

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ

навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів**

за темою: Диференціальне числення функцій однієї та кількох змінних

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 №7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2023 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 28.08.2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:

1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.

2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.

План лекції

- 1 Поняття похідної функції. Геометричний та механічний зміст похідної. Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції.
- 2 Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної, оберненої та неявної функцій.
- 3 Поняття диференціала функції. Зв'язок диференціала з похідною.
4. Похідні та диференціали вищих порядків.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [\[https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html\]](https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html)

Текст лекції

1. Поняття похідної функції. Геометричний та механічний зміст похідної.

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено $\forall x \in (a, b)$. Різниця $\Delta x = x_2 - x_1 \in (a, b)$ називається *приростом аргументу*, а різниця $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$ - *приростом функції*. Приріст функції позначають $\Delta f(x)$ або Δy , тоді $\Delta f(x) = f(x_2) - f(x_1) = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено для $x \in (a, b)$, а також, $x \pm \Delta x \in (a, b)$.

Визначення. *Похідною $f'(x)$ від функції $f(x)$ у точці x називається границя відношення приросту функції у цій точці до відповідного приросту аргументу за умови, що Δx прямує до нуля і границя існує, тобто*

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Операція знаходження похідної функції називається *диференціюванням* цієї функції. Функція, диференційована в кожній точці проміжку, називається диференційованою на проміжку.

Зв'язок між неперервністю та диференційованістю функції встановлює наступна теорема.

Теорема. Функція, диференційована на проміжку, є неперервною на цьому проміжку.

Обернене твердження невірне, що показує контрприклад функції $y = |x|$.

Геометричний та механічний (фізичний) зміст похідної

Дотичною до кривої в даній точці називається граничне положення січної PQ , коли точка Q наближається вздовж кривої до точки P (рис.1).

Відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є тангенсом кута нахилу січної до осі Ox . При $\Delta x \rightarrow 0$ січна

прямує до дотичної в точці P . Тангенсом кута α нахилу дотичної до осі Ox при цьому буде границя відношення

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

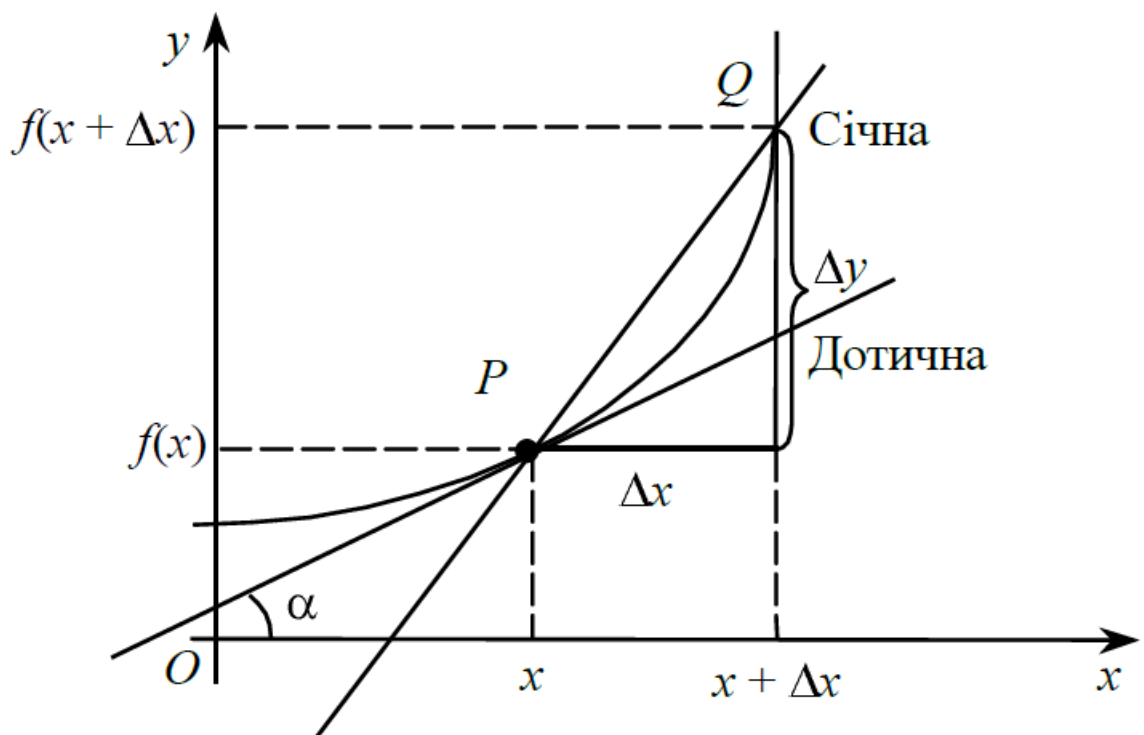


Рис. 1

Значення похідної в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці x_0 і дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до додатного напрямку осі Ox : $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha = k$,

Де k - *кутовий коефіцієнт дотичної* до графіка функції.

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ - **рівняння дотичної** до графіка функції $y = f(x)$ в точці з абсцисою x_0 .

Фізичний зміст похідної

Якщо $S = S(t)$ - залежність пройденого шляху від часу, то:

1. $V = S'(t)$ - швидкість прямолінійного руху;
2. $a = V'(t)$ - прискорення прямолінійного руху.

2. Правила диференціювання. Таблиця похідних. Похідна складеної функції.

Правила диференціювання

Якщо C – константа, $u = u(x)$, $v = v(x)$, тоді

$$\begin{array}{lll}
 1. C' = 0 & 2. (Cu)' = Cu' & 3. (u \pm v)' = u' \pm v' \\
 4. (uv)' = u'v + uv' & 5. \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} & 6. f(u)' = f'(u)u'
 \end{array}$$

Таблиця похідних основних елементарних функцій

$$\begin{array}{ll}
 1. (x^n)' = nx^{n-1} & 2. (\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a} \\
 3. (\ln x)' = \frac{1}{x} & 4. (a^x)' = a^x \ln a \\
 5. (e^x)' = e^x & 6. (\sin x)' = \cos x \\
 7. (\cos x)' = -\sin x & 8. (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \\
 9. (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} & 10. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 11. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & 12. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\
 13. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2} & 14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x \\
 15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x & 16. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \\
 17. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}
 \end{array}$$

Похідна складеної функції

Нехай маємо складну функцію $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$. Змінну u будемо

називати *проміжним аргументом*. Припустимо, що функція $u = \varphi(x)$ є диференційованою в точці x , а функція $y = f(u)$ - у відповідній точці $u = \varphi(x)$. Тоді має місце теорема.

Теорема 1. Похідна складеної функції за незалежною змінною дорівнює добутку похідної за проміжним аргументом на похідну проміжного аргументу за незалежною змінною, тобто:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x$$

Приклад 2. Продиференціювати задані функції:

$$\text{а) } y = \sqrt[3]{5x^3 - 2x + 3} + \frac{3}{(x+2)^4}.$$

Розв'язання.

$$y' = \frac{1}{3}(5x^3 - 2x + 3)^{-\frac{2}{3}}(15x^2 - 2) + \frac{3(-4)}{(x+2)^3} = \frac{15x^2 - 2}{3\sqrt[3]{(5x^3 - 2x + 3)^2}} - \frac{12}{(x+2)^3}.$$

$$\text{б) } y = \frac{3\arcsin(2x+3)}{(x-4)^3}.$$

Розв'язання.

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(3\arcsin(2x+3))'(x-4)^3 - 3\arcsin(2x+3)((x-4)^3)'}{(x-4)^6} = \\ &= \frac{\frac{3}{\sqrt{1-(2x+3)^2}}2(x-4)^3 - 3\arcsin(2x+3)3(x-4)^2}{(x-4)^6} = \\ &= \frac{\frac{6(x-4)}{\sqrt{1-(2x+3)^2}} - 9\arcsin(2x+3)}{(x-4)^4} = \frac{6(x-4) - 9\arcsin(2x+3)\sqrt{1-(2x+3)^2}}{(x-4)^4\sqrt{1-(2x+3)^2}} = \\ &= \frac{6}{(x-4)^3 \cdot \sqrt[4]{1-(2x+3)^2}} - \frac{9\arcsin(2x+3)}{(x-4)^4}; \end{aligned}$$

Нехай маємо складену показникову функцію $y = u^v$, де $u(x)$, $v(x)$ - диференційовані в точці x функції.

Правило. Щоб знайти похідну y' , логарифмують рівняння $y = u^v$, а потім диференціюють отримане рівняння $\ln y = v \ln u$ та знаходять y' як для функції, заданої неявно.

Приклад 3. Знайти y' : $y = (\operatorname{ctg} 5x)^{\operatorname{arctg} 2x}$.

Розв'язання. Прологарифмуємо обидві частини рівняння за основою e , а потім знайдемо похідну як від функції заданої неявно.

$$\begin{aligned} \ln y &= \ln(\operatorname{ctg} 5x)^{\operatorname{arctg} 2x} \Rightarrow (\ln y)' = [\operatorname{arctg} 2x \ln(\operatorname{ctg} 5x)]' \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{y'}{y} = (\operatorname{arctg} 2x)' \ln(\operatorname{ctg} 5x) + \operatorname{arctg} 2x (\ln(\operatorname{ctg} 5x))' \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y' = y \left(\frac{1}{1+4x^2} 2\ln(\operatorname{ctg} 5x) + \operatorname{arctg} 2x \frac{1}{\operatorname{ctg} 5x} \left(-\frac{1}{\sin^2 5x} \right) 5 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y' = (\operatorname{ctg} 5x)^{\operatorname{arctg} 2x} \left(\frac{2\ln(\operatorname{ctg} 5x)}{1+4x^2} - \frac{5\operatorname{arctg} 2x}{\operatorname{ctg} 5x \sin^2 5x} \right).$$

Цей спосіб зручно застосовувати для функцій, що мають громіздкий запис. Вираз $\frac{y'}{y}$ називається *логарифмічною похідною* функції.

3. Поняття диференціала функції. Зв'язок диференціала з похідною.

Визначення. Диференціалом функції $y = f(x)$ називають головну лінійну відносно Δx частину приросту функції.

Якщо функція $y = f(x)$ у точці x має похідну $f'(x)$, тоді добуток похідної $f'(x)$ на приріст Δx аргументу є диференціалом функції та позначається символом dy : $dy = y' \Delta x$.

Зважаючи на те, що для функції $y = x$ $y' = 1$, тому позначимо $dx = \Delta x$. Остаточно маємо:

$$dy = y' dx, \text{ звідки } y' = \frac{dy}{dx}.$$

Отже, похідну y' можна визначити як відношення диференціала функції до диференціала незалежної змінної.

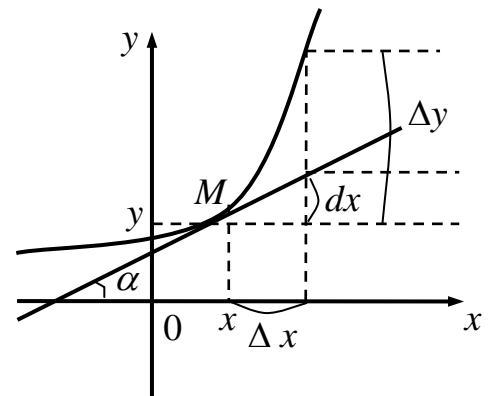


Рис. 2

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos 2t}{\frac{1}{t}} = 2t \cos 2t.$$

4. Похідні та диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою в точці x . Похідна $f'(x)$ цієї функції є новою функцією x . Отже, її також можна диференціювати, тобто знаходити похідну від першої похідної. Якщо вона існує, то її називають *похідною другого порядку функції $f(x)$* або *другою похідною* і позначають $f''(x)$. Тобто $f''(x) = (f'(x))'$. Взагалі, *похідною n -го порядку* називають похідну від похідної $(n-1)$ -го порядку та позначають $f^{(n)}(x)$, тобто

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'.$$

Приклад 4. Знайти $f^{(n)}(x)$, якщо $f(x) = x^\alpha$, $x > 0$.

Розв'язання. Скориставшись таблицею похідних та останньою формулою маємо $f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1) \cdot x^{\alpha-2}$, $f'''(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \cdot x^{\alpha-3}$ і т.д.

Звідси отримаємо

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - n + 1) \cdot x^{\alpha - n}.$$

Нехай функція $y = f(x)$ є диференційованою за змінною x . Диференціал $dy = f'(x)dx$ цієї функції є новою функцією x , причому від x може залежати тільки перший множник $f'(x)$, а другий (dx) є приростом незалежної змінної x та від значення цієї змінної не залежить. Оскільки dy є функцією від x , то можна говорити про диференціал цієї функції.

Диференціал від диференціала функції називають *другим диференціалом* або *диференціалом другого порядку* та позначають як d^2y : $d(dy) = d^2y$.

В силу означення диференціала маємо $d^2y = d[f'(x)dx]$. Оскільки dx від x не залежить та під час диференціювання виноситься за знак похідної, то ми отримуємо: $d^2y = f''(x)(dx)^2$ або $d^2y = f''(x)dx^2$.

Якщо x є незалежною змінною, то аналогічно визначають диференціали третього і вищих порядків. Має місце формула Лейбніца

$$d^n y = \left[f^{(n-1)}(x) dx^{n-1} \right] dx = f^{(n)}(x) dx^n.$$

ЛЕКЦІЯ 8

План лекції

1. Поняття функції багатьох змінних
2. Частинні похідні. Мішані похідні.
3. Повний диференціал функції двох змінних.
4. Похідна за напрямком. Градієнт.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Коновалюк В.С, Олешко Т.І., Петрусенко В.П. Вища математика. Модуль 3.
3. Вступ до математичного аналізу: Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 128 с.
3. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с

Додаткова

4. Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. – Ч.1. – М.: Высш. шк., 1986. – 415 с., ил.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [<https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html>]

Текст лекції 8

1. Поняття функції багатьох змінних.

При вивченні багатьох процесів доводиться зустрічатися з функціями двох і більше незалежних змінних. Функції багатьох змінних будемо вивчати, спираючись на функції двох незалежних змінних.

Нехай задані три непорожні числові множини $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$, $Z = \{z\}$.

Визначення. Якщо парі чисел $(x, y) \in D$ ставиться у відповідність за деяким законом чи правилом одне і тільки одне число z , то говорять, що задана функція і що $z \in$ *функцією двох незалежних змінних* x і y . Пишуть: $z = f(x, y)$.

Визначення. Множина пар чисел (x, y) , при яких існує функція $z = f(x, y)$, називається *областю визначення* або *областю існування* цієї функції і позначається $D(f)$.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = 2x - y$.

Розв'язання. Аналітичний вираз $2x - y$ має сенс при будь-яких значеннях x і y . Отже, областю визначення функції є вся площина Oxy .

Приклад 4. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Розв'язання. Дана функція визначена при тих значеннях x і y , для яких має місце нерівність $1 - x^2 - y^2 \geq 0$, тобто $x^2 + y^2 \leq 1$. Цій нерівності задовольняє множина точок площини $M(x, y)$, що знаходяться усередині одиничного круга із центром в початку координат.

Приклад 5. Знайти область визначення функції $z = \ln(x + y)$.

Розв'язання. Скориставшись властивостями логарифмічної функції можемо стверджувати, що дана функція визначена при тих значеннях x і y , для яких виконується нерівність $x + y > 0$ або $y > -x$.

Геометрично це множина точок півплощини (рис. 1).

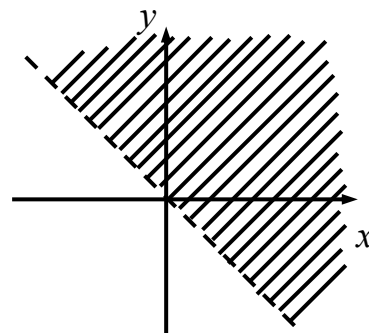


Рис. 1

Визначення. Околом точки $M_0(x_0, y_0)$ називається множина усіх точок площини (x, y) , які задовольняють нерівності $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r$. Геометрично це множина точок, що лежать усередині круга радіуса r із центром у точці $M_0(x_0, y_0)$. Позначається $r(M_0)$ (рис.2)

Нехай дана функція $z = f(x, y)$, визначена в деякій області D площини Oxy . Розглянемо деяку точку $M_0(x_0, y_0)$, яка знаходиться в області D або на її межі.

Визначення. Функція називається *неперервною в області D* , якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Визначення. Якщо в деякій точці $N(x_0, y_0)$ має місце

$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) \neq f(x_0, y_0)$, то точка $N(x_0, y_0)$ називається *точкою розриву*

функції $z = f(x, y)$.

Наприклад, функція $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ визначена усюди, крім точки $O(0, 0)$.

Отже, точка $O(0, 0)$ є точкою розриву графіка функції. Графіком функції двох змінних є поверхня.

2. Частинні похідні. Мішані похідні.

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$.

Надамо незалежній змінній x приріст Δx , а y залишимо без змін; тоді функція z отримає приріст, який називають *частинним приростом функції z*

по змінній x і позначають через

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y). \quad (1)$$

Аналогічно, якщо x зберігає стале значення, а y одержує приріст Δy , то функція z отримає *частинний приріст z по змінній y*

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (2)$$

Нарешті, якщо аргументу x надамо приріст Δx , а аргументу y — Δy , то отримаємо *повний приріст* функції z

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \quad (3)$$

Визначення. Частинною похідною від функції $z = f(x, y)$ за змінною x називається границя відношення частинного приросту $\Delta_x z$ до приросту аргументу Δx при $\Delta x \rightarrow 0$, якщо ця границя існує і скінченна.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \quad (4)$$

Аналогічно визначається

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (5)$$

При обчислюванні частинних похідних справедливі теореми та формули диференціювання функції однієї змінної. Під час обчислення *частинної похідної по x або по y* від функції $z = f(x, y)$ друга змінна вважається сталою.

Приклад 6. Знайти частинні похідні функції $z = x^2 \sin y$.

Розв'язання. При обчисленні $\frac{\partial z}{\partial x}$ множник $\sin y$ виносимо за знак похідної

як сталу величину. При обчисленні $\frac{\partial z}{\partial y}$ множник x^2 виносимо за знак похідної як сталу величину. Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Приклад 7. Знайти частинні похідні функції $z = x^2 + y^2$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y.$

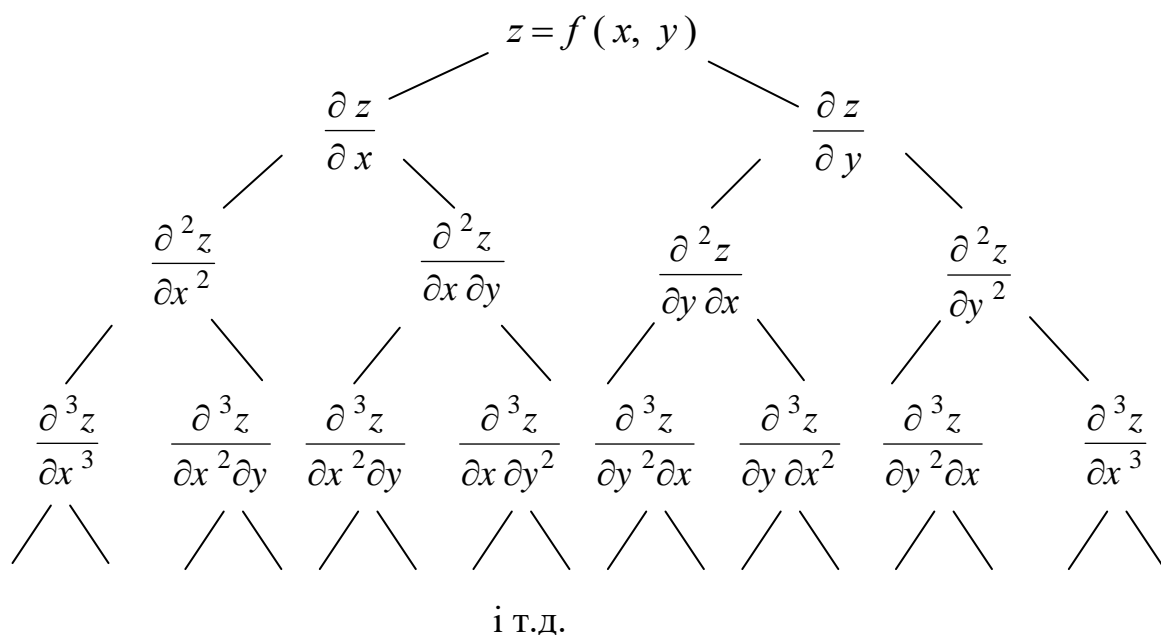
З геометричної точки зору частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial y}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої, яка утворюється в перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $x = \text{const}$; частинна похідна $\frac{\partial z}{\partial x}$ чисельно дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до кривої, яка утворюється в перетині поверхні $z = f(x, y)$ площиною $y = \text{const}$. Тому частинні похідні інколи називають похідними в напрямі координатних осей.

Мішані похідні

Нехай $z = f(x, y) \in D$ неперервна та диференційована функція. Тоді $\frac{\partial z}{\partial x}$ та

$\frac{\partial z}{\partial y}$ називаються *частинними похідними першого порядку*. Якщо їх в свою

чергу можна диференціювати, то існують другі похідні і т.д. Для них можемо записати наступний ланцюжок похідних



Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ називають *прямими похідними по змінним*. Похідні

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають *мішаними похідними*. Для функції двох незалежних змінних існують дві прямі та дві мішані похідні другого порядку.

Приклад 8. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 y + y^3$.

Розв'язання. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2,$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Приклад 9. Знайти частинні похідні $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функції $z = x \ln(x + y^2)$.

Розв'язання. Користуючись незалежністю похідних вищого порядку від порядку диференціювання, отримуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \ln(x + y^2) + \frac{x}{x + y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{2y}{x+y^2} - \frac{2xy}{(x+y^2)^2} = \frac{2y^3}{(x+y^2)^2},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) = \frac{6y^2}{(x+y^2)^2} - \frac{8y^4}{(x+y^2)^3} = \frac{2y^2(3x-y^2)}{(x+y^2)^3},$$

Теорема. Якщо функція $z = f(x, y)$ є двічі диференційована і неперервна в області D , то в цій області мішані похідні другого порядку рівні між собою

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

3. Повний диференціал функції двох змінних

Визначення. Повним диференціалом функції двох змінних називається сума добутків частинних похідних на диференціали відповідних аргументів:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy. \quad (6)$$

Приклад 10. Знайти диференціал функції $u = e^{x^2+y^2}$.

Розв'язання. Скориставшись формулою (8.6), маємо

$$du = 2e^{x^2+y^2} (xdx + ydy).$$

Визначення. Диференціалом другого порядку від функції $z = f(x, y)$ називається диференціал від її першого диференціала, тобто $d^2 z = d(dz)$. Якщо x і y – незалежні змінні і функція $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні, то диференціали вищих порядків обчислюються за формулами:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} dy^3.$$

Приклад 11. Знайти dz , $d^2 z$, якщо $z = x \sin y + y \cos x$.

Розв'язання. $dz = (\sin y - y \sin x) dx + (x \cos y + \cos x) dy$,

$$d^2 z = -y \cos x dx^2 - x \sin y dy^2 + 2(\cos y - \sin x) dx dy.$$

4. Градієнт

Визначення. Градієнтом скалярного поля $u = f(x, y, z)$ у точці M називається вектор, що має вигляд

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_M \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_M \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_M \vec{k} \quad (7)$$

Похідна функції $u = u(x, y, z)$ у точці M_0 за напрямом, що визначається градієнтом цієї функції, має найбільше значення в порівнянні з похідною за будь-яким іншим напрямом, і це значення дорівнює:

$$\max \frac{\partial u}{\partial l} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2}, \quad (8)$$

тобто градієнт указує напрям найшвидшого зростання функції в заданій точці.

Приклад 12. Знайти градієнт функції $u = 5xyz + xy^2 + z + 2$ у точці $M_0(1, -1, 2)$.

Розв'язання. Обчислимо частинні похідні функції $u = u(x, y, z)$ в точці M_0 :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{M_0} = (5yz + y^2) \Big|_{M_0} = -9, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{M_0} = (5xz + 2xy) \Big|_{M_0} = 8,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{M_0} = (5xy + 1) \Big|_{M_0} = -4.$$

Використовуючи формулу (8), отримаємо $\operatorname{grad} u|_{M_0} = -9\vec{i} + 8\vec{j} - 4\vec{k}$.