

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ
навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів**

за темою: Невизначений та визначений інтеграли

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 №7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2023 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 28.08.2022 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:

1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.

2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.

План лекції

1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла. Властивості невизначеного інтеграла. Таблиця невизначених інтегралів.
2. Методи інтегрування (безпосереднє інтегрування, інтегрування заміною змінної, інтегрування частинами).

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [<https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html>]

Текст лекції

1. Поняття первісної функції і невизначеного інтеграла.

Властивості інтеграла. Таблиця інтегралів.

Визначення. Функція $F(x)$ називається *первісною* від функції $f(x)$ для $x \in [a, b]$, якщо в усіх точках $[a, b]$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$. Якщо в деякому інтервалі функція $F(x)$ є первісною від функції $f(x)$, то і функція $F(x) + C$, де C – будь-яка стала, також буде первісною для $f(x)$.

Визначення. *Невизначеним інтегралом* від функції $f(x)$ називається множина всіх її первісних і позначається символом $\int f(x) dx$.

Отже, за визначенням, $\int f(x) dx = F(x) + C$, якщо $F'(x) = f(x)$. При цьому функцію $f(x)$ називають *підінтегральною функцією*, $f(x) dx$ – *підінтегральним виразом*, символ \int – *символом інтеграла*.

Операція знаходження невизначеного інтеграла називається *інтегруванням функції*.

Основна теорема інтегрального числення. Усяка неперервна функція має первісну.

Властивості невизначеного інтеграла

1. Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\int f(x) dx \right)' = \left(F(x) + C \right)' = f(x).$$
2. Диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу: $d \left(\int f(x) dx \right) = f(x) dx$.
3. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції та довільної сталої: $\int dF(x) = F(x) + C$.
4. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченного числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів кожної з цих функцій окремо, тобто:

$$\int [f_1(x) + f_2(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx.$$
5. Сталій множник можна винести за знак інтеграла: $\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx$.
6. Якщо $\int f(x) dx = F(x) + C$, то $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$.

Таблиця інтегралів

- | | |
|--|---|
| 1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1)$ | 2. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ |
| 3. $\int e^x dx = e^x + C$ | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad a > 0, a \neq 1$ |
| 5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$ | 6. $\int \cos x dx = \sin x + C$ |
| 7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctgx} + C$ | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tgx} + C$ |
| 9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ | 10. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctgx} + C$ |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$ | |
| 12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$ | |
| 13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{a+x}{a-x} \right + C, \quad a \neq 0$ | |
| 14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C, \quad a \neq 0$ | |
| 16. $\int \operatorname{tg} x dx = -\ln \cos x + C$ | 17. $\int \operatorname{ctg} x dx = \ln \sin x + C$ |
| 18. $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$ | 19. $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$ |

$$20. \int \frac{dx}{ch^2 x} = thx + C$$

$$21. \int \frac{dx}{sh^2 x} = -cth x + C$$

2 Методи інтегрування

Безпосереднє інтегрування

Метод безпосереднього інтегрування базується на застосуванні табличних інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад 1. Знайти $\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}) dx$.

Розв'язок. Запишемо інтеграл у вигляді суми трьох інтегралів. Всі інтеграли табличні.

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x}) dx = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Приклад 2. Знайти $\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4\sqrt{x} \right) dx$.

Розв'язок. Запишемо підінтегральний вираз у вигляді, зручному для інтегрування.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^4\sqrt{x} \right) dx = \int \left(3x^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{\frac{5}{2}} \right) dx = \frac{9}{2}x^{\frac{2}{3}} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^{\frac{7}{2}} + C.$$

Приклад 3. Застосувавши властивість 6 невизначеного інтеграла, знайти $\int \cos 7x dx$.

Розв'язок. $\int \cos 7x dx = \frac{1}{7} \sin 7x + C.$

Приклад 4. Обчислити $\int \frac{dx}{x+3}$.

Розв'язок. Скористаємося властивістю 6 невизначеного інтеграла

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln |x+3| + C.$$

Приклад 5. Обчислити $\int \sin(2x-6) dx$.

Розв'язок. $\int \sin(2x-6) dx = -\frac{1}{2} \cos(2x-6) + C.$

Інтегрування методом заміни змінної

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести відшукування даного інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Цей спосіб називають *методом заміни змінної*, або *методом підстановки*.

Заміна змінної у невизначеному інтегралі проводиться за допомогою підстановок двох видів:

1) $x = \varphi(t)$, де $\varphi(t)$ – монотонна, неперервно диференційована функція нової змінної t . Тоді $dx = \varphi'(t) dt$. Формула заміни змінної в цьому випадку має вигляд:

$$\int f(x) dx = \int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt. \quad (1)$$

2) $t = \psi(x)$, де $\psi(x)$ – частина підінтегральної функції.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$.

Розв'язок. Вводимо заміну $\sin x = t$. Тоді $\cos x \, dx = dt$.

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \left| \begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x \, dx = dt \end{array} \right| = \int \sqrt{t} \, dt = \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3 x} + C.$$

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int \frac{x \, dx}{1+x^2}$.

$$\text{Розв'язок. } \int \frac{x \, dx}{1+x^2} = \left| \begin{array}{l} 1+x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C = \frac{1}{2} \ln |1+x^2| + C.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx$.

$$\text{Розв'язок. } \int \frac{\ln^2 x}{x} \, dx = \left| \begin{array}{l} \ln x = t \\ \frac{1}{x} \, dx = dt \end{array} \right| = \int t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C.$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\int \frac{x \, dx}{1+x^4}$

$$\text{Розв'язок. } \int \frac{x \, dx}{1+x^4} = \left| \begin{array}{l} x = \sqrt{t} \\ x^2 = t \\ 2x \, dx = dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{2(1+t^2)} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x^2 + C.$$

Інтегрування частинами

До досить ефективних методів інтегрування належить метод інтегрування частинами. Нехай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ – дві неперервно диференційовані функції змінної x . Тоді скориставшись правилом знаходження диференціалу добутку функцій $u \, v$, маємо $d(u \, v) = u \, dv + v \, du$.

Взявши невизначений інтеграл від обох частин цієї рівності і врахувавши, що $\int d(uv) = uv + C$, дістанемо: $u \, v = \int u \, dv + \int v \, du$ або

$$\int u \, dv = u \, v - \int v \, du. \quad (2)$$

Ця формула називається *формулою інтегрування частинами*. За її допомогою знаходження інтеграла $\int u \, dv$ зводиться до знаходження іншого інтеграла $\int v \, du$, який, звичайно, обчислюється легше.

При цьому за u береться така функція, яка при диференціюванні спрощується, а за dv – та частина підінтегрального виразу, інтеграл від якої відомий або може бути легко знайдений.

Основні класи функцій, що інтегруються частинами: $\int P(x) e^{\alpha x} \, dx$, $\int P(x) \sin \alpha x \, dx$, $\int P(x) \cos \alpha x \, dx$, де $P(x)$ – многочлен. Тут за u треба взяти $P(x)$, а за dv – відповідно вирази $e^{\alpha x} \, dx$, $\sin \alpha x \, dx$, $\cos \alpha x \, dx$. Для інтегралів

виду $\int P(x) \ln x \, dx$, $\int P(x) \arcsin \alpha x \, dx$, $\int P(x) \arccos \alpha x \, dx$, $\int P(x) \operatorname{arctg} \alpha x \, dx$, $\int P(x) \operatorname{arcctg} \alpha x \, dx$ за u беремо відповідно функції $\ln x$, $\arcsin \alpha x$, $\arccos \alpha x$, $\operatorname{arctg} \alpha x$, $\operatorname{arcctg} \alpha x$, а за dv – вираз $P(x) \, dx$.

Приклад 10. $\int (x+1) \sin x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x+1 & du = dx \\ dv = \sin x \, dx & v = -\cos x \end{array} \right| = -(x+1) \cos x + \int \cos x \, dx = -(x+1) \cos x + \sin x + C.$

Приклад 11. $\int x^2 e^x \, dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2x \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x \, dx =$
 $= \left| \begin{array}{ll} u = 2x & du = 2 \, dx \\ dv = e^x \, dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2x e^x + \int 2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2 e^x + C$

Приклад 12. $\int e^{ax} \sin bx \, dx \left| \begin{array}{ll} u = e^{ax} & du = a e^{ax} \, dx \\ dv = \sin bx \, dx & v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| =$
 $= -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$

Проінтегрувавши частинами вдруге, маємо:

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

Після двократного інтегрування частинами ми в правій частині знову одержали початковий інтеграл. Отже, приходимо до рівняння відносно невідомого інтеграла. З цього рівняння знаходимо:

$$\frac{a^2 + b^2}{b^2} \int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx \Rightarrow$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \left(-\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \sin bx \right) + C.$$

ЛЕКЦІЯ 10

План лекції

1. Поняття визначеного інтеграла Властивості визначеного інтеграла. Формула Ньютона-Лейбніца.
2. Методи обчислення визначених інтегралів.
3. Застосування визначеного інтеграла в геометрії та фізиці.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Ластівка І.О., Левковська Т.А., Олешко Т.І. Вища математика. Модуль 4 Диференціальне числення функцій однієї змінної: Навч. посібник /За заг. ред. проф. Т.І. Олешко.- К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005,- 120 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [<https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html>]

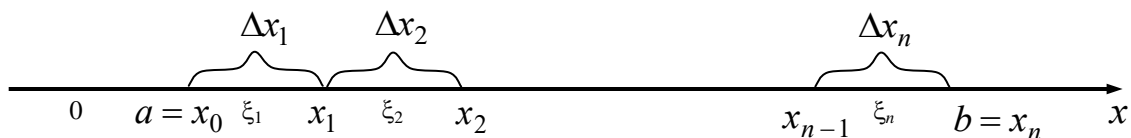
Текст лекції 12

1. Поняття визначеного інтеграла. Властивості визначеного інтеграла.

Формула Ньютона - Лейбниця

Нехай на відрізку $[a, b]$ задана функція $y = f(x)$. Виконаємо такі дії.

1. Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n відрізків: $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$, де $x_0 = a, x_n = b$.
2. У кожному з відрізків $[x_{i-1}, x_i]$ ($i=1, 2, \dots, n$) виберемо довільну точку ξ_i ,



$x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, і помножимо значення функції $f(x)$ в точці ξ_i на довжину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ відповідного відрізка: $f(\xi_i)\Delta x_i$.

3. Складемо суму

$$\sigma_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i. \quad (1)$$

Ця сума називається *інтегральною сумою Дарбу*.

4. Назвемо найбільшу з довжин відрізків $\max \Delta x_i$ *кроком розбиття*. Нехай число n відрізків розбиття $[x_{i-1}, x_i]$ необмежено росте, тоді $\max \Delta x_i \rightarrow 0$. Якщо при цьому інтегральна сума σ_n (9.1) має скінчену границю I , яка не залежить ні від способу розбиття відрізка $[a, b]$ на малі відрізки $[x_{i-1}, x_i]$, ні від вибору точок ξ_i у кожному з них, то це число I називають *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначають символом

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Отже,
$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Числа a і b відповідно називають *нижньою і верхньою границями інтегрування*, а відрізок $[a, b]$ – *проміжком інтегрування*.

Визначений інтеграл має ті самі властивості, що й невизначений. Крім того, має власні:

1°. Якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ розбито на дві частини $[a, c]$ і $[c, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$$2^\circ. \int_a^a f(x)dx = 0.$$

$$3^\circ. \int_{-a}^a f(x)dx = 0, \text{ якщо } f(x) \text{ – непарна функція.}$$

$$4^\circ. \int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx, \text{ якщо } f(x) \text{ – парна функція.}$$

$$5^\circ. \int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx.$$

Для обчислення визначеного інтеграла застосовуємо **формулу Ньютона-Лейбниця**

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad (2)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$. Тобто, визначений інтеграл від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ дорівнює приросту первісної на цьому відрізку. Це основна формула інтегрального числення.

Приклад 5. Обчислити визначені інтеграли: а) $\int_1^2 x dx$; б) $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Розв'язок. Знаходимо первісну, а потім застосовуємо формулу (2).

$$\text{а) } \int_1^2 x dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_1^2 = \frac{2^2}{2} - \frac{1^2}{2} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}.$$

2. Методи обчислення визначених інтегралів

Заміна змінних під знаком визначеного інтеграла

Нехай $f(x)$ – будь-яка функція, неперервна в проміжку $[a, b]$ і нехай $\varphi(t)$ – деяка функція, що задовольняє такі умови:

- 1) $\varphi(t)$ – визначена і неперервна в деякому проміжку $[\alpha, \beta]$, а її значення не виходять за межі проміжку $[a, b]$, коли t змінюється в проміжку $[\alpha, \beta]$;
- 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$;
- 3) у проміжку $[\alpha, \beta]$ існує неперервна похідна $\varphi'(t)$.

Тоді маємо таку формулу заміни змінної у визначеному інтегралі:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt \quad (3)$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Розв'язок.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left. \begin{array}{lll} x = \sin t & x=0 & t=0 \\ dx = \cos t dt & x=1 & t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Зауваження. При застосуванні формули (3) необхідно після заміни змінної замінити і межі інтегрування. Якщо визначити межі інтегрування не вдається, то потрібно спочатку знайти невизначений інтеграл, а потім повернутись до старої змінної та обчислити визначений інтеграл.

Інтегрування частинами у визначеному інтегралі

Застосувавши формулу Ньютона-Лейбниця до формули інтегрування частинами, маємо:

$$\begin{aligned}
 u(x)v(x)\Big|_a^b &= \int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b v(x)u'(x)dx. \\
 \int_a^b u(x)v'(x)dx &= u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x \cos x dx$.

Розв'язок.

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \cos x dx & v = \sin x \end{array} \right| = x \sin x \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} = -2.$$

3. Застосування визначеного інтеграла в геометрії та фізиці

Визначення. *Криволінійною трапецією* називається фігура, обмежена частиною графіка функції $y = f(x)$, віссю Ox та двома прямими $x = a$ та $x = b$.

Площа такої криволінійної трапеції обчислюють за формулою

$$S = \int_a^b f(x) dx. \tag{1}$$

При цьому, звичайно, не виключаються випадки, коли одна або й обидві бічні сторони трапеції перетворюються в точку.

Кожну з плоских фігур, які зустрічаються при розв'язуванні задач практичного характеру, можна зобразити як сукупність кількох криволінійних трапецій.

Приклад 8. Знайти площу половини круга радіуса R .

Розв'язок. Як відомо, канонічне рівняння кола радіуса R , центром якого є початок системи координат, має вигляд $x^2 + y^2 = R^2$. Тому рівняння верхнього півкола можемо записати у вигляді $y = \sqrt{R^2 - x^2}$. Підставивши до формули (1), дістанемо

$$\begin{aligned}
 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} R^2 \cos^2 t dt = \\
 &= R^2 \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \frac{\pi R^2}{2} \text{ (кв. од.)}
 \end{aligned}$$

Якщо на $[a, b]$ функції $y = f_1(x)$ і $y = f_2(x)$ неперервні, то площа області, обмеженої знизу графіком функції $y = f_1(x)$, зверху –

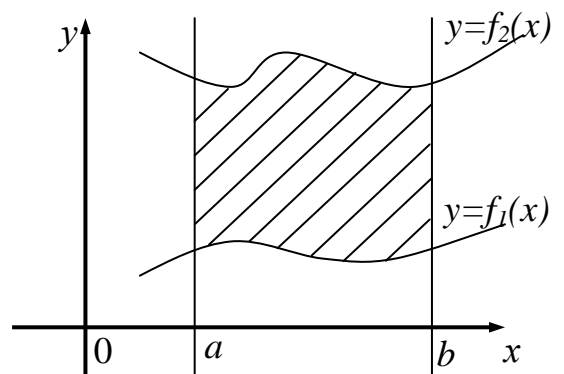


Рис. 1

графіком функції $y = f_2(x)$, зліва – прямою $x = a$, справа – прямою $x = b$ (рис. 1), обчислюється за формулою:

$$S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx. \quad (2)$$

Приклад 9. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = -x^2$, $y = e^x$, віссю ординат і прямою $x = 1$ (рис. 2).

Розв'язок.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 [e^x - (-x^2)] dx = \left(e^x + \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= e + \frac{1}{3} - 1 = e - \frac{2}{3} \quad (\text{кв.од.}) \end{aligned}$$

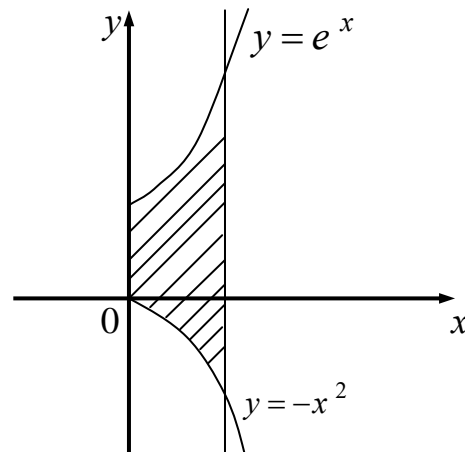


Рис. 2

Об'єм тіла обертання

Нехай крива AB задана рівнянням $y = f(x)$, де

$f(x)$ – однозначна неперервна функція змінної x , обертається навколо осі абсцис, описуючи деяку поверхню. Визначимо об'єм тіла обертання, утвореного цією поверхнею та двома площинами $x = a$ і $x = b$, що проходять перпендикулярно осі обертання Ox . Об'єм тіла

обертання визначається формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx \quad (6)$$

Приклад 10. Знайти об'єм сегмента параболоїда, утвореного обертанням фігури, обмеженої лініями $y = 2px$ і $x = a$, навколо осі Ox (рис.3).

Розв'язок. Оскільки x змінюється від 0 до a , то

$$V_x = \pi \int_0^a y^2 dx = \pi \int_0^a 2px dx = \pi x^2 \Big|_0^a = \pi a^2 \quad (\text{куб. од.})$$

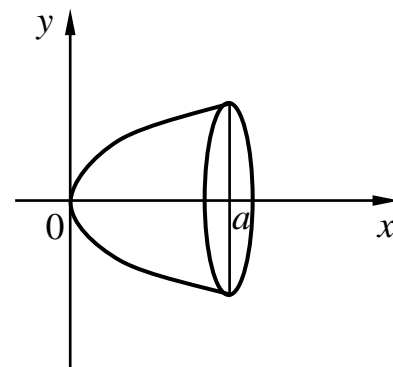


Рис. 3

Фізичні застосування інтеграла

Задача на роботу

Приклад 11. Гвинтова пружина стискається на x (м) пропорційно діючій силі F (Н). Обчислити роботу, що виконує сила F , яка стискає пружину на 0,04 м. Для стискання пружини на 0,01 м потрібна сила $10H$.

Розв'язок. За законом Гука абсолютне подовження x пружини (в m) прямо пропорційне силі F (в H): $F = kx$, де k – коефіцієнт пропорційності.

За умовою $F=10H$, $x=0,01m$, тому

$$k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0,01} = 1000 \frac{H}{m} ; \quad k = \frac{F}{x} = \frac{10}{0,01} = 1000 \frac{H}{m}$$

Робота виконана силою $F = f(x)$ при зміщенні по осі OX матеріальної точки від $x=a$ до $x=b$, визначається за формулою

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

За умовою $f(x) = kx$, ($k=1000$, $f(x)=1000x$), $a=0$, $b=0,04$ м

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 1000 \int_0^{0,04} x dx = 1000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 1000 \frac{0,04^2}{2}$$

$$A = \int_0^{0,04} 1000x dx = 1000 \int_0^{0,04} x dx = 1000 \frac{x^2}{2} \Big|_0^{0,04} = 1000 \frac{0,04^2}{2} = 0,8 \text{ Дж}$$