

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТИ ЛЕКЦІЙ
навчальної дисципліни «Вища математика»
обов'язкових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

**272 Авіаційний транспорт
Оператор безпілотних літальних апаратів**

за темою: Звичайні диференціальні рівняння

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 №7

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 22.08.2023 №1

ПОГОДЖЕНО

Секцією Науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 28.08.2023 №7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробники:

Доцент циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, к.ф.–м.н. Семенов В.О.

Викладач циклової комісії економіки, соціально – гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст Пузир М.С.

Рецензенти:

1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.

2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.

План лекції

1. Поняття диференціального рівняння. Загальний і частинний розв'язок рівняння. Задача Коші.
2. Диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні рівняння.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с
3. Інтегральне числення функції однієї змінної Навч. посібник / За заг. ред. проф. Т.І. Олешко. - К.: Книжкове вид-во НАУ, 2005.- 112 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна, 2013. – 648 с.- [\[https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html\]](https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html)

Текст лекції

1. Поняття диференціального рівняння. Загальний і частинний розв'язок рівняння. Задача Коші

Визначення. Звичайним диференціальним рівнянням називають рівняння, яке пов'язує незалежну змінну x , невідому функцію $y = f(x)$ та її похідні різних порядків

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \quad (1)$$

Визначення. Порядком диференціального рівняння називають порядок найвищої похідної, що входить до рівняння.

Визначення. Загальним розв'язком диференціального рівняння називається функція

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0, \quad (2)$$

де C_1, C_2, \dots, C_n - довільні сталі, після підстановки якої рівняння перетворюється на тотожність.

Визначення. Рівність вигляду $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння.

Задача Коші для диференціального рівняння n -го порядку полягає у

знаходженні розв'язку рівняння, який задовольняє умовам $y = y_0$, $y' = y'_0$, $y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y^{(n-1)}_0$ при $x = x_0$, де $x_0, y_0, y'_0, \dots, y^{(n-1)}_0$ - задані числа. Ці умови називають *початковими умовами*.

Визначення. Частинним *розв'язком* диференціального рівняння називається функція $y = f(x)$, при числових значеннях довільних сталих у розв'язку (2).

У загальному розв'язку рівняння (2) число довільних сталих дорівнює порядку рівняння. Диференціальне рівняння має нескінчену множину частинних розв'язків.

2. Диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремлюваними змінними, однорідні та лінійні ді рівняння
Диференціальне рівняння першого порядку має вигляд: $F(x, y, y') = 0$.

Якщо рівняння розв'язане відносно y' , то його можна записати у вигляді

$$y' = f(x, y) \quad (3)$$

Визначення. Загальним *розв'язком* диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x, C)$, що залежить від однієї довільної сталої C .

Для такого рівняння справджується теорема існування і єдиності розв'язку.

Теорема. Якщо у рівнянні (3) функція $f(x, y)$ та її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$ неперервні в деякій області D на площині Oxy , яка містить точку $M_0(x_0; y_0) \in D$, то існує єдиний розв'язок цього рівняння $y = \varphi(x)$, який задовольняє умову $y = y_0$ при $x = x_0$.

З геометричної точки зору це означає, що існує і, до того ж, єдина функція $y = \varphi(x)$, графік якої проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$.

Визначення. Умова $y|_{x=x_0} = y_0$ або $y(x_0) = y_0$ при $x = x_0$ називається *початковою умовою*, або *умовою Коші*.

Визначення. Задача, у якій потрібно знайти частинний розв'язок рівняння

$$y' = f(x, y) \text{ за умови } y(x_0) = y_0, \quad (4)$$

називається *задачею Коші*.

З геометричної точки зору, загальний розв'язок диференціального рівняння першого порядку є сімейство кривих на координатній площині, яке залежить від однієї довільної сталої C . Вони називаються *інтегральними кривими* даного диференціального рівняння. Частинному розв'язку відповідає одна крива цього сімейства: функція $y = f(x)$, яка проходить через деяку задану точку $M_0(x_0, y_0)$ площини Oxy .

Розв'язати або *проінтегрувати* диференціальне рівняння – означає знайти його загальний розв'язок.

Диференціальні рівняння з відокремленими змінними

Визначення. Диференціальне рівняння

$$M(x) dx + N(y) dy = 0 \quad (5)$$

називають *рівнянням з відокремленими змінними*. У цьому рівнянні біля диференціалу dx знаходиться тільки функція від x , а біля dy - тільки функція від y .

Загальний інтеграл або розв'язок рівняння (5) має вигляд

$$\int M(x) dx + \int N(y) dy = C \quad (6)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $\cos y dy = 2x dx$.

Розв'язок. Це рівняння виду (5), тому його розв'язок

$$\int \cos y dy = \int 2x dx \Rightarrow \sin y = x^2 + C \Rightarrow y = \arcsin(x^2 + C).$$

Диференціальні рівняння з відокремлюваними змінними

Визначення. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними має вигляд:

$$M_1(x)N_1(y) dx + M_2(x)N_2(y) dy = 0. \quad (7)$$

Воно може бути приведене до рівняння з відокремленими змінними (5) шляхом ділення обох його частин на добуток $N_1(y)M_2(x) \neq 0$:

$$\frac{M_1(x)N_1(y)}{N_1(y)M_2(x)} dx + \frac{M_2(x)N_2(y)}{N_1(y)M_2(x)} dy = 0,$$

і після інтегрування маємо

$$\int \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \int \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = C. \quad (8)$$

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $(1+x)y dx + (1-y)x dy = 0$.

Розв'язок. Розділяючи змінні, знаходимо:

$$\begin{aligned} \frac{(1+x)}{x} dx + \frac{(1-y)}{y} dy &= 0, \quad \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy = 0 \Rightarrow \\ \int \left(\frac{1}{x} + 1\right) dx + \int \left(\frac{1}{y} - 1\right) dy &= C. \end{aligned}$$

Інтегруючи, дістаємо: $\ln|x| + x + \ln|y| - y = C$, або $\ln|xy| + x - y = C$.

Останнє співвідношення є загальним інтегралом даного рівняння.

Приклад 3. Розв'язати задачу Коші $x^2 y dx + y^3 x dy = 0$, $y(0) = 1$.

Розв'язок. Розділяючи змінні, знаходимо: $x dx + y^2 dy = 0$. Інтегруючи,

$$\text{маємо: } \int x dx + \int y^2 dy = C, \quad \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} = C.$$

Одержали загальний інтеграл вихідного рівняння.

Знайдемо частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(0) = 1$.

Для цього до загального розв'язку підставляємо початкову умову і визнача-

ємо сталу C . $\frac{1}{3} = C - 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$. Потім, підставивши її значення до загального розв'язку, отримуємо частинний розв'язок, тобто розв'язок задачі Коші $y^3 = 1 - \frac{3}{2}x^2$.

Однорідні рівняння першого порядку

Визначення. Функція $f(x, y)$ називається *однорідною функцією порядку m* (m - будь-яке дійсне число), якщо при будь-якому t має місце тотожність

$$f(tx, ty) = t^m f(x, y) \quad (9)$$

Приклад 4. $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ - однорідна функція першого порядку, тому що $f(tx, ty) = \sqrt[3]{(tx)^3 + (ty)^3} = t \sqrt[3]{x^3 + y^3} = t f(x, y)$.

Приклад 5. $f(x, y) = xy - y^2$ - однорідна функція другого порядку, тому що $f(tx, ty) = (tx)(ty) - (ty)^2 = t^2(xy - y^2) = t^2 f(x, y)$.

Приклад 6. $f(x, y) = \frac{x}{y}$ - однорідна функція нульового порядку, тому що

$$f(tx, ty) = \frac{tx}{ty} = t^0 \frac{x}{y} = t^0 f(x, y).$$

Визначення. Рівняння виду $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ називається *однорідним*, якщо функції $M(x, y)$ і $N(x, y)$ є однорідними одного й того ж порядку. Однорідне рівняння зводиться до вигляду $y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ і за допомогою

$$\text{заміни змінних} \quad y = z(x)x, \quad y' = z'x + z \quad (10)$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними.

Приклад 7. Розв'язати задачу Коші $(x + 2y) - xy' = 0$, $y(1) = 2$.

Розв'язок. $(x + 2y)dx - xdy = 0$

$$M(x, y) = x + 2y \quad M(tx, ty) = tx + 2ty = t(x + 2y) = tM(x, y)$$

$$N(x, y) = -x \quad N(tx, ty) = -tx = t(-x) = tN(x, y)$$

$M(x, y)$, $N(x, y)$ - однорідні функції першого порядку.

Рівняння перепишемо так: $\left(1 + 2\frac{y}{x}\right) - y' = 0$

Проводимо заміну змінних згідно з (10): $y = zx$, $y' = z'x + z$,

маємо: $1 + 2z - z'x - z = 0$, $1 + z - z'x = 0$, $1 + z - x\frac{dz}{dx} = 0$,

$$(1 + z)dx - xdz = 0 \Big| \cdot \frac{1}{(1 + z)x}$$

$$\frac{dx}{x} - \frac{dz}{1+z} = 0, \quad \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dz}{1+z} = C, \quad \ln|x| - \ln|1+z| = \ln|C_1|,$$

$$\frac{x}{1+z} = C_1, \quad 1+z = \frac{x}{C_1}, \quad z = \frac{x}{C_1} - 1, \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{C_1} - 1,$$

$$y = \frac{x^2}{C_1} - x - \text{загальний розв'язок.}$$

Знаходимо частинний розв'язок, який задовольняє початкову умову $y(1) = 2$:

$$2 = \frac{1}{C_1} - 1, \quad C_1 = \frac{1}{3}. \quad \text{Отже, } y = 3x^2 - x - \text{розв'язок задачі Коші.}$$

Лінійне рівняння першого порядку.

Визначення. Лінійним диференціальним рівнянням першого порядку називають рівняння, що має вигляд:

$$y' + P(x)y = Q(x), \quad (11)$$

де $P(x)$ і $Q(x)$ - задані неперервні функції від x .

Якщо $Q(x) \equiv 0$, то рівняння (11) називається *лінійним однорідним*, якщо $Q(x) \neq 0$, то *лінійним неоднорідним*.

Розв'язок лінійного однорідного рівняння можна записати у вигляді:

$$y' + P(x)y = 0, \quad \frac{y'}{y} = -P(x), \quad \frac{dy}{y} = -P(x)dx,$$

$$\ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}. \quad (12)$$

Шукаємо розв'язок рівняння (11) у вигляді добутку двох невідомих функцій від x (така заміна називається підстановкою Бернуллі):

$$y = u(x)v(x), \quad (13)$$

$$y' = u'v + uv'. \quad (14)$$

Підставивши y і y' до (11), маємо:

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x) \Rightarrow u(v' + P(x)v) + u'v = Q(x) \quad (15)$$

Виберемо функцію v такою, щоб $v' + P(x)v = 0$, тоді

$$\frac{dv}{v} + P(x)v = 0, \quad \frac{dv}{v} + P(x)dx = 0, \quad \ln|v| - \ln|C| = -\int P(x)dx,$$

$$\frac{v}{C} = e^{-\int P(x)dx}, \quad v = Ce^{-\int P(x)dx}.$$

Оскільки нам досить якого-небудь відмінного від нуля розв'язку, то за функцію $v(x)$ візьмемо $v = e^{-\int P(x)dx}$. Підставляючи знайдене значення $v(x)$ до (15), одержимо:

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}, \quad du = \frac{Q(x)}{v(x)}dx, \quad u = \int \frac{Q(x)}{v(x)}dx + C.$$

Підставляючи $u(x)$ й $v(x)$ до (13), дістаємо загальний розв'язок лінійного

неоднорідного рівняння .

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y' - \frac{2}{x+1} y = (x+1)^3$.

Розв'язок. Скориставшись (13) маємо, $y = u v$, $y' = u' v + u v'$, тому

$$u' v + u v' - \frac{2}{x+1} u v = (x+1)^3, \quad u \left(v' - \frac{2}{x+1} v \right) + u' v = (x+1)^3.$$

Виберемо функцію v такою, щоб $v' - \frac{2}{x+1} v = 0$, тоді

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2v}{x+1} = 0, \quad \frac{dv}{v} - \frac{2dx}{x+1} = 0, \quad \ln |v| - 2 \ln |x+1| = \ln |C|,$$

$$\ln \left| \frac{v}{(x+1)^2} \right| = \ln |C|, \quad v = C (x+1)^2, \quad v = (x+1)^2.$$

$$u' (x+1)^2 = (x+1)^3, \quad u' = x+1, \quad \frac{du}{dx} = x+1, \quad du = (x+1) dx,$$

$$u = \frac{(x+1)^2}{2} + C. \text{ Звідси дістаємо загальний розв'язок рівняння}$$

$$y = \frac{(x+1)^4}{2} + C(x+1)^2.$$

ЛЕКЦІЯ 12

План лекції

1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
2. Загальний розв'язок однорідного рівняння.
3. Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь в залежності від вигляду правої частини.
4. Загальний розв'язок неоднорідних рівнянь.

Рекомендована література:

Основна

1. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Збірник задач: навч. посібник. – К.: Видавництво А.С.К., 2003.-480 с.
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.
3. Дюженкова Л.І. та ін. Математичний аналіз у задачах і прикладах: навч. посібник. – К.: Вища школа, 2003.- Ч 2.- 470 с.

Додаткова

4. Вища математика: навчальний посібник(Казановський В.І. та інші)-К.: Аграрна освіта, 2014. – 367 с.

Інформаційні ресурси в інтернеті

5. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: Навчальний посібник.- К.: Ігнатекс –Україна,2013. – 648 с.- [\[https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html\]](https://erudyt.net/elektronni-pidruchniki/vishha-matematika/dubovyk-yuryk-vyscha-matematyka-navch-posibnyk.html)

Текст лекції 12

1. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Визначення. Рівняння $ay'' + by' + cy = f(x)$ (1)

де a, b, c - сталі, називається *лінійним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами*.

Згідно з теоремою 3 попередньої лекції загальний розв'язок такого рівняння має вигляд

$$y = y^*(x) + \bar{y}(x), \quad (2)$$

де $y^*(x)$ – частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1), а $\bar{y}(x)$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння.

2. Загальний розв'язок однорідного рівняння

Для знаходження загального розв'язку однорідного рівняння $ay'' + by' + cy = 0$ згідно з теоремою 2 попередньої лекції потрібно знайти два частинних розв'язки цього рівняння, які утворюють фундаментальну систему. Для цього складаємо *характеристичне рівняння*

$$ak^2 + bk + c = 0, \quad (3)$$

корені якого визначають за формулою

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac.$$

Залежно від коренів характеристичного рівняння (3) можливі наступні випадки:

а) якщо $D > 0$, то корені рівняння $k_1 \neq k_2$ - дійсні й різні, і загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} \quad (4)$$

б) якщо $D = 0$, то корені рівняння $k_1 = k_2 = k$ - дійсні й рівні, і загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} (C_1 + C_2 x) \quad (5)$$

в) якщо $D < 0$, то корені рівняння $k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$ - комплексно - спряжені, й загальний розв'язок рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \sin \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cos \beta x. \quad (6)$$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 7y' + 6y = 0$.

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$; його корені $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд:

$$y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x.$$

Приклад 2. Знайти розв'язок задачі Коші: $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.

Розв'язок. Відповідне характеристичне рівняння є $k^2 - 2k + 1 = 0$; його корені $k_1 = k_2 = 1$. Отже, загальний розв'язок цього рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$$

Підставляючи початкові умови в загальний розв'язок та його похідну $y' = C_1 e^x + C_2 x e^x + C_2 e^x$, одержимо систему рівнянь відносно C_1 і C_2 :

$$\begin{cases} 4 = C_1, \\ 2 = C_1 + C_2, \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = C_1, \\ -2 = C_2. \end{cases}$$

Звідси розв'язок, який задовольняє початковим умовам, має вигляд $y = 4e^x - 2xe^x$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Розв'язок. Складемо характеристичне рівняння $k^2 + 6k + 13 = 0$; його корені $k_{1,2} = -3 \pm 2i$. Корені характеристичного рівняння комплексно-спряжені, а тому шуканий загальний розв'язок вихідного рівняння є:

$$y = C_1 e^{-3x} \sin 2x + C_2 e^{-3x} \cos 2x.$$

3. Частинний розв'язок неоднорідних рівнянь в залежності від вигляду правої частини

Лінійне неоднорідне диференціальне рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$ay'' + by' + cy = f(x), \quad (7)$$

де $a, b, c \in \text{const}$, а $f(x)$ - неперервна функція.

У випадках, коли функція $f(x)$ має спеціальний вигляд, загальний розв'язок рівняння (7) можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.

I. Якщо права частина лінійного диференціального рівняння із сталими коефіцієнтами має вигляд $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де $P_n(x)$ - многочлен n -ого степеня й α не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок такого рівняння розшукуємо у вигляді $y^*(x) = e^{\alpha x} M_n(x)$, де $M_n(x)$ - многочлен n -ого степеня з невизначеними коефіцієнтами:

$$M_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n.$$

Коефіцієнти A_i визначають із системи алгебраїчних рівнянь методом невизначених коефіцієнтів.

Якщо ж α є коренем характеристичного рівняння кратності k ($k=1$ або $k=2$), то шукаємо частинний розв'язок неоднорідного рівняння у вигляді $y^*(x) = e^{\alpha x} M_n(x) \cdot x^k$.

Зокрема, при $\alpha = 0$ права частина - многочлен n -ого степеня, та якщо $\alpha = 0$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок $M_n(x)$ - є також многочлен того самого степеня. Якщо ж $\alpha = 0$ - корінь характеристичного рівняння кратності k , то частинний розв'язок має вигляд: $\bar{y} = x^k M_n(x)$.

II. Якщо права частина лінійного диференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$e^{\alpha x} [P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x], \quad m < n,$$

де $P_n(x)$ і $Q_m(x)$ - многочлени і $z = \alpha \pm \beta i$ не є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок рівняння (7) має вигляд

$$y^*(x) = e^{\alpha x} (M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x),$$

де $M_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_n x^n$

і $N_n(x) = B_0 + B_1 x + B_2 x^2 + \dots + B_n x^n$ - многочлени степеня n з невідомими коефіцієнтами. Якщо ж $z = \alpha \pm \beta i$ є коренем характеристичного рівняння, то частинний розв'язок набуває вигляду:

$$y^*(x) = x e^{\alpha x} (M(x) \cos \beta x + N(x) \sin \beta x).$$

Приклад 4. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 4y' + 3y = x$.

Розв'язок. Розв'яжемо відповідне однорідне рівняння $y'' + 4y' + 3y = 0$. Його характеристичне рівняння згідно з (3) $k^2 + 4k + 3 = 0$, а корені $k_1 = -1$,

$k_2 = -3$. Оскільки 0 не є коренем характеристичного рівняння $k^2 + 4k + 3 = 0$, то частинний розв'язок рівняння шукаємо у вигляді:

$$y^*(x) = Ax + B.$$

Маємо: $y^*(x) = A$, $y^{*''}(x) = 0$. Підставляючи в диференціальне рівняння, маємо:

$$4A + 3(Ax + B) = x, \quad 3Ax + 4A + 3B = x.$$

Прирівнюємо коефіцієнти при однакових степенях x зліва і справа, дістаємо систему для визначення коефіцієнтів A і B

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} 3A = 1 \\ 4A + 3B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{1}{3}, \\ B = -\frac{4}{9}. \end{cases}$$

Отже, $y^*(x) = \frac{1}{3}x - \frac{4}{9}$.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння відповідного однорідного рівняння $k^2 - 7k + 6 = 0$ має корені $k_1 = 6$, $k_2 = 1$. Тут права частина має вигляд $f(x) = P_1(x)e^{1x}$, причому коефіцієнт $\alpha = 1$ у показнику степеня є простим коренем характеристичного рівняння. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y^*(x) = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x$, де A і B — сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню. Диференціюємо цю функцію:

$$y^{*'} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x,$$

$$y^{*''} = 2Ae^x + (4Ax + 2B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Підставляючи ці функції до заданого рівняння, матимемо:

$$[(Ax^2 + Bx) + (4Ax + 2B) + 2A - 7(Ax^2 + Bx) - 7(2Ax + B) + 6(Ax^2 + Bx)]e^x = (x - 2)e^x,$$

Звідси $-10Ax - 5B + 2A = x - 2$.

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x , отримаємо:

$$\begin{matrix} x^1 \\ x^0 \end{matrix} \begin{cases} -10A = 1 \\ 2A - 5B = -2 \end{cases},$$

звідки $A = -\frac{1}{10}$, $B = \frac{9}{25}$. Отже, частинним розв'язком початкового рівняння

є: $y^*(x) = x \left(-\frac{1}{10}x + \frac{9}{25} \right) e^x$.

Приклад 6. Знайти частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y'' + 2y' + 5y = 2\cos x.$$

Розв'язок. Характеристичне рівняння $k^2 + 2k + 5 = 0$ має корені $k_1 = -1 + 2i$; $k_2 = -1 - 2i$.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y^*(x) = A \cos x + B \sin x,$$

де A і B - сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню.

Двічі диференціюючи цю функцію та підставляючи до заданого рівняння, будемо мати

$$-A \cos x - B \sin x + 2(-A \sin x + B \cos x) + 5(A \cos x + B \sin x) = 2 \cos x.$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $\cos x$ і $\sin x$, одержимо систему двох рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} -A + 2B + 5A = 2, \\ -B - 2A + 5B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = \frac{2}{5}$, $B = \frac{1}{5}$. Отже, частинний розв'язок вихідного рівняння запише-

мо у вигляді $y^*(x) = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$.

4. Загальний розв'язок неоднорідних рівнянь

Вміючи знаходити частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (1) і загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, легко записати загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = \cos 2x$.

Розв'язок. Характеристичне рівняння має корені $k_1 = 2i$; $k_2 = -2i$; тому загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

Числа $\pm 2i$ є коренями характеристичного рівняння кратності 1, а тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$y^*(x) = (A \cos 2x + B \sin 2x) \cdot x,$$

де A і B - сталі коефіцієнти, що підлягають визначенню. Диференціюємо:

$$y^{*'} = 2x(-A \sin 2x + B \cos 2x) + (A \cos 2x + B \sin 2x),$$

$$y^{*''} = 4x(-A \cos 2x - B \sin 2x) + 4(-A \sin 2x + B \cos 2x).$$

Підставляємо в вихідне рівняння, прирівнюємо коефіцієнти при однакових гармоніках й дістаємо систему рівнянь для визначення A і B :

$$\begin{cases} 4B = 1, \\ -4A = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = \frac{1}{4}, \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$Y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$