МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

з навчальної дисципліни «Основи теорії прийняття рішень»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

272Авіаційний транспорт
Аеронавігація

за темою − Прийняття рішень в умовах ризику та невизначеності

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО
Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО
Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО
Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін, протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:
Викладач циклової комісії природничих дисциплін, Пузир М.С.

Рецензенти:
1. *Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*
2. *Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, к.т.н., доцент Черниш А.А.*

План лекції

1. Прийняття рішень в умовах ризику.
2. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Рекомендована література:

Основна

1. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень. – Київ: Освіта України, 2018. – 246 с.
2. Теорія прийняття рішень [текст] підручник. / За заг. ред. Бутка М. П. [М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко та ін.] – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
3. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник / А. І. Орлов М .: Видавництво «Март», 2004. - 656 с.
4. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2- ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. - 336 с.
5. Ус С.А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.
6. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. – К., 2014. – 94с.
7. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.]

Додаткова

8. Орлів М. С. Підготовка і прийняття управлінських рішень : навч.-метод. матеріали / М. С. Орлів ; упоряд. Г. І. Бондаренко. – К. : НАДУ, 2013. – 40 с.
9. Клименко С.М., Дуброва О.С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2006. — 188 с.
10. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі: навч. посібник / В.В. Вітлінський, П.І.Верченко, Сігал А.В., Наконечний Я.С.; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.:КНЕУ, 2002. – 446с.

Текст лекції

1. Прийняття рішень в умовах ризику.

Задача прийняття рішень в умовах невизначеності виникає, коли необхідно діяти в ситуації, що відома не повністю. Задачу формулюють як задачу пошуку окремого найкращого (в якомусь розумінні) рішення на заздалегідь заданій множині допустимих рішень.

Основна трудність полягає у тому, що наслідки, пов’язані з прийняттям того або іншого рішення, залежать від невідомої ситуації. Ступінь неприйнятності цих наслідків прийнято вимірювати в умовних одиницях –

втратах, які може зазнати особа, що приймає рішення (ОПР). Вихідною інформацією, необхідною для розв'язування задачі, є *функція втрат F(d, S)*, що являє собою залежність втрат ОПР від двох аргументів: його рішення d та ситуації S, в якій це рішення приймається.

Головний принцип розв'язування задач в умовах невизначеності полягає у перетворюванні функції втрат у функцію ризику $R(d)$, яка відображує залежність ступеня ризику, на який іде ОПР, вже тільки від одного аргументу – від рішення d, що приймають. Спосіб такого перетворювання неоднозначний і залежить від вибраного критерію ризику. Від цього критерію залежить і зміст виразу «найкраще рішення»: найкращим називають рішення, яке мінімізує ризик.

На відміну від постановки, прийнятої в теорії ігор, у задачах теорії статистичних рішень невизначеність ситуації не має антагоністичного (конфліктного) характеру. Передбачається, що зовнішнє середовище, в якому приймають рішення, байдуже до наших рішень і не протидіє нам. Невизначеність у теорії статистичних рішень зв'язують лише з незнанням того, в якому стані знаходиться зовнішнє середовище – «природа», яку умовно можна вважати другим учасником гри.

Здавалося б, що відсутність свідомої протидії супротивника спрощує задачу вибору рішення, тому що ОПР ніхто не заважає. Але це на так! У грі з активним супротивником ми знаємо щодо його намірів протидіяти, а тому можемо розв'язувати задачу у припущенні, що супротивник прийме найгірше для нас рішення. Тим самим частково знімається елемент невизначеності гри. У грі з природою таке обґрунтоване припущення зробити неможливо і тому вибір оптимального рішення значною мірою залежить від вибору критерію оптимальності, тобто від суб'єктивних уподобань ОПР.

Розглянемо формальну постановку задачі. Передбачається, що ОПР (гравець A) може приймати одне з рішень d_i $i=1,...,m$, а другим «гравцем» виступає зовнішнє середовище, яке може перебувати в одному зі станів S_j. Формально таку задачу можна представити у вигляді матриці, елементи якої – виграш (корисність) від рішення di у ситуації Sj. На відміну від розглянутих раніше матричних ігор, у даному випадку для вибору оптимальної стратегії вже не можна орієнтуватися на те, що другий гравець (природа) прагне мінімізувати наш виграш. Тому, поряд з платіжною матрицею, вводиться матриця ризиків, елементи якої – величина ризику, який пов'язаний з рішенням d_i у ситуації Sj.

Таблиця 1. **Матриця виграшів**

Можливі рішення ОПР	**Стани зовнішнього середовища**				
	$S1$	…	$S\,j$	…	Sn
$d1$	u_{11}	…	u_{ij}	…	$u1n$
…	…	…	…	…	…
d_i	u_i1	…	u_{ij}	…	u_{in}
…	…	…	…	…	…
dm	u_m1	…	u_{mj}	…	u_{mn}

Таблиця 2. **Матриця ризиків**

Можливі рішення ОПР	**Стани зовнішнього середовища**				
	S_1	…	S_j	…	S_n
d_1	r_{11}	…	r_{ij}	…	r_{1n}
…	…	…	…	…	…
d_i	r_{i1}	…	r_{ij}	…	r_{in}
…	…	…	…	…	…
d_m	r_{m1}	…	r_{mj}	…	r_{mn}

Величину ризику визначають за допомогою різниці

$$r_{ij}=\max u_{ij}-u_{ij}$$

між максимальним виграшом, який ОПР потенційно отримала би, якщо б знала, що середовище знаходиться у певному стані S_j, та реальним виграшом u_{ij}, який ОПР отримає з вибором рішення d_i □ у даному стані S_j. Слід зауважити, що вихідна платіжна матриця (матриця виграшів) може однозначно бути перетворена в матрицю ризиків, але не навпаки.

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**1**	**4**	**5**	**9**
d_2	**3**	**8**	**4**	**3**
d_3	**4**	**6**	**6**	**2**

Платіжна матриця

⇩

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**4 –1**	**8 – 4**	**6 – 5**	**9 – 9**
d_2	**4 –3**	**8 – 8**	**6 – 4**	**9 –3**
d_3	**4 – 4**	**8 – 6**	**6 – 6**	**9 –2**

⇩

	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1	**3**	**4**	**1**	**0**
d_2	**1**	**0**	**2**	**6**
d_3	**0**	**2**	**0**	**7**

Матриця ризиків

Рис. 1 Перетворення платіжної матриці в матрицю ризиків

У теорії статистичних рішень розглядають пошук оптимального розв'язку задачі в умовах:

- *ризику*, коли розподіл імовірності $P(S_j)$ станів середовища S_j відомий або його можна оцінити на основі попередніх експериментальних досліджень за вибіркою спостережень;
- *невизначеності*, коли невідомий розподіл імовірності $P(S_j)$ станів середовища S_j, а його оцінювання на основі попередніх експериментальних спостережень складно реалізувати або взагалі неможливо.

Задачу прийняття оптимальних рішень в умовах ризику формулюють таким чином. Нехай відомі імовірності $P(S_j)$ станів середовища Sj. Тоді для кожного рядка платіжної матриці можна визначити очікуваний виграш для фіксованого рішення $di \in D$ у вигляді математичного сподівання

$$E\{u(d_i)\} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j).$$

Оптимальною стратегією буде та з можливих стратегій, яка забезпечує найбільший очікуваний виграш:

$$d^* = \arg\max_{1<i<m} E\{u(d_i)\}.$$

Приклад 1. Матриця (табл. 3), у якій представлено виграші u_{ij}, що отримає ОПР від кожного з трьох рішень d_1, d_2, d_3, у кожній з чотирьох ситуацій з відомим розподілом імовірності $P(S_j)$.

Таблиця 3. **Матриця виграшів**

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} u_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_2)=0{,}3$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_1)=0{,}2$	
d_1	1	4	5	9	4.5
d_2	3	8	4	3	4.75
d_3	4	6	6	2	4.7

В останньому стовпчику табл. 3 надано розрахунки очікуваних результатів ОПР для кожного можливого рішення, які визначені за формулою математичного сподівання. Максимальному очікуваному результату відповідає рішення d_2, яке є оптимальним розв’язком задачі за умовою.

Якщо для відомого розподілу імовірності перейти від матриці виграшів до
матриці ризиків, то для кожного рядка такої матриці можна визначити очікуваний ризик з фіксованим рішенням *di* у вигляді математичного сподівання. Тоді оптимальне рішення (стратегія) ОПР має задовольняти умову мінімуму середнього ризику. Зрозуміло, що при такому переході оптимальне рішення не зміниться.

Таблиця 4. **Матриця ризиків**

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_2)=0{,}3$	$P(S_1)=0{,}25$	$P(S_1)=0{,}2$	
d_1	3	4	1	0	2,2
d_2	1	0	2	3	1,35
d_3	0	2	0	7	2,0

З іншого боку оптимальне рішення залежить від розподілу $P(Sj)$ імовірності станів середовища. Тому для однієї і тієї ж матриці ризиків оптимальне рішення може змінитися, якщо зміниться розподіл $P(Sj)$ (табл. 5).

Таблиця 5. **Матриця ризиків при зміні розподілу** $P(Sj)$

S_j	S_1	S_2	S_3	S_4	$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} P(S_j)$
$P(S_j)$	$P(S_1)=0{,}6$	$P(S_2)=0{,}1$	$P(S_1)=0{,}2$	$P(S_1)=0{,}1$	
d_1	3	4	1	0	2,4
d_2	1	0	2	3	1,3
d_3	0	2	0	7	0,9

Пошук оптимальних рішень у реальних практичних задачах найчастіше проводиться при відсутності будь-якої інформації щодо імовірності $P(Sj)$ станів середовища, тобто в умовах невизначеності.

2. Прийняття рішень в умовах невизначеності.

Існує два підходи до розв'язування задачі в умовах відсутності інформації щодо імовірності $P(Sj)$ станів середовища:

- вибір оптимального рішення на основі додаткового критерію;
- використання змішаних стратегій.

Критерієм оптимальності в умовах невизначеності називають правило вибору найкращого рішення, яке засновано на певних припущеннях (гіпотезах) ОПР відносно поведінки зовнішнього середовища. Такі критерії повинні мати наступні властивості:

- забезпечення відбору перспективних та нівелювання неперспективних альтернатив (стратегій);
- незалежність від адитивної добавки до значень функції корисності.

Розглянемо особливості основних критеріїв, які отримали найбільше поширення у теорії прийняття рішень.

Критерій Лапласа (рівноможливих станів) оснований на припущенні, що імовірності $P(Sj)$ станів однакові: $P(S_1) = P(S_2) = \ldots = P(S_n)$.

За таким критерієм оптимальною вважають стратегію di , для якої сума значень виграшів для усіх станів Sj зовнішнього середовища максимальна.

Цілком зрозуміло, що припущення, коли імовірності станів однакові не завжди є обґрунтованим. Ще один суттєвий недолік критерію Лапласа продемонструємо на прикладі матриці виграшів, поданої у табл. 6.

Таблиця 6. **Ілюстрація недоліку критерію Лапласа**

Стратегії	**Стани зовнішнього середовища**							
	S_1	S_2	S_3	**…**	S_8	S_9	S_{10}	
d_1	1	0	0	…	0	0	100	101
d_2	9,9	10	10	…	10	10	10,1	100

За критерієм Лапласа оптимальним вважають рішення d_1, оскільки при виборі альтернативи d_1 сума виграшів при можливих станах зовнішнього середовища більша, ніж сума виграшів за умови вибору альтернативи d_2.

Однак, як видно з табл. 6, при рішенні d_1 виграші розподілені вкрай нерівномірно за станами S_j . Тому, якщо обрати рішення d_1, то ОПР ризикує взагалі нічого не отримати тоді, як рішення d_2 гарантує мінімальний виграш 9,9 одиниць.

Критерій Вальда (крайнього песимізму до виграшу) заснований на гіпотезі, згідно з якою ОПР прагне отримати гарантований результат для будь- якого стану середовища Sj

Для вибору оптимальної альтернативи для кожного рішення *di* (рядка матриці виграшів) визначають мінімальне значення і обирають максимальне з отриманих чисел, яке і визначає оптимальну альтернативу.

Головний недолік критерію Вальда полягає в тому, що визначення оптимальної альтернативи спирається на найгіршу ситуацію, хоча природа байдужа до наших рішень і не протидіє ОПР. При такому невиправданому песимізмі ОПР можуть бути відкинуті більш вигідні альтернативи.

Для ілюстрації згаданого недоліку розглянемо матрицю виграшів

(табл. 7).

За критерієм Вальда оптимальним вважається рішення d_1, оскільки саме така альтернатива відповідає максимуму останнього стовпчика таблиці.

Однак, як видно з табл. 7, для всіх станів середовища, за винятком стану S_1, рішення d_2 забезпечує більш високі виграші.

***Таблиця 8.7.* Приклад недоліку критерію Вальда**

Стратегії	**Стани зовнішнього середовища**							$\min\limits_{S_j} u(d_i\,S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	
d_1	2	3	1	5	4	3	1	1
d_2	0	6	8	17	9	6	8	0

Критерій Гурвіца (зваженого песимізму-оптимізму) ґрунтується на наступній гіпотезі: рівень песимізму ОПР приймає деяке значення □[0,1] причому, чим більше значення , тим більший песимізм у ОПР.

За критерієм Гурвіца для кожної альтернативи *di* визначають

$$u_i^{\min} = \min_{S_j} u(x_i S_j) \quad \text{та} \quad u_i^{\max} = \max_{S_j}(x_i S_j)$$

два числа та обирають оптимальну альтернативу, яка задовольняє

$$d^* = \arg\max_{d_i \in D} \left\{ \lambda u_i^{\min} + (1-\lambda) u_i^{\max} \right\}.$$

умову

Таким чином, критерій Гурвіца заснований на припущенні ОПР, що природа може знаходитись у самому гіршому стані з імовірністю та в самому кращому стані з імовірністю 1 - .

Зрозуміло, що при 1 критерій Гурвіца зводиться до критерію Вальда (критерію максміну).

Критерій Гурвіца забезпечує певну гнучкість для вибору оптимального рішення. Водночас він дуже чутливий до вибору , що може змінити висновок щодо оптимальності альтернативи (табл. 8).

Як видно з табл. 8 при оптимальним за критерієм Гурвіца є рішення d_2, а при – рішення d_1. Таким чином, вибір оптимальної альтернативи залежить від суб’єктивного вибору , тобто залежить від ставлення ОПР до ризику.

Таблиця 8. **Приклад вибору альтернативи за критерієм Гурвіца**

Стратегії	Стани зовнішнього середовища					u_i^{min}	u_i^{max}	Значення критерію $\lambda u_i^{max} + (1-\lambda)u_i^{min}$	
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5			$\lambda = 0{,}5$	$\lambda = 0{,}9$
d_1	1	3	2	4	5	1	5	3	1,4
d_2	0	6	8	10	12	0	12	6	1,2

Критерій Севіджа (найменшого розчарування), подібно до критерію Вальда, проявляє крайній песимізм, але не до виграшу ОПР, а до ризику.

Тобто для його використання здійснюють перехід від матриці виграшів до матриці ризиків, за якою визначають оптимальну альтернативу, що задовольняє умову

$$d^* = \arg\min_{d_i} \max_{S_j} r(d_i S_j).$$

Незважаючи на те, що матриця ризиків однозначно пов'язана з матрицею виграшів, рішення за критеріями Вальда та Севіджа можуть не співпадати, що продемонстровано в табл. 9 і 10.

Таблиця 9. **Приклад вибору альтернативи за критерієм Вальда**

Рішення	Стани середовища				$\min u(d_i S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	
d_1	1	4	5	9	1
d_2	3	8	4	3	3
d_3	4	6	6	2	2

Легко побачити, що за даними таблиці виграшів (табл. 9) оптимальною альтернативою є альтернатива d_2, оскільки саме вона забезпечує максимум з мінімальних винагород.

Таблиця 10. **Приклад вибору альтернативи за критеріємСевіджа**

Рішення	Стани середовища				$\max r(d_i S_j)$
	S_1	S_2	S_3	S_4	
d_1	3	4	1	0	4
d_2	1	0	2	6	6
d_3	0	2	0	7	7

Водночас оптимальним рішенням за критерієм Севіджа є альтернатива d_1, оскільки сама вона забезпечує мінімум максимальних ризиків (табл. 10).

Таким чином, слід пам'ятати, що вибір оптимального рішення в умовах невизначеності значною мірою є суб'єктивним, тому що залежить від вибору критерій оптимальності, а з використанням критерію Гурвіца ще й від значення

.

Разом з тим теорія прийняття рішень дає змогу знайти науково обґрунтоване оптимальне рішення (з точки зору обраного критерію), яке спрямоване на досягнення максимуму позитивного або мінімуму негативного результату для конкретної практичної задачі в умовах невизначеності.

Контрольні питання:

1. Охарактеризуйте особливості прийняття рішень у грі з природою.
2. Порівняйте методи прийняття рішень в умовах ризику і невизначеності.
3. Наведіть відмінності критеріїв Лапласа, Вальда, Гурвіца та Севіджа.