

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

Циклова комісія природничих дисциплін

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

**з навчальної дисципліни «Основи теорії прийняття рішень»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**

**272Авіаційний транспорт
Аеронавігація**

за темою – Методи колективних рішень

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 30.08.2023 № 7

СХВАЛЕНО

Методичною радою
Кременчуцького льотного коледжу
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 28.08.2023 № 1

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 29.08.2023 № 7

Розглянуто на засіданні циклової комісії природничих дисциплін,
протокол від 28.08.2023 № 1

Розробник:

Викладач циклової комісії природничих дисциплін, Пузир М.С.

Рецензенти:

*1. Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань
КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист
Владов С.І.*

*2. Доцент кафедри автомобілів і тракторів Кременчуцького
національного університету імені Михайла Остроградського, к.т.н.,
доцент Черниш А.А.*

План лекції

1. Задача формування колективних рішень.
2. Метод голосування.

Рекомендована література: Основна

1. Файнзільберг Л. С., Жуковська О. А., Якимчук В. С. Теорія прийняття рішень. – Київ: Освіта України, 2018. – 246 с.
2. Теорія прийняття рішень [текст] підручник. / За заг. ред. Бутка М. П. [М. П. Бутко, І. М. Бутко, В. П. Мащенко та ін.] – К. : «Центр учбової літератури», 2015. – 360 с.
3. Теорія прийняття рішень. Навчальний посібник / А. І. Орлов М. : Видавництво «Март», 2004. - 656 с.
4. Волошин О.Ф., Мащенко С.О. Моделі та методи прийняття рішень: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. – 2-ге вид., перероб. та допов. – К. : ВПЦ "Київський університет", 2010. - 336 с.
5. Ус С.А. Моделі й методи прийняття рішень: навч. посіб. / С.А. Ус, Л.С. Коряшкіна; М-во освіти і науки України, Нац. гірн. ун-т. – Д. : НГУ, 2014. – 300 с.
6. О.І. Кушлик-Дивульська, Б.Р. Кушлик. Основи теорії прийняття рішень. – К., 2014. – 94с.
7. Дякон В. М., Ковальов Л. Є. Моделі і методи теорії прийняття рішень : Підручник. – К.: АНФ ГРУП, 2013. – 604 с.]

Додаткова

8. Орлів М. С. Підготовка і прийняття управлінських рішень : навч.-метод. матеріали / М. С. Орлів ; упоряд. Г. І. Бондаренко. – К. : НАДУ, 2013. – 40 с.
9. Клименко С.М., Дуброва О.С. Обґрунтування господарських рішень та оцінка ризиків: Навч.-метод. посіб. для самост. вивч. дисц. — К.: КНЕУ, 2006. — 188 с.
10. Вітлінський В.В. Економічний ризик: ігрові моделі: навч. посібник / В.В. Вітлінський, П.І.Верченко, Сігал А.В., Наконечний Я.С.; за ред. д-ра екон. наук, проф. В.В. Вітлінського. – К.:КНЕУ, 2002. – 446с.

Текст лекції

1. Задача формування колективних рішень.

Відомим прийомом підвищення якості прийняття рішень є об'єднання спеціалістів відповідної області знань у колектив, який виробляє спільне рішення. Типовим прикладом подібного колективу є медичний консилиум, що приймає колективне рішення щодо поточного

стану пацієнта на основі врахування різних думок – особистих рішень експертів.

Ідею колективного рішення можна застосувати і до «колективу» формальних алгоритмів, що надає змогу підвищити достовірність розпізнавання спостережуваних ситуацій.

Нехай експерти A_1, \dots, A_N , $N \geq 2$, братимуть участь у колективному прийнятті рішень. Припустимо, що група розглядає деякий набір альтернатив, і кожний i -й член групи здійснює свій вибір d_i . Виникає задача формування колективного рішення $\square d$, що певним чином узгоджує індивідуальні рішення та виражає «загальну думку» групи (рис. 1).



Рис. 1. Схема формування колективного рішення

Синтез функції $\square d$, яка визначає спосіб інтеграції індивідуальних рішень членів колективу, є центральною задачею в організації колективу. Звичайно, різними принципами інтеграції індивідуальних рішень будуть відповідати різні колективні рішення.

Розглянемо з початку один з найбільш популярних методів інтеграції індивідуальних рішень експертів – метод голосування.

2. Метод голосування.

Одним зі способів побудови колективного рішення $\square d$ є правило більшості, коли колективним рішенням вважається альтернатива, яка отримала найбільше число голосів експертів. Припускається, що заборонено голосувати відразу за два рішення.

Водночас такий, на перший погляд, справедливий метод надає однозначне та справедливе рішення лише в тому випадку, коли число можливих альтернатив дорівнює двом та експерти групи мають рівні компетентності в оцінюванні альтернатив. У загальному ж випадку метод голосування може не надати справедливе рішення та призвести до так званих «парадоксів» голосування.

Розглянемо метод голосування більш детально. Метод ґрунтується на індивідуальних перевагах експертів щодо альтернатив $\square d$. Нагадаємо, що коли експерт вважає, що альтернатива d_i \square перевершує альтернативу d_j , то цей факт позначається так:

$$d_i \succ d_j, i \neq j.$$

Індивідуальний порядок переваг експерта – це набір альтернатив, які

розташовані в порядку їх переваги *конкретним* експертом. Сукупність індивідуальних порядків переваг альтернатив, наданих експертами групи,

називають *профілем* переваг. Кожен з експертів має один голос і віддає його за найкращу на його думку альтернативу. Переможцем оголошують альтернативу, яка отримала більше половини голосів експертів (*абсолютна більшість*). Якщо множина D містить тільки дві альтернативи, то правило більшості правомірно вважати найбільш справедливим. Якщо ж число альтернатив більше двох, то метод голосування може викликати сумніви в справедливості результату. Покажемо це на характерних прикладах.

Приклад 1. Нехай $N=29$ експертів приймають рішення щодо $M=3$ альтернатив d_1, d_2, d_3 . Припустимо, що індивідуальні переваги експертів такі:

15 експертів визнали, що $d_1 > d_2 > d_3$, 14 експертів визнали, що $d_2 > d_3 > d_1$.

Оскільки альтернатива d_1 набирає 15 голосів експертів, що більше половини, то вона стає переможцем. Але чи є вона дійсно кращою серед альтернатив? Насправді, кращою може бути і альтернатива d_2 , оскільки 14 експертів їй віддали перевагу, а 15 експертів поставили її на високе (друге) місце. До того ж, 14 експертів поставили альтернативу d_1 на останнє третє місце (після d_3).

Ще більш складний випадок виникає, коли при $M > 2$ жодна з альтернатив не набирає абсолютну більшість (більше половини) голосів експертів. Як бути в такому випадку? Яку з альтернатив оголосити переможцем, якщо голосування проводиться в один тур?

Приклад 2. Нехай є $N = 21$ експертів та $M = 4$ альтернативи d_1, d_2, d_3, d_4 з наступними індивідуальними перевагами експертів:

3 експерти: $d_1 > d_2 > d_3 > d_4$, 5 експертів: $d_1 > d_3 > d_2 > d_4$, 7 експертів: $d_2 > d_4 > d_3 > d_1$, 6 експертів: $d_3 > d_2 > d_4 > d_1$.

Позначимо через (d_i) сумарну кількість голосів, яку альтернатива d_i отримає при голосуванні. Сумарна кількість голосів за альтернативу, яку в індивідуальному порядку експерти поставили на перше місці складає

$$(d_1) = 8, \quad (d_2) = 7, \quad (d_3) = 6, \quad (d_4) = 0.$$

тобто жодна з альтернатив не отримує абсолютної більшості.

В таких випадках для прийняття колективного рішення можна використовувати правило відносної більшості: «перемагає» альтернатива, яка набирає більше голосів у порівнянні з іншими. В даному випадку перемагає альтернатива d_1 , яка має досить пристойний результат – майже 40% від загальної кількості голосів.

Також популярність отримало **правило Борда**, відповідно до якого

альтернатива, що займає останнє місце в індивідуальному порядку переваг, отримує 0 балів, передостаннє місце – 1 бал і т.д.

Тоді, для даних, описаних у прикладі 2, маємо

$$3 \text{ експерти } \begin{cases} d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_4, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів}, \end{cases}$$

$$5 \text{ експертів } \begin{cases} d_1 \succ d_3 \succ d_2 \succ d_4, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів}, \end{cases}$$

$$7 \text{ експертів } \begin{cases} d_2 \succ d_4 \succ d_3 \succ d_1, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів}, \end{cases}$$

$$6 \text{ експертів } \begin{cases} d_3 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_1, \\ 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0 \quad \text{балів}. \end{cases}$$

Зведемо сумарні бали, отримані альтернативами від всіх експертів (табл.

1). Отже, маємо таке впорядкування альтернатив

$$d_2 \succ d_3 \succ d_1 \succ d_4$$

а значить переможцем, за правилом Борда, є альтернатива d_2 з найбільшою сумою балів.

Зауважимо, що колективна перевага не збігається з жодною індивідуальною перевагою. Крім того, переможець за правилом Борда (альтернатива d_2) не співпадає з переможцем за правилом відносної більшості (альтернатива d_1).

Таблиця 1. Сумарні бали за правилом Борда

Альтернативи	d_1	d_2	d_3	d_4
Бали	24	44	38	20

Розглянемо ще одне відоме правило голосування – правило Кондорсе. Відповідно до правила Кондорсе найкращою вважають альтернативу d_i , яка перемагає будь-яку іншу альтернативу при парному порівнянні за правилом більшості. Іншими словами, альтернатива d_i найкраща, коли число експертів, які вважають, що $d_i \succ d_j$, більше числа експертів, які вважають, що $d_j \succ d_i$,

Таблиця 2. Результати попарних переваг альтернатив

	d_1	d_2	d_3	d_4
d_1	–	8	8	8
d_2	13	–	10	21
d_3	13	11	–	14
d_4	13	0	7	–

За правилом Кондорсе (табл. 2), кращою має бути визнана альтернатива d_3 , оскільки вона «виграє» у попарному порівнянні з кожною іншою альтернативою. Таким чином, групове рішення залежить від прийнятого правила голосування та при одних і тих же даних може надавати різні результати.

Так за даними прикладу 2 виявилось, що:

- ☐ альтернатива d_2 – краща за правилом Борда,

- альтернатива d_3 – краща за правилом Кондорсе,
- альтернатива d_1 – краща за правилом відносної більшості.

Розглянутий приклад дозволяє зробити ще один важливий висновок: існують такі профілі переваг, за якими найкраща за правилом відносної більшості альтернатива виявляється гіршою від інших альтернатив у попарному порівнянні. Можна вказати й інші парадокси методів голосування. Один з таких парадоксів – *парадокс правила Борда*.

Припустимо, що в розглянутому прикладі 2 альтернатива d_4 з деяких міркувань заздалегідь відкидається всіма експертами. У такому випадку, ті ж $N=21$ експертів прийматимуть колективне рішення вже тільки для $M=3$ альтернатив d_1, d_2, d_3 , та їх індивідуальні профілі переваг будуть мати вигляд:

3 експерти: $d_1 \succ d_2 \succ d_3$,

5 експертів: $d_1 \succ d_3 \succ d_2$,

7 експертів: $d_2 \succ d_3 \succ d_1$,

6 експертів: $d_3 \succ d_2 \succ d_1$.

Неважко побачити, що за правилом відносної більшості найкращою залишається альтернатива d_1 , а за правилом Кондорсе – альтернатива d_3 , а за правилом Борда – альтернатива d_3 , а не d_2 .

У цьому і полягає парадокс Борда: виключення з множини D заздалегідь слабкої альтернативи d_4 , яка б не отримала *жодного* голосу експертів, змінює переможця. Отже, правило Борда, яке допускає подібну ситуацію, не викликає довіри до способу визначення найкращої альтернативи. Зауважимо, що правило Кондорсе не призведе до подібного парадоксу: яка б з альтернатив, окрім d_3 , не була б заздалегідь відкинута експертами, найкращою за Кондорсе все одно залишається альтернатива d_3 .

Однак, правило Кондорсе призводить до іншого парадоксу. Припустимо, що індивідуальні переваги $N=3$ експертів щодо $M=3$ альтернатив d_1, d_2, d_3 такі:

перший експерт: $d_1 \succ d_2 \succ d_3$

другий експерт: $d_3 \succ d_1 \succ d_2$,

третій експерт: $d_2 \succ d_3 \succ d_1$.

Звідси за правилом голосування Кондорсе отримуємо три суперечливих твердження:

$d_2 \succ d_3$; $d_3 \succ d_1$; $d_1 \succ d_2$.

Зрозуміло, що в даному випадку неможливо прийняти узгоджене групове рішення, що визначає волю більшості експертів, оскільки ми прийшли до *нетранзитивного* співвідношення. Таку ситуацію прийнято називати парадоксом Кондорсе.

Колективне рішення можна приймати при голосуванні у кілька турів. У найпростішому випадку таке голосування проводиться у два тури.

Спочатку кожен експерт подає свій голос за одну найбільш бажану альтернативу. Якщо будь-яка альтернатива набирає абсолютну більшість голосів, то її визнають найкращою. В іншому випадку, проводиться другий тур

голосування за правилом більшості вже тільки для двох альтернатив, які набрали найбільшу кількість голосів у першому турі (рис. 2).

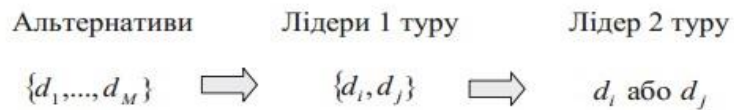


Рис. 2. Колективне голосування у два тури

Набуло популярності також правило голосування з послідовним вибуванням неперспективних альтернатив. Якщо в першому турі будь-яка альтернатива набирає абсолютну більшість голосів, то її оголошують найкращою. В іншому випадку, проводиться другий тур голосування, але без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у першому турі. Потім, якщо необхідно, проводиться наступний тур голосування без участі альтернативи, яка набрала мінімальну кількість голосів у попередньому турі голосування, і т.д. до виявлення переможця.

Зауважимо, що при $M=3$ правило голосування у два тури і правила голосування з послідовним вибуванням дають один і той же результат. Якщо ж число альтернатив $M>3$, то такі правила можуть призвести до різних результатів.

Приклад 10.3. Нехай є $M=4$ альтернативи і $N=23$ експерти. Профіль переваг експертів має такий вигляд:

6 експертів : $d_1 \succ d_2 \succ d_3 \succ d_4$,

7 експертів : $d_3 \succ d_2 \succ d_4 \succ d_1$,

8 експертів : $d_4 \succ d_2 \succ d_1 \succ d_3$,

2 експерти : $d_2 \succ d_1 \succ d_4 \succ d_3$.

За правилами Борда та Кондорсе найкращою вважають альтернативу d_2 .

Розглянемо, як за такими даними працюватиме правило голосування у два тури з послідовним виключенням. У першому турі голосування максимальне число голосів набирає альтернатива d_4 , але вона не набирає абсолютну більшість голосів. Тому проводиться другий тур голосування. Зауважимо, що альтернатива d_2 , яка виявилася переможцем і за правилом Борда, і за правилом Кондорсе, набрала мінімальну кількість голосів і вибуває з наступних турів голосування! У другому турі голосування залишаються альтернативи d_3 і d_4 , які набрали в першому турі більше голосів. Отже, у першому турі голосування вибуває альтернатива d_2 – переможець за правилом Борда і Кондорсе, а у другому турі перемагає альтернатива d_3 – найгірша альтернатива за правилом Борда.

За такими даними результати голосування з послідовним виключенням ілюструє схема (рис. 3).

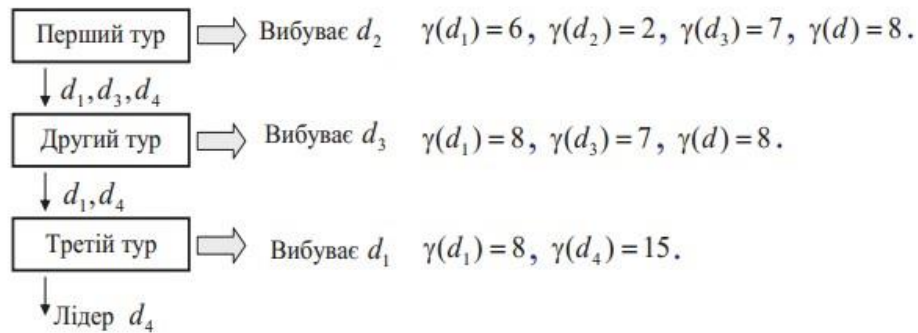


Рис. 3. Схема голосування з послідовним виключенням

Проведений аналіз схем голосування у кілька турів дозволяє зробити такі

важливі висновки:

1. Існують профілі переваг експертів, при яких переможець за правилами Кондорсе і Борда може вибути вже у першому турі голосування.

2. Незалежно від проведення голосування у два тури або з подальшим виключенням існують профілі переваг експертів, за якими найкраща за правилами Кондорсе і Борда альтернатива можливо не буде визнана найкращою.

3. Альтернатива, яка визнана найкращою за правилом голосування в два тури, може виявитися гіршою альтернативою за правилом Борда.

У зв'язку з такою неоднозначністю та суперечливістю розглянутих правил були сформульовані аксіоми, які відображають справедливу схему голосування.

Аксіома монотонності. Нехай для заданого правила голосування з деяким профілем переваг експертів перемагає альтернатива d_i .

Тоді альтернатива d_i має перемогти і в тому випадку, коли:

- порядок альтернативи d_i поліпшується відносно до хоча б однієї будь-якої альтернативи і не погіршується відносно до решти альтернатив;
- індивідуальний порядок переваги пари будь-яких інших альтернатив кожного експерта залишається незмінним.

Зауважимо, що правило відносної більшості і правило Борда задовольняють властивість монотонності. Правило голосування у два тури з послідовним виключенням не задовольняє властивість монотонності.

Аксіома участі. Нехай для заданого правила голосування з деяким профілем переваг група N експертів визнала найкращою альтернативу d_i .

Тоді, якщо деякий додатковий експерт візьме участь у голосуванні, то $N+1$ експерти мають визнати найкращою або ту ж саму альтернативу d_i , або альтернативу, яка для додаткового експерта

краща ніж альтернатива d_i .

Інакше кажучи, якщо додатковий голос змінює результат прийняття

колективного рішення, то такий змінений результат має бути вигідним *тільки* додатковому експерту. Можна показати, що правила Борда та відносної більшості задовольняють аксіому участі, а правило голосування у два тури і правило голосування з послідовним виключенням не задовольняють.

Аксіома анонімності (рівноправність експертів). Якщо два експерта «обмінюються» своїми індивідуальними порядками переваг, то результат

колективного рішення не зміниться.

Аксіома нейтральності (рівноправність альтернатив). Якщо альтернативи d_i і d_j поміняти місцями в індивідуальних порядках переваг всіх експертів, то результат колективного голосування буде таким:

- якщо раніше перемогала альтернатива d_i , то тепер переможцем буде альтернатива d_j ;
- якщо раніше перемогала альтернатива d_j , то тепер переможцем буде альтернатива d_i ;
- якщо раніше перемогала альтернатива d_m , яку не торкалися перейменування, то і тепер переможцем буде альтернатива d_m .

Аксіома поповнення. Нехай є дві групи експертів $N1$ і $N2$. Тоді, якщо експерти груп $N1$ і $N2$ за заданим правилом голосування визнають найкращою альтернативу d_i , то експерти об'єднаної групи за тим же правилом голосування також визнають найкращою альтернативу d_i .

Аксіома неперервності. Нехай експерти з множини $N1$ за заданим правилом голосування обирають альтернативу d_i , а експерти з множини $N2$ – іншу альтернативу. Тоді існує досить велике натуральне число k , яке забезпечить таке розширення групи експертів $N1$, що експерти об'єднаної множини виберуть альтернативу d_i .

Методи голосування розглядають також задачу визначення колективної переваги альтернатив.

Зрозуміло, що процедура вироблення колективної думки щодо переваги альтернатив також має задовольняти ряд розумних вимог. Виникає питання, а чи можна створити таку систему голосування, яка була б одночасно раціональною (без протиріч), демократичною (одна людина – один голос) і вирішальною (дозволяла здійснити вибір)?

Кеннет Ерроу із Стенфордського університету сформулював ряд очевидних принципів (аксіом), яким повинна задовольняти така система, у тому числі:

Принцип універсальності. Система голосування повинна бути дієвою (призводити до результату) за будь-яких переваг експертів.

Принцип одностайності. Якщо кожен експерт вважає, що альтернатива

d_i краща за альтернативу d_j , то і колективна думка має бути такою ж.

Принцип незалежності. Розташування будь-яких двох альтернатив d_i і d_j у колективній думці залежить тільки від порядку розташування цих альтернатив голосуючими експертами і не залежить від ставлення експертів до інших альтернатив.

Принцип повноти. Система має забезпечувати можливість порівняння будь-якої пари альтернатив і визначати з них кращу.

Принцип транзитивності (раціональності). Якщо відповідно до думки експертів альтернативу d_j визнають не кращою від альтернативи

di , а альтернативу dm – не кращою від альтернативи dj , то альтернатива dm – не краща за альтернативу di .

Кеннет Ерроу довів теорему про неможливість ідеального «колективного вибору», яка отримала назву *парадокса Ерроу*.

Теорема Ерроу. Якщо число альтернатив $M \geq 3$, то не існує ніяких інших способів побудови колективного рішення, що задовольняє зазначеним вище принципам, крім призначення диктатором одного з експертів, думку якого нав'язують іншим експертам.

Для визначення *колективної переваги* альтернатив за індивідуальними перевагами окремих експертів використовують метод, що ґрунтується на визначенні так званої медіани *Кемені*. Наведемо основні властивості цього методу.

Нехай є M альтернатив і кожен з N експертів надав своє особисте ранжування цих альтернатив: P_1, \dots, P_N , тобто P_n визначає порядок, у якому за розумінням n -го експерта альтернативи розташовані відповідно до їхніх переваг: на першому місці найкраща альтернатива, а на останньому – найгірша.

Медіана Кемені дозволяє знайти таке результуюче ранжування P^* , сумарна відстань від якого до всіх заданих ранжувань мінімальна, тобто

$$P^* = \arg \min_P \sum_{n=1}^N R_c(P, P_n),$$

де $R_c(P, P_n)$ – відстань між ранжуваннями P і P_n .

Відстань $R_c(P, P_n)$ – відстань між ранжуваннями P і P_n (відстань Кемені) визначають за допомогою матриць бінарних відношень

$$A^n = \|a_{ij}^{(n)}\| \quad i=1, \dots, M, \quad j=1, \dots, M, \quad n=1, \dots, N,$$

які кожен з N експертів надає у формі

$$a_{ij}^{(n)} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } d_i \text{ має перевагу перед } d_j, \\ -1, & \text{якщо } d_j \text{ має перевагу перед } d_i, \\ 0, & \text{якщо } d_i \text{ та } d_j \text{ рівноцінні.} \end{cases}$$

Відстань від довільного ранжування P , якому відповідає матриця , до кожного з наданих експертами ранжувань P_1, \dots, P_N , яким відповідають матриці , визначають за формулою

$$\hat{R}_c = \sum_{n=1}^N R_c(P, P_n) = \sum_{i < j} \sum_{n=1}^N |a_{ij} - a_{ij}^{(n)}|.$$

Звідси випливає, що визначення узгодженого ранжування P^* альтернатив за медіаною Кемені зводиться до визначення рядків та стовпчиків матриці

, у якої сума елементів a_{ij} , розташованих вище діагоналі, мінімальна.

Доведено, що ранжування альтернатив за медіаною Кемені задовольняє більшість принципів Ерроу. Крім того, медіана Кемені задовольняє принцип Кондорсе (правило більшості) і не призводить до парадоксу Кондорсе. Тому на сьогодні медіану Кемені можна вважати одним з найбільш коректних методів визначення узгоджених ранжувань альтернатив.

Контрольні питання:

1. Охарактеризуйте особливості задачі визначення колективного рішення.
2. Опишіть основні підходи до реалізації методу голосування.

3. Охарактеризуйте парадокси Борда та Кондорсе.
4. Викладіть та поясніть основні принципи (аксіоми) Ерроу, які відповідають справедливій схемі голосування.
5. Обґрунтуйте основний висновок теореми Ерроу.
6. Охарактеризуйте медіану Кемені.