\cos x}{x^3 - 1} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0} (x^2 + \sin x - 2\cos x)}{\lim\limits_{x \to x_0} (x^3 - 1)} =$

$$= \frac{\lim\limits_{x \to x_0} x^2 + \lim\limits_{x \to x_0} \sin x - 2 \lim\limits_{x \to x_0} \cos x}{\lim\limits_{x \to x_0} x^3 - \lim\limits_{x \to x_0} 1} = \frac{0 + 0 - 2}{-1} = 2.$$

Приклад 2. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x - 2} = \left[\dfrac{const}{0}\right] = \infty$.

Якщо в результаті підстановки значення границі до виразу отримаємо одну із невизначеностей $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, то їх потрібно розкривати.

Приклад 3. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^3 + 3x^2 - 4}{x^3 - 2x + 3}$.

Розв'язання. Тут невизначеність виду $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$. У подібних випадках необхідно в чисельнику і знаменнику винести за дужки найвищий степінь невідомого x і скоротити:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x^2-4}{x^3-2x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{4}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}-\frac{4}{x^3}}{1-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\frac{2}{1}=2,$$

або, скориставшись правилом спрощеного обчислення, отримаємо той самий результат.
Розглянемо деякі випадки спрощеного обчислення границь.

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, де $f(x)=P_n(x)=a_0+a_1x+...+a_nx^n$,

$\varphi(x)=Q_m(x)=b_0+b_1x+...+b_mx^m$.

Підстановка приводить до невизначеності $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

Тоді $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{b_m}, \text{ якщо } m=n,\\ 0, \text{ якщо } m>n,\\ \infty, \text{ якщо } m<n.\end{cases}$

2. Якщо при підстановці до виразу $x=x_0$ приходимо до невизначеності $\left[\dfrac{0}{0}\right]$, а $f(x)$ і $\varphi(x)$ многочлени степеня n і m, то це означає, що x_0 є коренем многочленів чисельника та знаменника.
Для розкриття такої невизначеності необхідно розкласти чисельник і знаменник на множники, та скоротити їх на $(x-x_0)$.

4. Поняття неперервної функції в точці та на проміжку.

Визначення. Число a називається *лівосторонньою границею функції* $f(x)$ при $x\to x_0-0$ (тобто, границя зліва), якщо $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ таке, що для всіх *x,* які задовольняють нерівності $0<x_0-x<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-a|<\varepsilon$. Аналогічним буде визначення для правосторонньої границі $f(x)$ при $x\to x_0+0$.
Нехай дано функцію $y=f(x)$, визначену в деякому проміжку X, і нехай x_0 – точка цього проміжку.

Визначення. Функція $y=f(x)$ називається *неперервною в точці* x_0, якщо існують односторонні границі $\lim\limits_{x\to x_0-0}f(x)$ і $\lim\limits_{x\to x_0+0}f(x)$, які збігаються та дорівнюють значенню функції в точці x_0:

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=f(x_0).$$

Визначення. Функція $y=f(x)$ називається *неперервною* на проміжку, якщо вона неперервна в кожній точці цього проміжку.

Основні теореми про неперервні функції.

Теорема 1. Нехай функції $y= f(x)$ і $y= g(x)$ - неперервні на інтервалі $(a;b)$. Тоді їх наведені далі комбінації також неперервні:

$f(x) \pm g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \dfrac{f(x)}{g(x)}$ за умови, що $g(x) \neq 0$.

Теорема 2. Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна у точці x_0, а функція $y = f(x)$ неперервна у точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна у точці x_0.

Можна довести, що основні елементарні функції неперервні пр всіх значеннях x, для яких вони визначені, тому з теорем **1** і **2** випливає, що елементарні функції також неперервні в усіх точках, що належать їх області визначення. Цей важливий результат дозволяє легко знаходити границю елементарної функції при $x \to x_0$, якщо функція визначена в точці $x = x_0$. Для цього достатньо обчислити значення функції в цій точці: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x\to x_0} x) = f(x_0)$, тобто знаки границі та функції можна міняти місцями.

Властивості функцій, неперервних на сегменті.

Теорема 3 (Больцано-Коші) Нехай функція $y = f(x)$ неперервна на сегменті $[a,b]$ і на кінцях його набуває значень різних знаків. Тоді на сегменті $[a,b]$ знайдеться точка c , в якій функція перетворюється на нуль, тобто $f(c) =0$, $a< c< b$.

Теорема 4 (Вейєрштрасса). Неперервна на сегменті $[a,b]$ функція $y= f(x)$ досягає на цьому сегменті свого найбільшого і найменшого значень.

Точки розриву функцій та їх класифікація.

Якщо принаймні одна з умов неперервності не виконується в точці x_0, то кажуть, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ має розрив, а саму точку x_0 називають *точкою розриву* цієї функції. Зокрема, розглядають такі випадки точок розриву:

1. Односторонні границі функції $y = f(x)$ при $x \to x_0$ існують, та: $\lim\limits_{x\to x_0 -0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0 +0} f(x) \neq f(x_0)$ (рис.3). У цьому випадку точку x_0

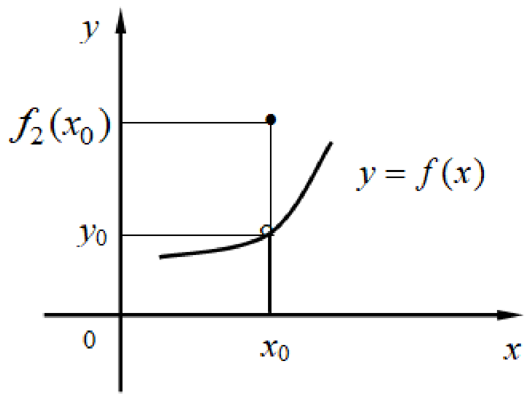

Рис.3

називають *точкою усувного розриву* (така назва пояснюється тим, що достатньо довизначити чи перевизначити функцію в точці x_0, щоб вона стала неперервною в точці x_0).

2. Односторонні границі існують, але не дорівнюють одна одній (рис. 4) $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою стрибка функції.* Точки усувного розриву і точки стрибка функції об'єднують загальним терміном – *точки розриву першого роду*.

3. Принаймні одна з односторонніх границь дорівнює нескінченності. У цьому випадку точку x_0 називають *точкою розриву другого роду* (рис. 5).

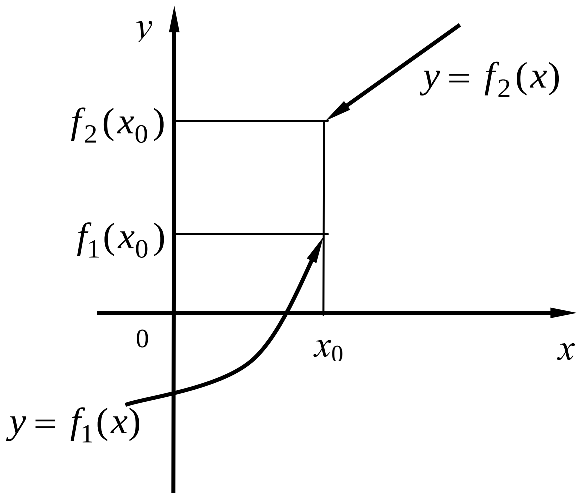

Рис. 4

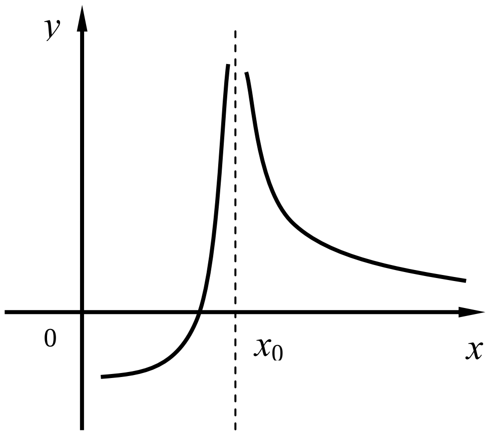

Рис. 5