

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та  
фундаментальних дисциплін**

**МЕТОДИЧНІ МАТЕРІАЛИ  
ДО ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ**  
навчальної дисципліни «Опір матеріалів»  
вибіркових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

***272 Авіаційний транспорт  
(Аеронавігація)***

**Кременчук 2023**

**ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 22.02.2024 № 2

**СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 17.01.2024 № 6

**ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 22.02.2024 № 2

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 05.01.2024 № 14

**Розробник:**

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.*

**Рецензенти:**

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

# **1. Розподіл часу навчальної дисципліни за темами (денна форма навчання)**

Номер та назва навчальної теми	Кількість годин, відведених на вивчення навчальної дисципліни						Вид контролю
	Всього	з них:					
		лекції	Семінарські заняття	Практичні заняття	Лабораторні заняття	Самостійна робота	
Семестр № 2							
Тема № 1 Основні положення.	2	2	-	-	-	-	
Тема №2 Розтягання і стискання. Механічні характеристики матеріалів.	14	2	-	4	-	8	
Тема№ 3 Теорія напруженого стану в околі точки.	16	2	-	6	-	8	
Тема№ 4 Геометричні характеристики плоских перерізів.	10	2	-	4	-	4	
Тема№ 5 Зсув, зминання та кручення.	13	2	-	6	-	5	
Тема№ 6 Плоске згинання.	17	2	-	8	-	7	
Тема№ 7 Складний опір	11	2	-	4	-	5	
Тема№ 8 Стійкість стиснутих стержнів	7	2	-	2	-	3	
							Залік
Всього за семестр:	90	16	-	34	-	40	

## 2. Методичні вказівки до практичних занять

### Тема № 2. Розтягання і стискання. Механічні характеристики матеріалів.

**Практичне заняття №1:** Розтягання і стискання. Механічні характеристики матеріалів.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: розтяг-стиск), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет

#### Навчальні питання:

1. Визначення поздовжніх сил та абсолютних деформацій стержня.

Література: 1-3 (с. 21-121)

#### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Розтяг-стиск* – простий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає тільки одне внутрішнє зусилля  $N$  (поздовжня сила).

*Правило знаків поздовжньої сили  $N$* : якщо поздовжня сила діє на розтяг, то її вважають позитивною, якщо на стиск – негативною.

*Умова міцності при розтягу-стиску:*

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{max}$  - максимальне нормальне напруження, [Па];

$N$  - поздовжня сила, [Н];

$F$  - площа поперечного перерізу бруса, [м<sup>2</sup>];

$[\sigma]$  - допускане нормальне напруження при розтягу (стиску), [Па];

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{граничне}}{n}.$$

При розтягу-стиску граничними напруженнями є:

для сталей – *межа текучості* ( $\sigma_{граничне} = \sigma_T$ ), тому, що при його перевищенні в брусі з'являються залишкові деформації;

для чавунів – *межа міцності* (тимчасовий опір) ( $\sigma_{граничне} = \sigma_B$ ), тому, що чавун не має межі текучості.

*Закон Гука* для абсолютного подовження  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

- де  $N$  - поздовжня сила,  $[H]$ ;  
 $l$  - довжина ділянки,  $[м]$ ;  
 $F$  - площа поперечного перерізу ділянки,  $[м^2]$ ;  
 $E$  - модуль пружності 1-го роду (модуль Юнга),  $[Па]$ .

*Правило перевірки епюри  $N$ :*

Епюра  $N$  перевіряється за розрахунковою схемою. Стрибки на епюрі  $N$  повинні бути в тих перерізах, у яких на розрахунковій схемі прикладені зовнішні сили. Зовнішня сила, що розтягує, викликає на епюрі  $N$  скачок у позитивному напрямку, що стискає - у негативному. Довжина стрибка на епюрі повинна бути чисельно рівною зовнішній силі, яка прикладена в цьому перетині.

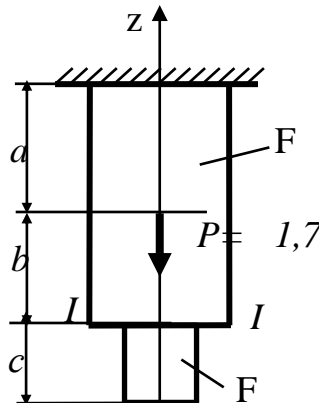
*Правило перевірки епюри  $\Delta l$ :*

Епюра  $\Delta l$  перевіряється по епюрі  $N$ . У жорстко закріпленому перерізі переміщення  $\Delta l$  дорівнює нулю. При русі від жорстко закріпленого перерізу значення на епюрі  $\Delta l$  збільшуються, якщо на епюрі  $N$  знак «+», якщо на епюрі  $N$  знак «-», то значення на епюрі  $\Delta l$  зменшуються. Якщо на ділянці  $N = 0$ , то на епюрі  $\Delta l$  значення не міняються.

### Задача 1:

Сталевий стрижень ( $E=2 \cdot 10^5$  МПа) знаходиться під дією поздовжньої сили  $P$  і власної ваги ( $\gamma=77$  кН/м<sup>3</sup>). Знайти переміщення перерізу I-I.

Дано:  $P = 1,7$  к,  $F_1 = 20$  см<sup>2</sup>,  $F_2 = 30$  см<sup>2</sup>,  $a = 2,68$  м,  $b = 2,82$  м,  $c = 1,31$  м.



### Розв'язання:

- 2) Тому що сила  $P$  і сила ваги поздовжні, то стрижень випробує розтягання. Переміщення перерізу I-I можна представити як суму деформацій ділянок довжиною  $a$  і  $b$ . Ділянка  $a$  буде деформуватися під впливом зовнішніх сил (сили  $P$  і ваги частини довжиною  $b$  і  $c$ ), а також під впливом власної ваги. Ділянка  $b$  деформується вагою частини довжиною  $c$  як зовнішньою силою і силою власної ваги.

- 3) Знайдемо власну вагу кожної ділянки:

$$Q_a = F_2 \cdot a \cdot \gamma = 0,003 \cdot 2,68 \cdot 77 = 0,619 \text{ кН},$$

$$Q_b = F_2 \cdot b \cdot \gamma = 0,003 \cdot 2,82 \cdot 77 = 0,651 \text{ кН},$$

$$Q_c = F_1 \cdot c \cdot \gamma = 0,002 \cdot 1,31 \cdot 77 = 0,201 \text{ кН}.$$

- 4) Обчислимо деформації кожної ділянки, скориставшись законом Гука для визначення абсолютного подовження:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

де  $N$  – подовжня сила, рівна алгебраїчній сумі зовнішніх навантажень, що діють на розглянуту ділянку [Н];

$l$  – довжина ділянки, [м];

$F$  – площа поперечного перерізу ділянки, [м<sup>2</sup>];

$E$  – модуль пружності 1-го роду (модуль Юнга), [Па]. Для сталей  $E=2 \cdot 10^5$  МПа.

На ділянці довжиною  $a$ :

$$\Delta l_a = \frac{(P + Q_b + Q_c)a}{EF_2} + \frac{Q_a a}{2EF_2}.$$

На ділянці довжиною  $b$ :

$$\Delta l_b = \frac{Q_c b}{EF_2} + \frac{Q_b b}{2EF_2}.$$

Тоді переміщення перерізу I-I обчислимо по формулі:

$$\begin{aligned} \Delta l_I &= \Delta l_a + \Delta l_b = \frac{l}{EF_2} \left[ (P + Q_b + Q_c)a + \frac{1}{2} Q_a a + Q_c b + \frac{1}{2} Q_b b \right] = \\ &= \frac{l}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,003} \left[ \left( 1700 + 651 + 201 + \frac{619}{2} \right) \cdot 10^{-6} \cdot 2,68 + \left( 201 + \frac{651}{2} \right) \cdot 10^{-6} \cdot 2,82 \right] = \\ &= 0,0000153 \text{ м}. \end{aligned}$$

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернув увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 2. Розтягання і стискання. Механічні характеристики матеріалів.

**Практичне заняття №2:** Розтягання і стискання. Механічні характеристики матеріалів.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: розтяг-стик), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет

### Навчальні питання:

1. Визначення поздовжніх сил та абсолютних деформацій стержня.  
Література: 1-3 (с. 21 - 121)

### План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Розтяг-стиск* – простий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає тільки одне внутрішнє зусилля  $N$  (поздовжня сила).

*Правило знаків поздовжньої сили  $N$* : якщо подовжня сила діє на розтяг, то її вважають позитивною, якщо на стиск – негативною.

*Умова міцності* при розтягу-стиску:

$$\sigma_{max} = \frac{N}{F} \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{max}$  - максимальне нормальне напруження, [Па];

$N$  - поздовжня сила, [Н];

$F$  - площа поперечного перерізу бруса, [м<sup>2</sup>];

$[\sigma]$  - допускне нормальне напруження при розтягу (стиску), [Па];

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{граничне}}{n}.$$

При розтягу-стиску граничними напруженнями є:

для сталей – *межа текучості* ( $\sigma_{граничне} = \sigma_T$ ), тому, що при його перевищенні в брусі з'являються залишкові деформації;

для чавунів – *межа міцності* (тимчасовий опір) ( $\sigma_{граничне} = \sigma_B$ ), тому, що чавун не має межі текучості.

*Закон Гука* для абсолютного подовження  $\Delta l$ :

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF},$$

де  $N$  - поздовжня сила, [Н];

$l$  - довжина ділянки, [м];

$F$  - площа поперечного перерізу ділянки, [м<sup>2</sup>];

$E$  - модуль пружності 1-го роду (модуль Юнга), [Па].

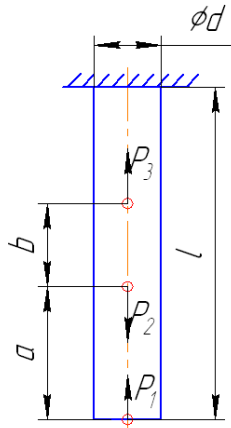
*Правило перевірки епюри  $N$* :

Епюра  $N$  перевіряється за розрахунковою схемою. Стрибки на епюрі  $N$  повинні бути в тих перерізах, у яких на розрахунковій схемі прикладені зовнішні сили. Зовнішня сила, що розтягує, викликає на епюрі  $N$  скачок у позитивному напрямку, що стискає - у негативному. Довжина стрибка на епюрі повинна бути чисельно рівною зовнішній силі, яка прикладена в цьому перетині.

*Правило перевірки епюри  $\Delta l$* :

Епюра  $\Delta l$  перевіряється по епюрі  $N$ . У жорстко закріпленому перерізі переміщення  $\Delta l$  дорівнює нулю. При русі від жорстко закріпленого перерізу значення на епюрі  $\Delta l$  збільшуються, якщо на епюрі  $N$  знак «+», якщо на епюрі  $N$  знак «-», то значення на епюрі  $\Delta l$  зменшуються. Якщо на ділянці  $N = 0$ , то на епюрі  $\Delta l$  значення не міняються.

**Задача.** Для заданого матеріалу, форми, розмірів і навантаження стержня визначити діаметр стержня і побудувати епюру поздовжніх деформацій стержня.



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа

Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа

$P_1 = 30$  кН

$P_2 = 40$  кН

$P_3 = 20$  кН

$a = 0,3$  м

$b = 0,2$  м

$l = 0,8$  м

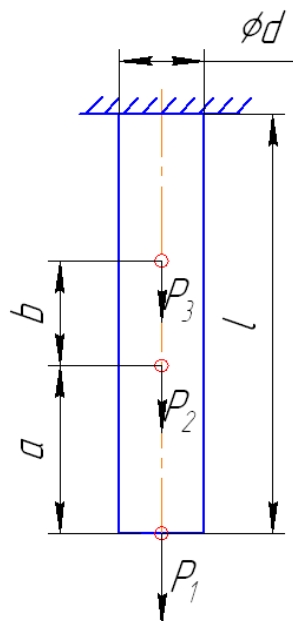
### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Індивідуальні завдання:

Для заданого матеріалу, форми, розмірів і навантаження стержня визначити діаметр стержня і побудувати епюру поздовжніх деформацій стержня.

1 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа

Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа

$P_1 = 50$  кН

$P_2 = 20$  кН

$P_3 = 40$  кН

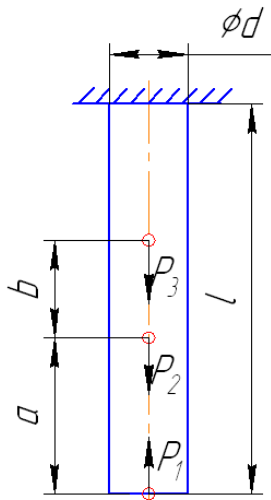
$a = 0,3$  м

$b = 0,2$  м

$l = 0,8$  м



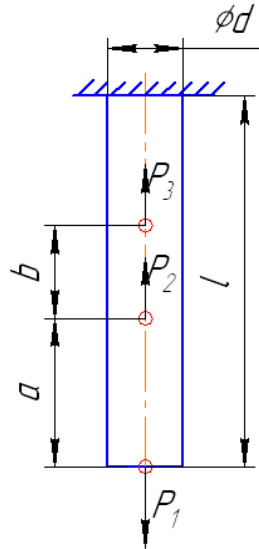
## 2 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 30$  кН $P_2 = 50$  кН $P_3 = 20$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

## 3 варіант



Ст3

пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПанапруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа

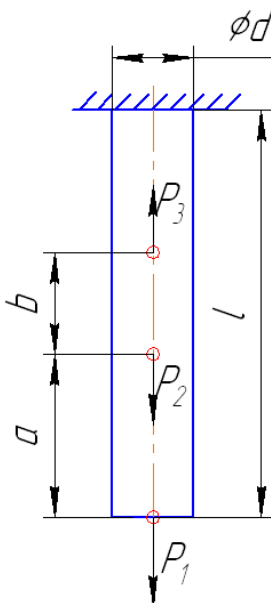
Матеріал стержня

Модуль

Допустимі

 $P_1 = 10$  кН $P_2 = 30$  кН $P_3 = 40$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

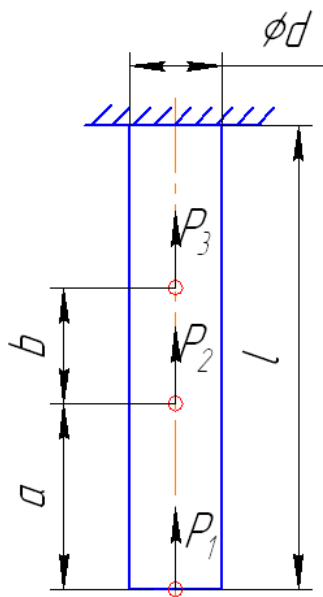
## 4 варіант



Матеріал стержня Ст3

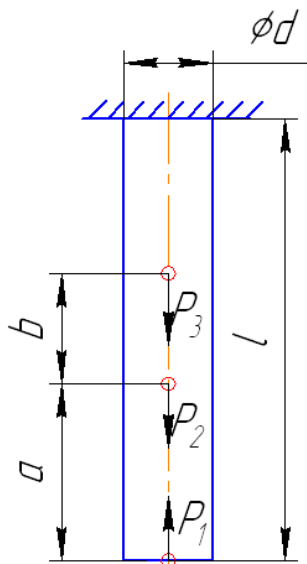
Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 30$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

## 5 варіант



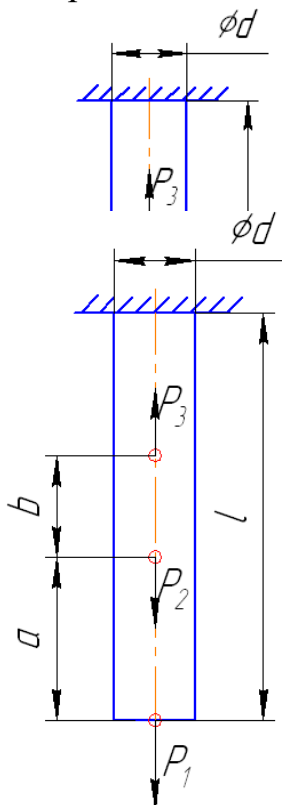
Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа  
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа  
 $P_1 = 40$  кН  
 $P_2 = 30$  кН  
 $P_3 = 50$  кН  
 $a = 0,3$  м  
 $b = 0,2$  м  
 $l = 0,8$  м

6 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа  
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа  
 $P_1 = 10$  кН  
 $P_2 = 20$  кН  
 $P_3 = 40$  кН  
 $a = 0,3$  м  
 $b = 0,2$  м  
 $l = 0,8$  м

7 варіант

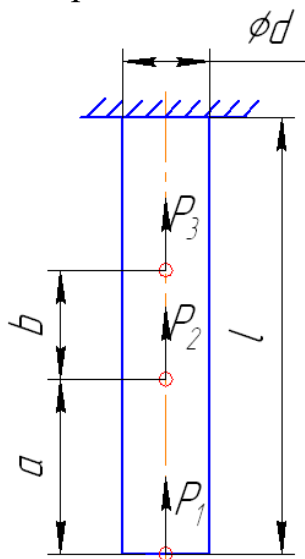


Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа  
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа  
 $P_1 = 40$  кН  
 $P_2 = 20$  кН  
 $P_3 = 30$  кН  
 $a = 0,3$  м  
 $b = 0,2$  м  
 $l = 0,8$  м

8 варіант  
 Матеріал стержня Ст3

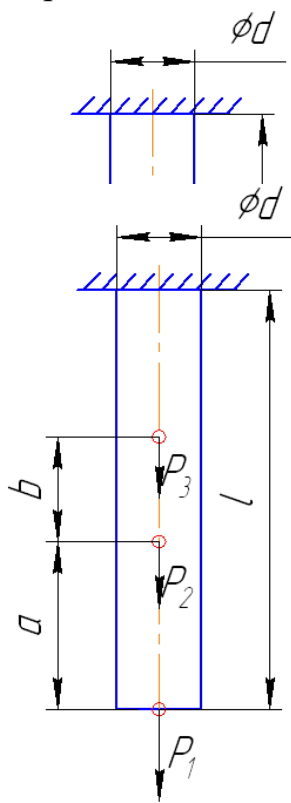
Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 20 \text{ кН}$   
 $P_3 = 30 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

9 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 20 \text{ кН}$   
 $P_3 = 50 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

10 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 30 \text{ кН}$   
 $P_2 = 40 \text{ кН}$   
 $P_3 = 20 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

11 варіант

Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$

$P_1 = 50 \text{ кН}$

$P_2 = 20 \text{ кН}$

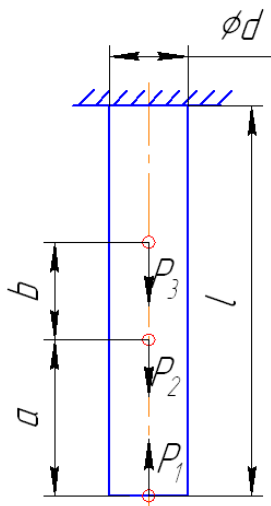
$P_3 = 40 \text{ кН}$

$a = 0,3 \text{ м}$

$b = 0,2 \text{ м}$

$l = 0,8 \text{ м}$

12 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$

$P_1 = 30 \text{ кН}$

$P_2 = 50 \text{ кН}$

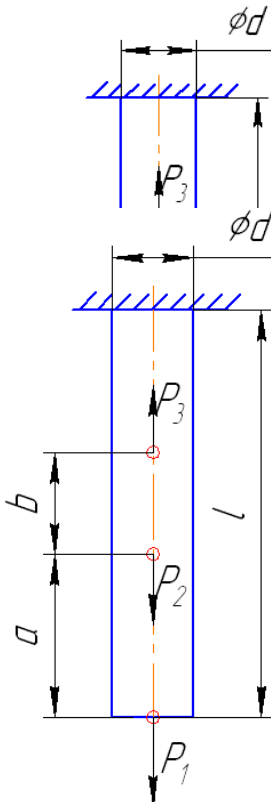
$P_3 = 20 \text{ кН}$

$a = 0,3 \text{ м}$

$b = 0,2 \text{ м}$

$l = 0,8 \text{ м}$

13 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$

$P_1 = 10 \text{ кН}$

$P_2 = 30 \text{ кН}$

$P_3 = 40 \text{ кН}$

$a = 0,3 \text{ м}$

$b = 0,2 \text{ м}$

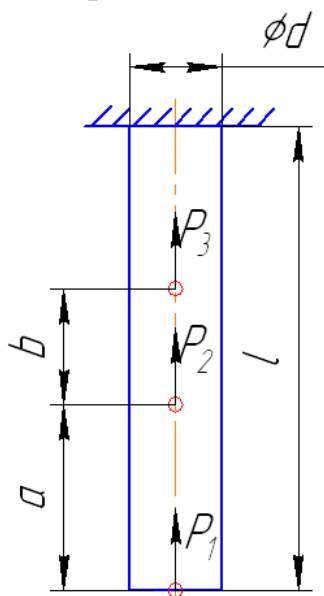
$l = 0,8 \text{ м}$

14 варіант

Матеріал стержня Ст3

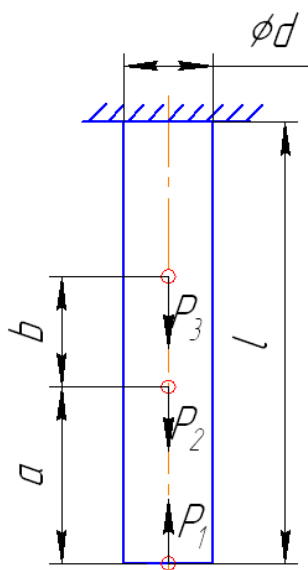
Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 20 \text{ кН}$   
 $P_3 = 30 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

## 15 варіант



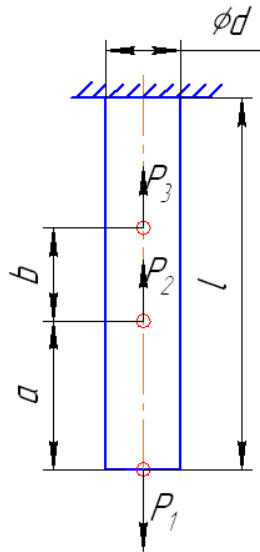
Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 30 \text{ кН}$   
 $P_3 = 50 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

## 16 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 10 \text{ кН}$   
 $P_2 = 20 \text{ кН}$   
 $P_3 = 40 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

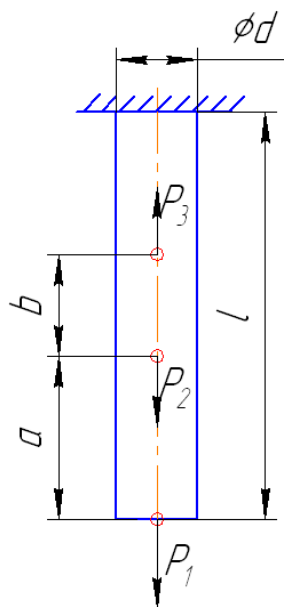
## 17 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 30$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

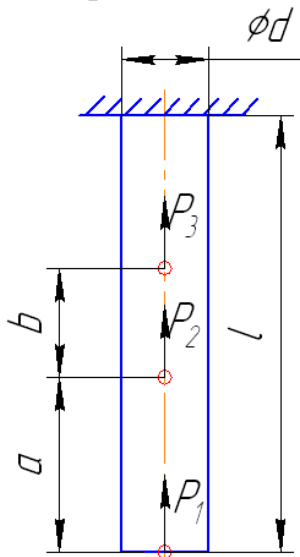
## 18 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 30$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

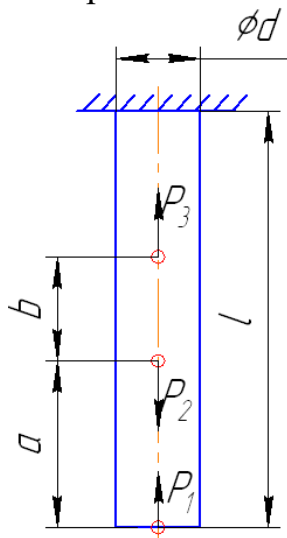
## 19 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 50$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

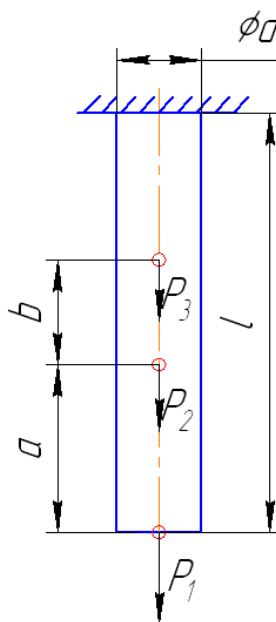
## 20 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 30$  кН $P_2 = 40$  кН $P_3 = 20$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

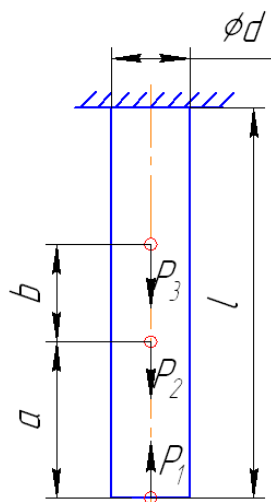
## 21 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 50$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 40$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

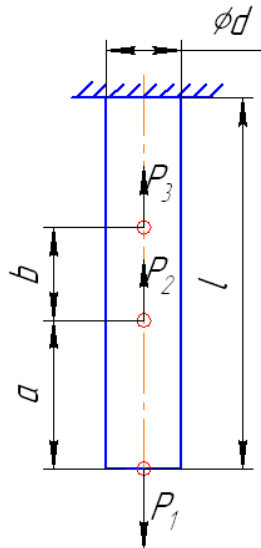
## 22 варіант



Матеріал стержня Ст3

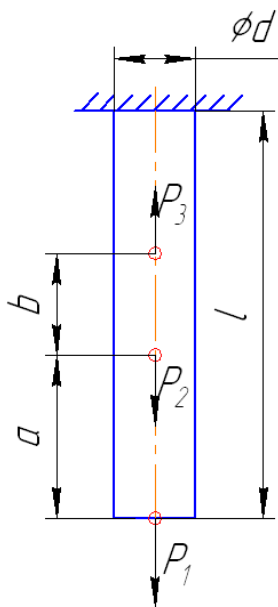
Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 30$  кН $P_2 = 50$  кН $P_3 = 20$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

## 23 варіант



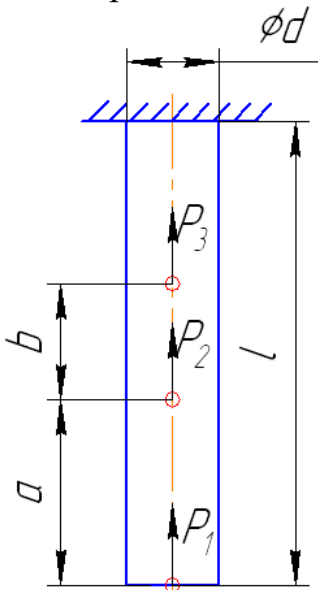
Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 10 \text{ кН}$   
 $P_2 = 30 \text{ кН}$   
 $P_3 = 40 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

## 24 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 20 \text{ кН}$   
 $P_3 = 30 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$

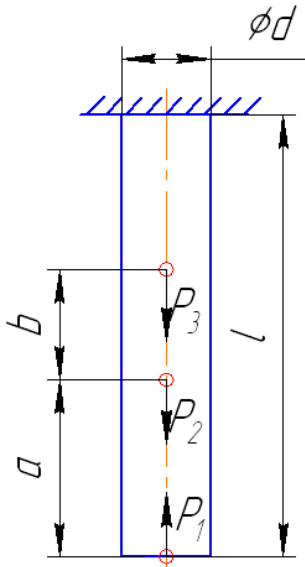
## 25 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$   
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150 \text{ МПа}$   
 $P_1 = 40 \text{ кН}$   
 $P_2 = 30 \text{ кН}$   
 $P_3 = 50 \text{ кН}$   
 $a = 0,3 \text{ м}$   
 $b = 0,2 \text{ м}$   
 $l = 0,8 \text{ м}$



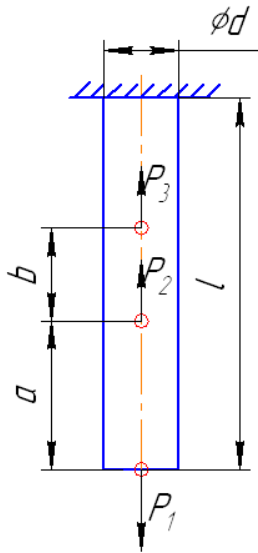
## 26 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 10$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 40$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

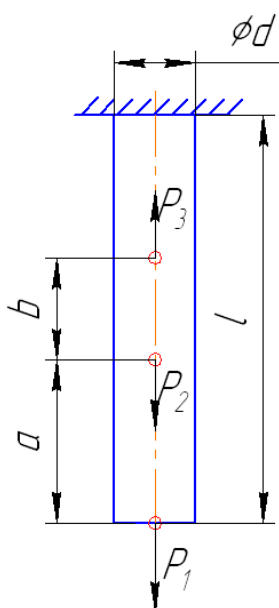
## 27 варіант



Матеріал стержня Ст3

Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 30$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

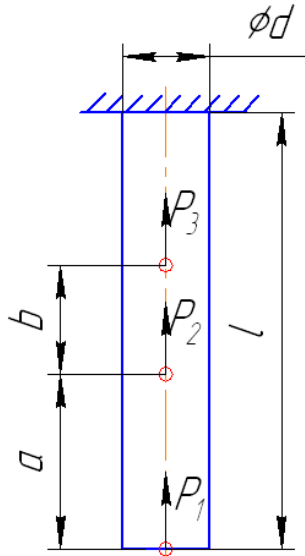
## 28 варіант



Матеріал стержня Ст3

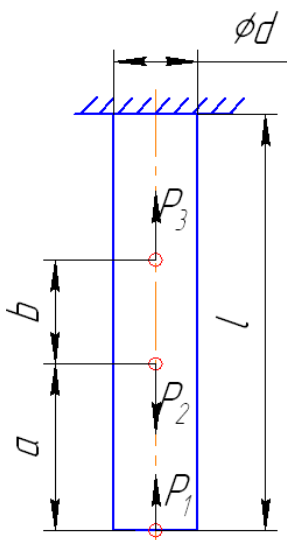
Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПаДопустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа $P_1 = 40$  кН $P_2 = 20$  кН $P_3 = 30$  кН $a = 0,3$  м $b = 0,2$  м $l = 0,8$  м

## 29 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа  
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа  
 $P_1 = 40$  кН  
 $P_2 = 20$  кН  
 $P_3 = 50$  кН  
 $a = 0,3$  м  
 $b = 0,2$  м  
 $l = 0,8$  м

## 30 варіант



Матеріал стержня Ст3  
 Модуль пружності  $E=2 \cdot 10^5$  МПа  
 Допустимі напруження  $[\sigma_+] \approx [\sigma_-] = 150$  МПа  
 $P_1 = 30$  кН  
 $P_2 = 40$  кН  
 $P_3 = 20$  кН  
 $a = 0,3$  м  
 $b = 0,2$  м  
 $l = 0,8$  м

**Перелік питань для самоконтролю:**

1. Внутрішні силові фактори?
2. Поздовжня сила?
3. Як визначається поздовжня сила? Правило знаків.
4. Правила побудови епюр?
5. Що таке нормальні напруження і як вони визначаються?
6. Умова міцності при розтяганні-стисканні.
7. Що таке абсолютна деформація і як вона визначається?
8. Закон Гука для абсолютних подовжень.

**Тема № 3. Теорія напруженого стану в околі точки.**

### **Практичне заняття №3:** Теорія напруженого стану в околі точки.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (види напружень), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### **Навчальні питання:**

2. Кручення. Побудова епюри крутних моментів.

Література: 1, 2, 3 (с. 121 - 150)

#### **План проведення заняття:**

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Напружений стан матеріалу в точці* – це сукупність нормальних і дотичних напружень діючих по всіх площадках, що проходять через дану точку тіла.

*Види напруженого стану:*

- 1) *просторове* (тривісне) – через дану точку тіла не проходять площадки вільні від напружень (загальний випадок);
- 2) *плоске* (двовісне) – через дану точку тіла проходить тільки одна площадка вільна від напружень;
- 3) *лінійне* (одновісне) – через дану точку тіла проходить двох перпендикулярних площадок вільних від напружень.

*Правило знаків нормальних напружень  $\sigma$* : якщо нормальне напруження діє на розтяг, то воно - позитивне, якщо діє на стиск – негативне.

*Правило знаків дотичного напруження  $\tau$* : якщо вектор дотичного напруження прагне повернути елемент тіла по годинній стрілці, то воно - позитивно, якщо проти годинної стрілки – негативно.

*Головні напруження* – максимальні і мінімальні нормальні ( $\sigma_{max}$  і  $\sigma_{min}$ ) напруження.

*Головні площадки* – площадки, по яких діють головні напруження  $\sigma_{max}$  і  $\sigma_{min}$  (а дотичні напруження  $\tau$  дорівнюють нулю).

*Площини зсуву* – площадки, по яких діють екстремальні дотичні ( $\tau_{max}$  і  $\tau_{min}$ ) напруження (а нормальні напруження  $\sigma$  рівні між собою).

*Правило знаків кута нахилу головних площадок  $\alpha_0$ :*

- якщо головна площадка повернена щодо заданої проти годинної стрілки, то кут  $\alpha_0$  позитивний;
- якщо головна площадка повернена щодо заданої по годинній стрілці, то кут  $\alpha_0$  негативний.

*Закон парності дотичних напружень:* дотичні напруження  $\tau$ , що діють по взаємно перпендикулярних площадках, рівні по абсолютній величині (модулю) і протилежні за знаком (напрямком):

$$\tau_x = -\tau_y.$$

*Коло Мору* – діаграма напружень для графічного дослідження плоского напруженого стану.

### Задача 2:

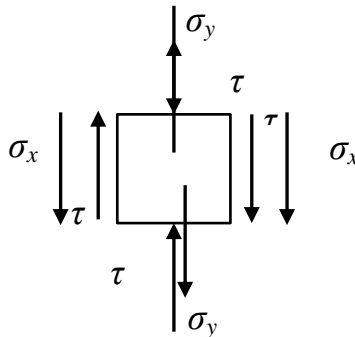
Сталевий кубик знаходиться під дією сил, що створюють плоский напружений стан (одне з трьох головних напружень дорівнює нулю).

Потрібно знайти:

- 1) головні напруження і напрямки головних площадок;
- 2) максимальні дотичні напруження, рівні найбільшій напіввізніці головних напружень;
- 3) відносні деформації  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ ;
- 4) відносну зміну обсягу;
- 5) повну питому потенційну енергію пружної деформації.

Прийняти:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $\mu = 0,25$

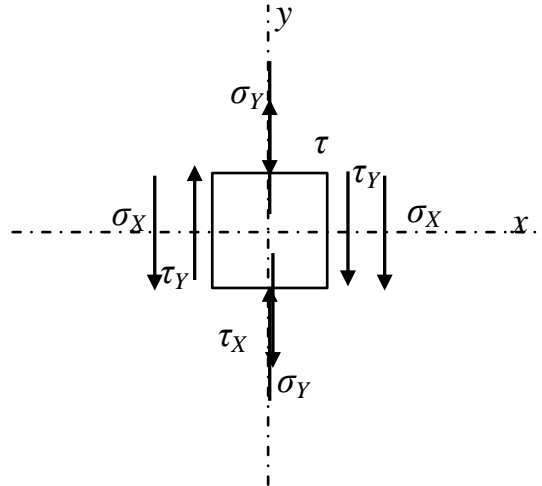
Дано:  $\sigma_x = 70 \text{ МПа}$ ,  $\sigma_y = 50 \text{ МПа}$ ,  $\tau = 40 \text{ МПа}$



### Рішення:

- 1) Привласнимо напруженням індекси відповідно до координатних осей  $X$  і  $Y$ .

- 2) Визначимо знаки напружень:



$\sigma_X = +70 \text{ МПа}$  (розтягує елемент тіла);

$\sigma_Y = -50 \text{ МПа}$  (стискає елемент тіла);

$\tau_X = -40 \text{ МПа}$  (прагне повернути елемент тіла проти годинної стрілки);

$\tau_Y = +40 \text{ МПа}$  (прагне повернути елемент тіла по годинній стрілці).

- 3) Визначимо аналітично величину головних напружень при плоскому напруженому стані ( $\sigma_{max}$  і  $\sigma_{min}$ ):

$$\sigma_{max/min} = \frac{\sigma_X + \sigma_Y}{2} \pm \frac{\sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_X^2}}{2},$$

$$\sigma_{max/min} = \frac{70 - 50}{2} \pm \frac{\sqrt{(70 - (-50))^2 + 4 \cdot (-40)^2}}{2} = 10 \pm 72,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{max} = 10 + 72,1 = 82,1 \text{ МПа},$$

$$\sigma_{min} = 10 - 72,1 = -62,1 \text{ МПа}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} \sigma_{max} + \sigma_{min} &= \sigma_X + \sigma_Y \\ -62,1 + 82,1 &= 70 - 50 \\ 20 &= 20 \end{aligned}$$

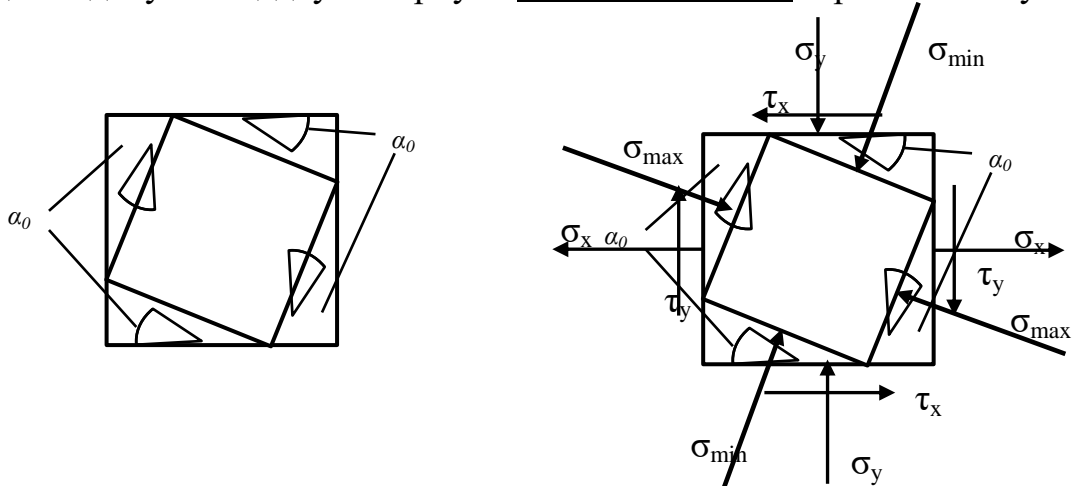
- 4) Визначимо аналітично кут нахилу головних площадок ( $-45^\circ \leq \alpha_0 \leq +45^\circ$ )

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_X}{\sigma_X - \sigma_Y},$$

$$\alpha_0 = \frac{\arctg\left(\frac{2\tau_X}{\sigma_X - \sigma_Y}\right)}{2},$$

$$\alpha_0 = \frac{\arctg\left(\frac{2 \cdot (-40)}{70 - (-50)}\right)}{2} = \frac{\arctg(-0,667)}{2} = -\frac{33^\circ 42'}{2} = -16^\circ 51'.$$

Одержали негативне значення  $\alpha_0$ . Для того щоб отримати головну площадку, необхідно задану площадку повернути за годинниковою стрілкою на кут  $\alpha_0$ .



### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Практичне заняття №4: Теорія напруженого стану в околі точки.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (види напружень), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

3. Кручення. Побудова епюри крутних моментів.

Література: 1, 2, 3 (с. 121 - 150)

#### План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

- 5) Визначимо величину екстремальних дотичних напружень  $\tau_{\max}$   $\tau_{\min}$  через головні напруження  $\sigma_{\max}$   $\sigma_{\min}$  :

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2},$$

$$\tau_{\min} = \pm \frac{82,1 - (-62,1)}{2} = \pm 72,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\max} = +72,1 \text{ МПа},$$

$$\tau_{\min} = -72,1 \text{ МПа}.$$

Перевірка:

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sqrt{(\sigma_X - \sigma_Y)^2 + 4\tau_X^2}}{2},$$

$$\tau_{\min} = \pm \frac{\sqrt{(70 - (-50))^2 + 4 \cdot (-40)^2}}{2} = \pm 72,1 \text{ МПа}.$$

- 6) Визначимо відносні лінійні деформації уздовж ребер елемента тіла через напруження з узагальненого закону Гука:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)}{E},$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)}{E},$$

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)}{E}.$$

де  $\mu$  - коефіцієнт Пуассона;

$E$  - модуль Юнга, [МПа].

$$\varepsilon_x = \frac{70 - 0,25(-50 + 0)}{2 \cdot 10^5} = 41,25 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_y = \frac{-50 - 0,25(70 + 0)}{2 \cdot 10^5} = -33,75 \cdot 10^{-5},$$

$$\varepsilon_z = \frac{0 - 0,25(70 + (-50))}{2 \cdot 10^5} = -1 \cdot 10^{-5}.$$

Знаки  $\varepsilon$  говорять про те, що в напрямку  $\sigma_x$  відбулося подовження ребер елемента тіла, а в напрямку  $\sigma_y$  і  $\sigma_z$  відбулося укорочення ребер елемента

тіла.

Можна помітити, що хоча напруги по гранях елемента тіла діяли тільки в двох напрямках ( $\sigma_z = 0$ ), деформації елемента відбулися по всіх трьох напрямках.

- 7) Визначимо відносну зміну обсягу елемента тіла

$$\Theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = 41,25 \cdot 10^{-5} - 33,75 \cdot 10^{-5} - 1 \cdot 10^{-5} = -6,5 \cdot 10^{-5}.$$

- 8) Визначимо повну питому потенційну енергію пружної деформації:

$$u = \frac{\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z}{2},$$

$$u = \frac{70 \cdot 41,25 \cdot 10^{-5} + (-50)(-33,75) \cdot 10^{-5} + 0}{2} = 4575 \cdot 10^{-5} \frac{\text{МДж}}{\text{м}^3} \approx 0,046 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Практичне заняття №5: Теорія напруженого стану в околі точки.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (види напружень), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

4. Кручення. Побудова епюри крутних моментів.

Література: 1, 2, 3 (с. 121 - 150)

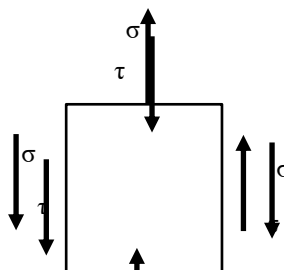
### План проведення заняття:

#### I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

Для елемента тіла: визначити аналітично і графічно величину і напрям головних напружень; графічно визначити напрям площинок зсуву і  $\tau_{\max}$ ,  $\tau_{\min}$ .  
Прийняти:  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\mu = 0,25$ ,  $\sigma_x = \sigma_y = 70$  МПа,  $\sigma_z = \sigma_{\text{в}} = \sigma_{\text{г}} = 30$  МПа,  $\tau = 50$  МПа.





### **III. Порядок проведення заключної частини заняття.**

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### **КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ**

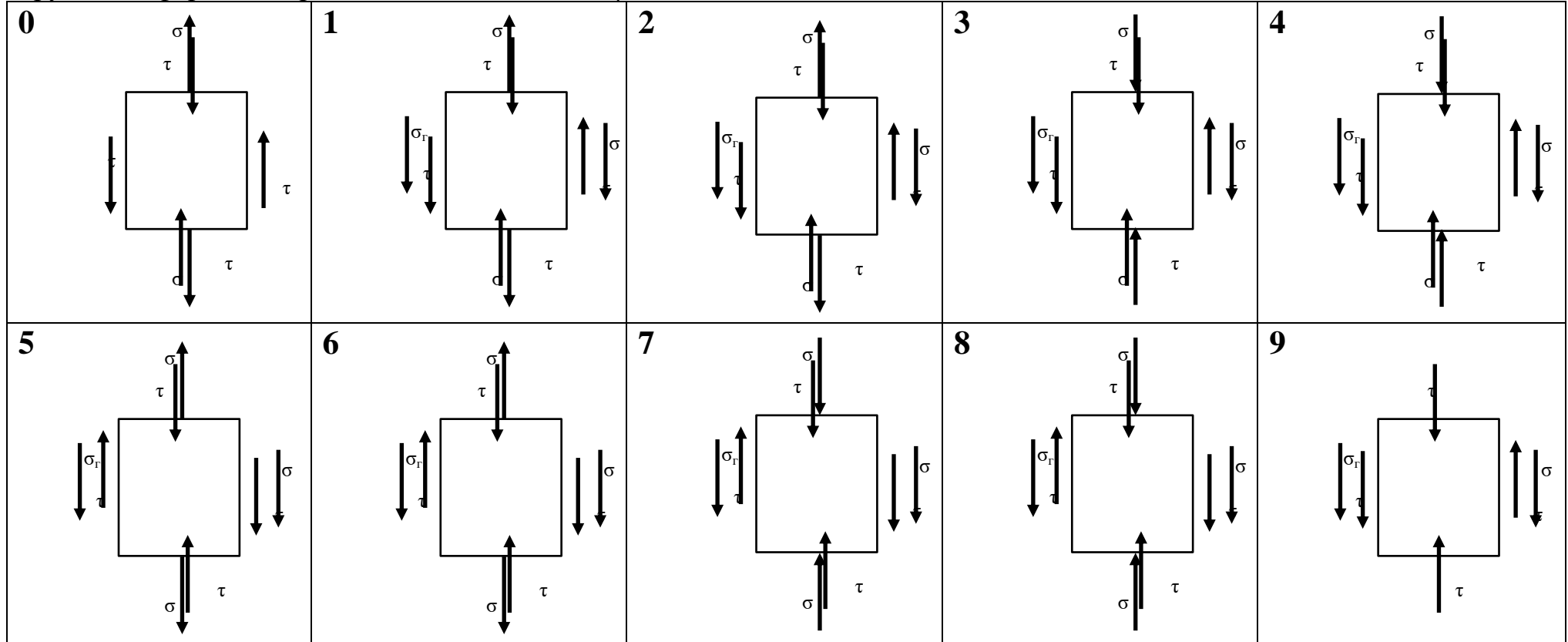
1. Що називається напруженим станом матеріалу в точці? Види напруженого стану.
5. Що називається плоским напруженим станом?
6. Правило знаків для нормальних і дотичних напружень.
7. Правило знаків для кута  $\alpha_0$ .
8. Які напруження називаються головними?
9. Які площадки називаються головними? Які площадки називаються площадками зсуву?
10. Закон парності дотичних напружень.

### **III. Порядок проведення заключної частини заняття.**

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

**Індивідуальні завдання:**

Для елемента тіла визначити аналітично та графічно величину та напрямок головних напружень. Обчислити через головні напруження: відносні лінійні деформації вздовж ребер паралелепіпеда; відносну зміну об'єму; повну питому потенційну енергію пружної деформації. Прийняти:  $E = 2 \times 10^5$  МПа,  $\mu = 0,25$ .



	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\sigma_r$ , МПа	80	90	70	60	50	100	80	140	100	80
$\sigma_b$ , МПа	20	40	50	70	80	30	100	60	40	60
$\tau$ , МПа	40	60	50	30	40	20	30	50	30	20

## Тема № 4. Геометричні характеристики плоских перерізів.

### Практичне заняття №6: Геометричні характеристики плоских перерізів.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (геометричні характеристики перерізів), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

Статичні моменти перерізів. Моменти інерції та моменти опору перерізів.

Визначення головних моментів інерції складного перерізу.

Література: 1, 2, 3 (с. 151 - 168)

#### План проведення заняття:

I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Види геометричних характеристик перерізів:*

$F$  – площа перерізу,  $[м^2]$ ;

$S_X, S_Y$  – статичні моменти перерізу (щодо осей  $X, Y$ ),  $[м^3]$ ;

$I_X, I_Y$  – осьові моменти інерції перерізу

$I_P$  – полярний момент інерції перерізу  $[м^4]$ ;

$I_{XY}$  – відцентровий момент інерції перерізу

$W_X, W_Y$  – осьові моменти опору перерізу

$W_P$  – полярний момент опору перерізу  $[м^3]$ ;

$F, I_X, I_Y, I_P, W_X, W_Y, W_P$  – не можуть бути негативними;

$S_X, S_Y, I_{XY}$  – можуть бути і позитивними і негативними.

*Головні моменти інерції перерізу* – максимальний і мінімальний осьові моменти інерції перерізу ( $I_{max}, I_{min}$ ).

*Головні осі* (вісь максимум і вісь мінімум) – перпендикулярні осі, щодо яких осьові моменти інерції перерізу будуть головними (приймати максимальне і мінімальне значення). Відцентровий момент інерції щодо головних осей дорівнює нулю.

Перпендикулярні осі, з яких хоча б одна є віссю симетрії, завжди будуть головними.

*Центральні осі* – осі, які проведені через центр ваги перерізу.

*Правило знаків кута нахилу головних осей  $\alpha_0$ :*

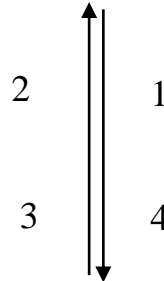
- якщо  $\alpha_0$  позитивний, то для того, щоб знайти головну вісь інерції, необхідно

задану вісь повернути проти годинної стрілки;

- якщо  $\alpha_0$  негативний, то для того щоб знайти головну вісь інерції, необхідно задану вісь повернути по годинній стрілці.

*Правило знаків відцентрового моменту інерції перерізу  $I_{XY}$ :*

- $I_{XY}$  позитивний, якщо вісь мінімум лежить у 1 – 3 квадрантах;
- $I_{XY}$  негативний, якщо вісь мінімум лежить у 2 – 4 квадрантах.



Формули для визначення *статичних моментів перерізу*:

$$\begin{aligned} S_X &= y F, \\ S_Y &= x F, \end{aligned}$$

де  $F$  – площа перерізу,  $[м^2]$ ;  
 $x$ ;  $y$  – координати центра ваги перерізу,  $[м]$ .

Формули для визначення *моментів інерції при паралельному переносі осей*:

$$\begin{aligned} I_{X_I} &= I_X + F \cdot a^2, \\ I_{Y_I} &= I_Y + F \cdot b^2, \\ I_{X_I Y_I} &= I_{XY} + F \cdot a \cdot b, \end{aligned}$$

де  $F$  – площа перерізу,  $[м^2]$ ;  
 $I_X; I_Y; I_{XY}$  – моменти інерції перерізу щодо осей  $X$  і  $Y$ , які проходять через центр ваги перерізу,  $[м^4]$ ;  
 $I_{X_I}; I_{Y_I}; I_{X_I Y_I}$  – моменти інерції перетину щодо осей  $X_I$  і  $Y_I$  проведених паралельно центральним осям  $X$  і  $Y$ ,  $[м^4]$ ;  
 $a$  – відстань від центральної осі  $X$  до паралельної  $X_I$  (з урахуванням знака),  $[м]$ ;  
 $b$  – відстань від центральної осі  $Y$  до паралельної  $Y_I$  (з урахуванням знака),  $[м]$ .

Формули для визначення *осьових моментів опору перерізу*:

$$W_X = \frac{I_X}{y_{max}}, \quad W_Y = \frac{I_Y}{x_{max}},$$

де  $I_X; I_Y$  – осьові моменти інерції перерізу,  $[м^4]$ ;  
 $y_{max}$  – відстань від осі  $X$  до точки перерізу, що найбільш віддалена

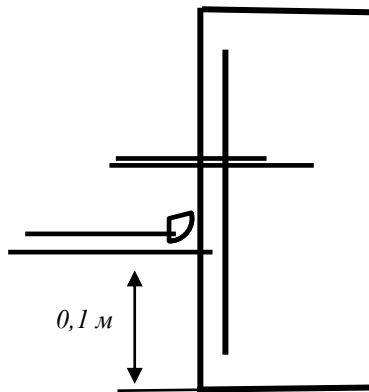
від цієї осі, [м];  
 $x_{max}$  – відстань від осі  $Y$  до точки перерізу, що найбільш віддалена від цієї осі, [м].

### Задача 3:

Для заданого поперечного перерізу, що склали зі швелера і рівнополичного кутника, потрібно:

- 1) визначити положення центра ваги;
- 2) знайти осьові і відцентрові моменти інерції щодо центральних осей;
- 3) визначити напрямки головних центральних осей ( $u$  і  $v$ );
- 4) знайти моменти інерції щодо головних центральних осей;
- 5) вичертати переріз у масштабі 1:2 і вказати на ньому всі розміри і всі осі.

Дано: швелер №27; рівнополичний кутник 100 x 100 x 12 мм.



### Рішення:

- 1) Випишемо з таблиць сортаменту геометричні дані прокатних профілів:

#### Швелер №27:

$$h = 27 \text{ см};$$

$$b = 9,5 \text{ см};$$

$$s = 0,6 \text{ см};$$

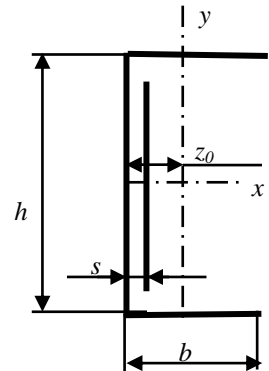
$$F = 35,2 \text{ см}^2;$$

$$I_X = 4160 \text{ см}^4;$$

$$I_Y = 262 \text{ см}^4;$$

$$z_0 = 2,47 \text{ см};$$

$$I_{XY} = 0 \text{ (тому що вісь } X \text{ швелера є його віссю симетрії)}.$$



#### Кутник 100x100x12:

$$U = 10 \text{ см};$$

$$d = 1,2 \text{ см};$$

$$z_0 = 2,91 \text{ см};$$

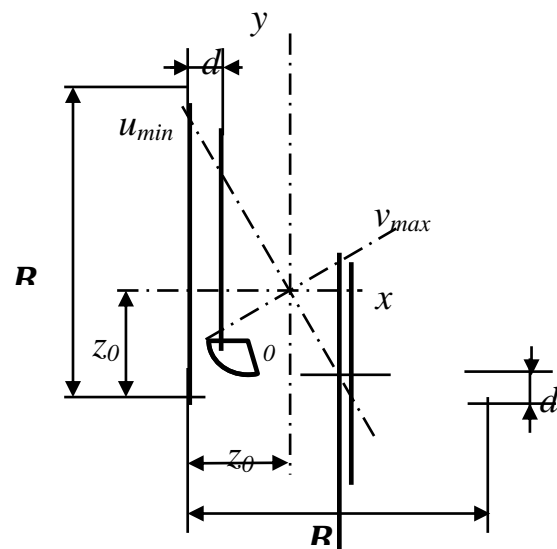
$$F = 22,8 \text{ см}^2;$$

$$I_X = 208,9 \text{ см}^4;$$

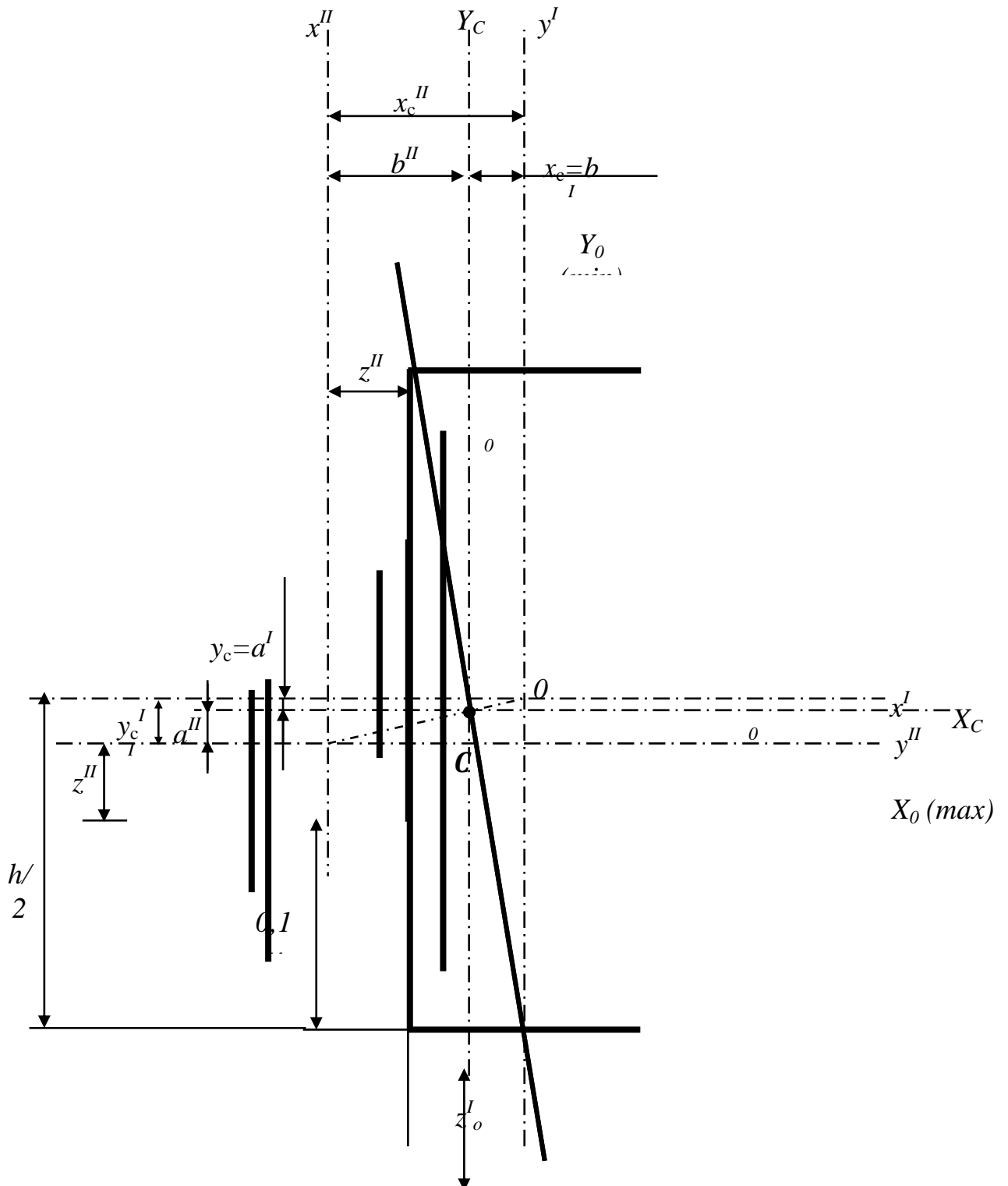
$$I_Y = 208,9 \text{ см}^4;$$

$$I_{V_{max}} = 330,95 \text{ см}^4;$$

$$I_{U_{min}} = 86,84 \text{ см}^4;$$



$$\alpha_0 = 45^\circ.$$



Значення відцентрового моменту інерції кутника знайдемо по формулі:

$$I_{XY} = \frac{I_{vmax} - I_{umin}}{2} \sin 2\alpha_0.$$

Тоді відцентровий момент інерції кутника дорівнює:

$$I_{XY} = \frac{330,95 - 86,84}{2} \sin 2 \cdot 45^\circ = 122 \text{ см}^4$$

Визначимо знак відцентрового моменту кутника. У заданому перетині кутник розташований так, що його вісь мінімум пройде через 1 – 3 квадранти, тому в даній задачі значення відцентрового моменту інерції кутника будемо вважати позитивним.

- 2) Побудуємо заданий переріз у масштабі по розмірам, узятим із таблиць сортаменту.
- 3) Виберемо початок відліку.  
Зручно за початок відліку прийняти центр ваги швелера, тому що в заданому перерізі швелер розташований вертикально (так само як у сортаменті). Тоді осі швелера утворять допоміжну систему координат.

**III. Порядок проведення заключної частини заняття.**

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття, звернув увагу на основні помилки при його виконанні.

#### **Тема № 4. Геометричні характеристики плоских перерізів.**

**Практичне заняття №7:** Геометричні характеристики плоских перерізів.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (геометричні характеристики перерізів), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

##### **Навчальні питання:**

Статичні моменти перерізів. Моменти інерції та моменти опору перерізів.

Визначення головних моментів інерції складного перерізу.

Література: 1, 2, 3 (с. 151 - 168)

##### **План проведення заняття:**

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

- 4) В допоміжній системі координати центра ваги швелера вийдуть рівними нулю:

$$x_C^I = 0; \quad y_C^I = 0.$$

З креслення знайдемо координати центра ваги кутника в допоміжній системі:

$$x_C^{II} = -\left(z_0^I + z_0^{II}\right) = -(2,47 + 2,91) = -5,38 \text{ см};$$

$$y_C^{II} = -\left(\frac{h}{2} - (10 + z_0^{II})\right) = -\left(\frac{27}{2} - (10 + 2,91)\right) = -0,59 \text{ см}.$$

5) Визначимо координати центра ваги всього перерізу :

6)

$$x_C = \frac{x_C^I F^I + x_C^{II} F^{II}}{F^I + F^{II}};$$

$$y_C = \frac{y_C^I F^I + y_C^{II} F^{II}}{F^I + F^{II}},$$

де  $F$  - площа всього перерізу,  $[см^2]$ ;

$F^I$  - площа швелера,  $[см^2]$ ;

$F^{II}$  - площа кутника,  $[см^2]$ ;

$x_C; y_C$  - координати центра ваги всього перерізу,  $[см]$ ;

$x_C^I; y_C^I$  - координати центра ваги швелера,  $[см]$ ;

$x_C^{II}; y_C^{II}$  - координати центра ваги кутника,  $[см]$ .

$$x_C = \frac{0 \cdot 35,2 + (-5,38) \cdot 22,8}{35,2 + 22,8} = -2,11 \text{ см};$$

$$y_C = \frac{0 \cdot 35,2 + (-0,59) \cdot 22,8}{35,2 + 22,8} = -0,23 \text{ см}.$$

На кресленні в масштабі відкладемо точку  $C(-2,11; -0,23)$

(Центр ваги всього перетину повинний потрапити на відрізок, що з'єднує центри ваги швелера і кутника. Центр ваги всього перетину буде ближче до центра ваги того профілю, у якого більше площа.)

7) Проведемо через центр ваги перерізу (т.С) осі  $X_C$  і  $Y_C$  (центральні).

8) Знайдемо відстані від центральних осей перерізу до паралельних осей:

- від  $X_C$  до горизонтальної осі швелера  $x^I$ :

$$a^I = y_C^I - y_C = 0 - (-0,23) = +0,23 \text{ см},$$

- від  $X_C$  до горизонтальної осі кутника  $y^{II}$ :



$$a^{II} = y_C^{II} - y_C = -0,59 - (-0,23) = -0,36 \text{ см},$$

- від  $Y_C$  до вертикальної осі швелера  $y^I$ :

$$b^I = x_C^I - x_C = 0 - (-2,11) = 2,11 \text{ см},$$

- від  $Y_C$  до вертикальної осі кутника  $x^{II}$ :

$$b^{II} = x_C^{II} - x_C = -5,38 - (-2,11) = -3,27 \text{ см}.$$

- 9) Визначимо величину моментів інерції перерізу щодо центральних осей  $X_C$  і  $Y_C$  за допомогою формул паралельного переносу:

$$I_{X_C} = I_X^I + F^I (a^I)^2 + I_X^{II} + F^{II} (a^{II})^2,$$

$$I_{X_C} = 4160 + 35,2 \cdot 0,23^2 + 208,9 + 22,8 \cdot (-0,36)^2 = 4373,7 \text{ см}^4,$$

$$I_{Y_C} = I_Y^I + F^I (b^I)^2 + I_Y^{II} + F^{II} (b^{II})^2,$$

$$I_{Y_C} = 262 + 35,2 \cdot 2,11^2 + 208,9 + 22,8 \cdot (-3,27)^2 = 871,4 \text{ см}^4,$$

$$I_{X_C Y_C} = I_{XY}^I + F^I a^I b^I + I_{XY}^{II} + F^{II} a^{II} b^{II},$$

$$I_{X_C Y_C} = 0 + 35,2 \cdot 0,23 \cdot 2,11 + 122 + 22,8 \cdot (-0,36) \cdot (-3,27) = 165,9 \text{ см}^4,$$

де  $I_X^I; I_Y^I; I_{XY}^I$  - моменти інерції швелера,  $[\text{см}^4]$ ;

$I_X^{II}; I_Y^{II}; I_{XY}^{II}$  - моменти інерції кутника,  $[\text{см}^4]$ ;

$F^I$  - площа швелера,  $[\text{см}^2]$ ;

$F^{II}$  - площа кутника,  $[\text{см}^2]$ ;

$a, b$  - відстані від центральних осей  $X_C$  і  $Y_C$  до осей швелера,  $[\text{см}]$ ;

$a^{II}, b^{II}$  - відстані від центральних осей  $X_C$  і  $Y_C$  до осей кутника,  $[\text{см}]$ .

- 10) Визначимо кут нахилу головних центральних осей перерізу ( $-45^\circ \leq \alpha_0 \leq +45^\circ$ ):

$$\text{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{X_C Y_C}}{I_{X_C} - I_{Y_C}},$$

де  $I_{X_C Y_C}$  - відцентровий момент інерції перерізу щодо осей  $X_C$  і  $Y_C$ ,  $[\text{см}^4]$ ;

$I_{X_C}$  - момент інерції перерізу щодо осі  $X_C$  (горизонтальної),  $[\text{см}^4]$ ;

$I_{Y_C}$  - момент інерції перерізу щодо осі  $Y_C$  (вертикальної),  $[\text{см}^4]$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} 2\alpha_0 &= -\frac{2 \cdot 165,9}{4373,7 - 871,4} = -0,0947, \\ \alpha_0 &= \frac{\operatorname{arctg}(-0,0947)}{2} = \frac{-5,41^\circ}{2} = -2,71^\circ. \end{aligned}$$

Одержали негативне значення  $\alpha_0$ . Тому, для того щоб знайти головну вісь, необхідно задану центральну вісь повернути по годинній стрілці на кут  $\alpha_0$ .

- 11) Повернувши центральні осі ( $X_C$  і  $Y_C$ ) на кут  $\alpha_0$  одержимо головні центральні осі перерізу ( $X_0$  і  $Y_0$ ).

Тому що відцентровий момент інерції перерізу позитивний ( $I_{X_C Y_C} = 165,9 \text{ см}^4$ ), віссю мінімум буде та з головних осей, що проходить через I – 3 квадранти.

Тоді:

$Y_0$  – вісь мінімум,

$X_0$  – вісь максимум

(відповідно  $I_{Y_0} = I_{\min}$ ,  $I_{X_0} = I_{\max}$ )

- 12) Визначимо величину моментів інерції щодо головних центральних осей:

$$\begin{aligned} I_{\max}^{\min} &= \frac{I_{X_C} + I_{Y_C}}{2} \pm \frac{\sqrt{(I_{X_C} - I_{Y_C})^2 + 4(I_{X_C Y_C})^2}}{2}, \\ I_{\max}^{\min} &= \frac{4373,7 + 871,4}{2} \pm \frac{\sqrt{(4373,7 - 871,4)^2 + 4 \cdot 165,9^2}}{2} = 2622,55 \pm 1759 \text{ см}^4. \end{aligned}$$

Тоді:

$$I_{\max} = 4381,55 \text{ см}^4 = I_{X_0},$$

$$I_{\min} = 863,55 \text{ см}^4 = I_{Y_0}.$$

Перевірка:

$$\begin{aligned} I_{\max} + I_{\min} &= I_{X_C} + I_{Y_C} \\ 4381,55 + 863,55 &= 4373,7 + 871,4 \\ 5245,1 &= 5245,1 \end{aligned}$$

(Можна помітити, що формула для визначення  $I_{\max}^{\min}$  аналогічна формулі

для визначення головних напружень  $\sigma_{\max}^{\min}$  при плоскому напруженому

стані.)

### КОНТРОЛЬНІ ПИТАННЯ

1. Види геометричних характеристик перерізів і їхні одиниці виміру.
2. Що називають головними моментами інерції перерізу?
3. Які осі називають головними?
4. Які осі називають центральними?
5. Правило знаків для кута  $\alpha_0$ .
6. Правило знаків для відцентрового моменту інерції перерізу.
7. Формули для визначення статичних моментів перерізу. Які величини в них входять?
8. Формули паралельного переносу. Які величини в них входять?
9. Формули для визначення осьових моментів опору перерізу. Які величини в них входять?

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Тема № 5. Зсув, зминання та кручення.

#### Практичне заняття №8: Зсув, зминання та кручення.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: зминання, кручення), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

Кручення. Побудова епюри крутних моментів. Визначення кутів закручування.

Література: 1, 2, 3 (с. 168 – 193)

### План проведення заняття:

#### I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

#### II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Кручення* – простий вид деформації, при якому в поперечному перерізі вала виникає тільки одне внутрішнє зусилля  $M_{кр}$  (*крутний момент*).

Крутний момент у поперечному перерізі виникає під дією зовнішнього зусилля *закручувального моменту*.

*Правило знаків закручувального моменту:*

- $M_{зак}$  – позитивний, якщо при погляді в торець відсіченої частини

- бруса він спрямований проти годинної стрілки;  
 -  $M_{ЗАК}$  – негативний, якщо при погляді в торець відсіченої частини бруса він спрямований по годинній стрілці.

*Умова міцності при крученні:*

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

- де  $\tau_{max}$  – максимальне дотичне напруження, [Па];  
 $M_{KP}$  – крутний момент, [Н м];  
 $[\tau]$  – допускне дотичне напруження при крученні, [Па];  
 $W_P$  – полярний момент опору перерізу, [м<sup>3</sup>].

*Повний кут закруту (абсолютна деформація при крученні):*

$$\phi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P},$$

- де  $M_{KP}$  – крутний момент, [Н м];  
 $l$  – довжина ділянки, [м];  
 $G$  – модуль пружності 2-го роду (модуль зсуву), [Па];  
 $I_P$  – полярний момент інерції перерізу, [м<sup>4</sup>].

*Відносний кут закруту:*

$$\theta = \frac{\phi}{l},$$

- де  $\phi$  – повний кут закруту, [рад];  
 $l$  – довжина ділянки, [м].

*Умова жорсткості при крученні:*

$$\theta_{max} = \frac{M_{KP}}{GI_P} \leq [\theta],$$

- де  $\theta_{max}$  – максимальний відносний кут закруту,  $\left[ \frac{рад}{м} \right]$ ;  
 $M_{KP}$  – крутний момент, [Н м];  
 $I_P$  – полярний момент інерції перерізу, [м<sup>4</sup>];  
 $G$  – модуль пружності 2-го роду (модуль зсуву), [Па];  
 $[\theta]$  – допускний відносний кут закруту,  $\left[ \frac{рад}{м} \right]$ .

*Стандартний ряд діаметрів, мм:*

15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 125, 140, 160, 180, 200.

*Правило перевірки епюри  $M_{KP}$ :*

Епюра  $M_{KP}$  перевіряється за розрахунковою схемою. Стрибки на епюрі  $M_{KP}$  повинні бути в тих перерізах, у яких на розрахунковій схемі прикладені закручувальні моменти. Довжина стрибка на епюрі повинна чисельно дорівнювати закручувальному моменту, прикладеному в цьому перерізі.

*Правило перевірки епюри  $\phi$ :*

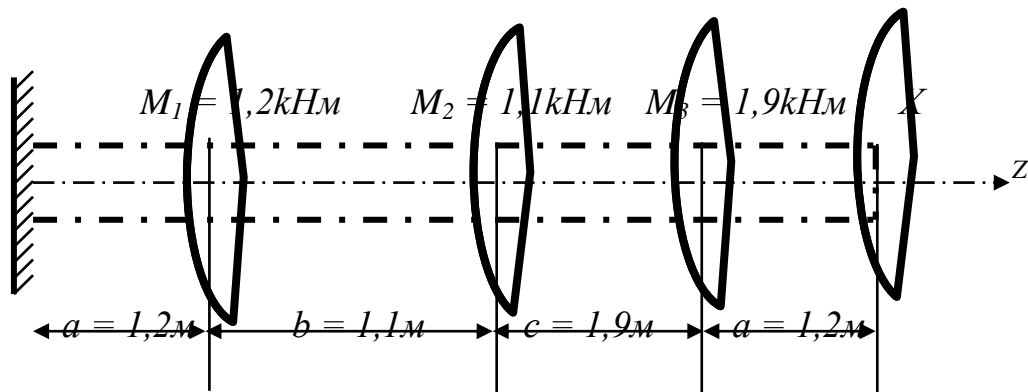
Епюра  $\varphi$  перевіряється по епюрі  $M_{KP}$ . При русі ліворуч праворуч значення на епюрі  $\varphi$  зростають, якщо на епюрі  $M_{KP}$  знак «+», якщо на епюрі  $M_{KP}$  знак «-», то значення на епюрі  $\varphi$  зменшуються. Якщо на ділянці  $M_{KP} = 0$ , то  $\varphi$  не змінюється.

### Задача:

До сталевого вала прикладені три відомих закручувальних моменти:  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$ . Необхідно:

- 1) установити при якому значенні моменту  $X$  кут повороту правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю;
- 2) для знайденого значення  $X$  побудувати епюру крутних моментів;
- 3) при заданому значенні  $[\tau]$  визначити діаметр вала з розрахунку на міцність і округлити його значення до найближчого рівного: 30, 35, 40, 45, 50, 60, 70, 80, 90, 100 мм;
- 4) побудувати епюру кутів закруту;
- 5) знайти найбільший відносний кут закруту (на 1 м).

Прийняти:  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 40 \text{ МПа}$ ,



### Розв'язання:

- 1) Позначимо характерні перерізи (А, В, С, D, Е) і пронумеруємо ділянки (I, II, III, IV).
- 2) Визначимо при якому значенні моменту  $X$  кут повороту правого кінцевого перерізу вала дорівнює нулю.

Кут закруту на окремій ділянці можна визначити по формулі:

$$\phi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P} \quad . \quad )$$

Кут повороту правого кінцевого перетину Е вала визначимо як алгебраїчну суму кутів закруту ділянок, розташованих між розглянутим перетином Е и нерухомим перетином А. За умовою задачі кут повороту правого кінцевого перетину вала дорівнює нулю. Тоді одержимо:

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = 0.$$

З урахуванням формули рівняння прийме вид:

$$\frac{M_{кр1}l_1}{GI_p} + \frac{M_{кр2}l_2}{GI_p} + \frac{M_{кр3}l_3}{GI_p} + \frac{M_{кр4}l_4}{GI_p} = 0.$$

Помножимо дві частини рівняння на  $GI_p$ , тоді одержимо

$$M_{кр1}l_1 + M_{кр2}l_2 + M_{кр3}l_3 + M_{кр4}l_4 = 0.$$

Користуючись методом перерізів, запишемо вираження для визначення крутних моментів на кожній ділянці

Ділянка AB:

Думкою розсічемо вал на ділянці AB. Відкинемо частину з твердим закріпленням, щоб не враховувати опорні реакції, що там виникають. Для вільної частини вала, що залишилася, визначимо крутний момент, який дорівнює сумі закручувальних моментів, прикладених до залишеної частини. Напрямок (знаки) крутних моментів, будемо визначати при погляді в торець відсіченої частини (рис. 5).

$$M_{кр1} = -M_1 + M_2 - M_3 + X$$

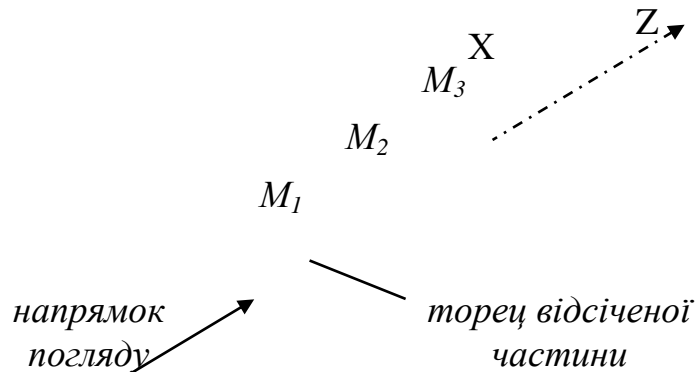


Рис. 5 Визначення крутних моментів методом перерізів

Ділянка BC:

Знову скористаємося методом перерізів як на ділянці AB.

$$M_{кр2} = +M_2 - M_3 + X.$$

Ділянка CD:

$$M_{кр3} = -M_3 + X.$$

Ділянка DE:

$$M_{KP4} = + X.$$

Запишемо вираження (4.3) з урахуванням крутних моментів:

$$(X - M_3 + M_2 - M_1) \cdot l_1 + (X - M_3 + M_2) \cdot l_2 + (X - M_3) \cdot l_3 + X \cdot l_4 = 0, \quad (4.4)$$

де  $l_1=a=1,2$  м;  $l_2=b=1,1$  м;  $l_3=z=1,9$  м;  $l_4=a=1,2$  м.

Вирішимо рівняння (4), підставивши в нього значення закручувальних моментів і довжин ділянок. Одержимо  $X=1,276$  кНм.

Підставивши  $X=1,276$  кНм у вираження для визначення крутних моментів, визначимо їх величину по кожній ділянці.

Ділянка АВ:  $M_{KP1} = -M_1 + M_2 - M_3 + X = -1,2 + 1,1 - 1,9 + 1,276 = -0,724$  кНм.

Ділянка ВР:  $M_{KP2} = +M_2 - M_3 + X = 1,1 - 1,9 + 1,276 = 0,476$  кНм.

Ділянка CD:  $M_{KP3} = -M_3 + X = -1,9 + 1,276 = -0,624$  кНм.

Ділянка DE:  $M_{KP4} = +X = 1,276$  кНм.

3) За отриманими результатами побудуємо епюру крутних моментів  $M_{KP}$  (рис. 6).

Вісь епюри паралельна осі вала. На осі епюри значення  $M_{KP}$  дорівнюють нулю. Позитивні значення відкладемо нагору від осі, негативні – вниз. На епюрі необхідно показати знаки і заштрихувати її перпендикулярно осі.

(Епюру  $M_{KP}$  легко перевірити за розрахунковою схемою. На вільний край вала діє зовнішній закручувальний момент,  $X = 1,276$  кНм, тому на епюрі в перерізі Е виникає стрибок довжиною 1,276. У перерізі D прикладений зовнішній закручувальний момент,  $M_3 = 1,9$  кНм, тому на епюрі виникає стрибок довжиною  $1,276 - (-0,624) = 1,9$ . У перерізі С прикладений  $M_2 = 1,1$  кНм – на епюрі стрибок довжиною 1,1. У перерізі В прикладений  $M_1 = 1,2$  кНм – на епюрі стрибок довжиною 1,2. Стрибок у перерізі А довжиною 0,724 викликаний дією реактивного моменту, який виникає у жорсткому закріпленні і рівний відповідно 0,724 кНм.)

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Тема № 5. Зсув, зминання та кручення.

#### Практичне заняття №9: Зсув, зминання та кручення.

**Навчальна мета заняття:** поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: зминання, кручення), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

**Навчальні питання:**

Кручення. Побудова епюри крутних моментів. Визначення кутів закручування.

Література: 1, 2, 3 (с. 168 – 193)

**План проведення заняття:****I. Порядок проведення вступу до заняття.**

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II. Порядок проведення основної частини заняття:** постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

4) Визначимо діаметр валу з умови міцності при крученні:

5)

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau],$$

де  $\tau_{max}$  - максимальне дотичне напруження, [Па];

$M_{KP}$  - крутний момент, [Н м];

$[\tau]$  - допуске дотичне напруження при крученні, [Па];

$W_P$  - полярний момент опору перерізу, [м<sup>3</sup>].

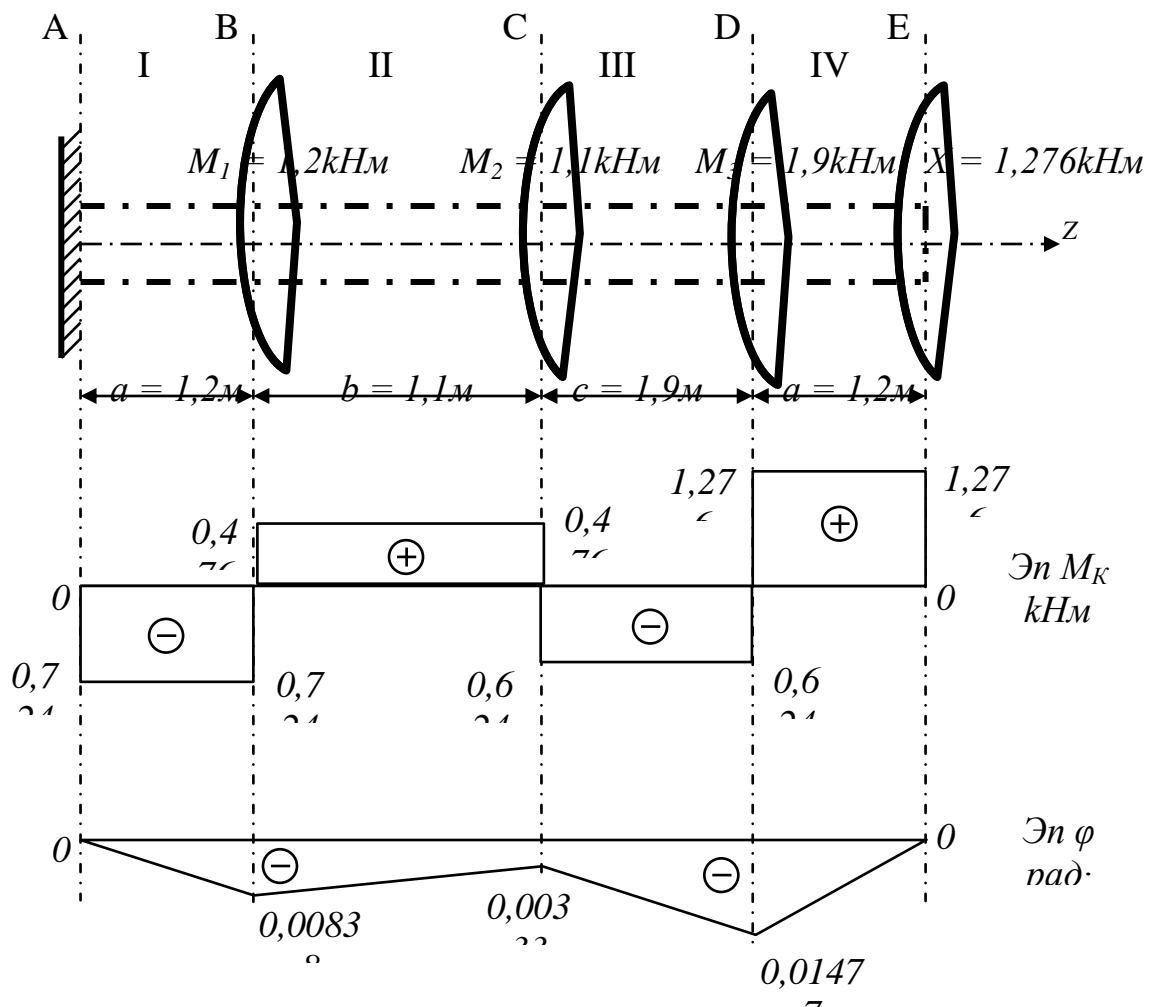




Рис. 6 Побудова епюр крутних моментів і кутів повороту перерізів

Для круглого перерізу  $W_P = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ , де  $d$  – діаметр вала, тоді

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{0,2d^3} \leq [\tau]$$

Тоді з умови міцності діаметр поперечного перерізу вала можна визначити по формулі:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KP}}{0,2[\tau]}}$$

Для визначення діаметра вала підставимо у формулу максимальний (по модулю) крутний момент

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KP4}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,276 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0,054 \text{ м} = 54 \text{ мм}$$

Отриману величину діаметра необхідно округлити до найближчого більшого значення зі стандартного ряду діаметрів. Тоді прийmemo  $d = 60 \text{ мм}$ .

б) Визначимо діаметр вала з умови міцності при крученні:

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{W_P} \leq [\tau]$$

де  $\tau_{max}$  – максимальне дотичне напруження, [Па];

$M_{KP}$  – крутний момент, [Н м];

$[\tau]$  – допускане дотичне напруження при крученні, [Па];

$W_P$  – полярний момент опору перерізу, [м<sup>3</sup>].

Для круглого перерізу  $W_P = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3$ , де  $d$  – діаметр вала, тоді

$$\tau_{max} = \frac{M_{KP}}{0,2d^3} \leq [\tau]$$

Тоді з умови міцності діаметр поперечного перерізу вала можна визначити по формулі:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KP}}{0,2[\tau]}}$$

Для визначення діаметра вала підставимо у формулу максимальний (по модулю) крутний момент

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_{KP4}}{0,2[\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{1,276 \cdot 10^3}{0,2 \cdot 40 \cdot 10^6}} = 0,054 \text{ м} = 54 \text{ мм}$$

Отриману величину діаметра необхідно округлити до найближчого більшого значення зі стандартного ряду діаметрів. Тоді приймемо  $d = 60 \text{ мм}$ .

7) Визначимо величину повних кутів закруту на кожній ділянці валу:

$$\phi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot I_P},$$

де  $M_{KP}$  - крутний момент, [ $\text{Н м}$ ];

$l$  - довжина ділянки, [ $\text{м}$ ];

$G$  - модуль пружності 2-го роду (модуль зсуву), [ $\text{Па}$ ];

$I_P$  - полярний момент інерції перерізу, [ $\text{м}^4$ ];

Для круглого перетину  $I_P = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ , де  $d$  – діаметр валу, то

$$\phi = \frac{M_{KP} \cdot l}{G \cdot 0,1d^4}.$$

Ділянка AB:

$$\phi_1 = \frac{M_{KP}^I \cdot a}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{-0,724 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1(60 \cdot 10^{-3})^4} = -0,00838 \text{ рад}.$$

Ділянка BC:

$$\phi_2 = \frac{M_{KP}^{II} \cdot b}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{0,476 \cdot 10^3 \cdot 1,1}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1(60 \cdot 10^{-3})^4} = 0,00505 \text{ рад}.$$

Ділянка CD:

$$\phi_3 = \frac{M_{KP}^{III} \cdot c}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{-0,624 \cdot 10^3 \cdot 1,9}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1(60 \cdot 10^{-3})^4} = -0,001144 \text{ рад}.$$

Ділянка DE:

$$\phi_4 = \frac{M_{KP}^{IV} \cdot a}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{1,276 \cdot 10^3 \cdot 1,2}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1(60 \cdot 10^{-3})^4} = 0,01477 \text{ рад}.$$

8) Визначимо кути повороту характерних перерізів валу:

Переріз  $A$  - жорстко закріплений, тому він не повертається:

$$\varphi_A = 0.$$

Між нерухомим перерізом  $A$  і перерізом  $B$  розташована перша ділянка, значить кут повороту перетину  $B$  дорівнює куту закручування ділянки  $AB$ :

$$\varphi_B = \varphi_1 = -0,00838 \text{ рад}.$$

Між нерухомим перерізом  $A$  і перерізом  $C$  розташовані перша і друга ділянки, таким чином кут повороту перерізу  $C$  дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування ділянок  $AB$  і  $BC$  (з урахуванням знаку):

$$\varphi_C = \varphi_1 + \varphi_2 = -0,00838 + 0,00505 = -0,00333 \text{ рад}.$$

Між нерухомим перерізом  $A$  и перерізом  $D$  розташовані перша, друга і третя ділянки, таким чином кут повороту перетину  $D$  дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування ділянок  $AB$ ,  $BC$  і  $CD$  (з урахуванням знаку):

$$\varphi_D = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = -0,00838 + 0,00505 - 0,01144 = -0,01477 \text{ рад.}$$

Поворот вільного краю  $E$  буде дорівнює алгебраїчній сумі кутів закручування всіх ділянок валу:

$$\varphi_E = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 = -0,00838 + 0,00505 - 0,01144 + 0,01477 = 0 \text{ рад}$$

9) За отриманими результатами побудуємо епюру кутів закруту  $\varphi$ .

Вісь епюри паралельна осі валу. На осі епюри значення  $\varphi$  дорівнюють нулю. Позитивні значення відкладемо нагору від осі, негативні – униз. На епюрі необхідно показати знаки і заштрихувати її перпендикулярно осі.

(Епюру  $\varphi$  легко перевірити по епюрі  $M_{KP}$ , рухаючи ліворуч праворуч. На ділянці  $AB$  на епюрі  $M_{KP}$  знак «-», тому значення  $\varphi$  зменшуються (з 0 до -0,00838). На ділянці  $BC$   $M_{KP} > 0$ , тому значення  $\varphi$  збільшуються (з -0,00838 до -0,00333). На ділянці  $CD$   $M_{KP} < 0$ , тому значення  $\varphi$  зменшуються (від -0,00333 до -0,01477) і на ділянці  $DE$  на епюрі  $M_{KP}$  знак «+», тому значення  $\varphi$  ростуть (з -0,01477 до 0).

10) Визначимо величину відносного кута закруту:

$$\theta_{max} = \frac{M_{KP}^{max}}{GI_P} \leq [\theta],$$

де  $\theta_{max}$  - максимальний відносний кут закруту,  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]$ ;

$[\theta]$  - допускний відносний кут закруту,  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{м}} \right]$ ;

$M_{KP}$  - крутний момент,  $[\text{Н м}]$ ;

$G$  - модуль пружності 2-го роду (модуль зсуву),  $[\text{Па}]$ ;

$I_P$  - полярний момент інерції перерізу,  $[\text{м}^4]$ ;

Для круглого перерізу  $I_P = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4$ , де  $d$  – діаметр валу, тоді

$$\theta_{max} = \frac{M_{KP}}{G \cdot 0,1d^4} \leq [\theta],$$

$$\theta_{max} = \frac{M_{KP}^{max}}{G \cdot 0,1d^4} = \frac{1,276 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot 0,1 \cdot 0,06^4} = 0,012 \frac{\text{рад}}{\text{м}}.$$

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

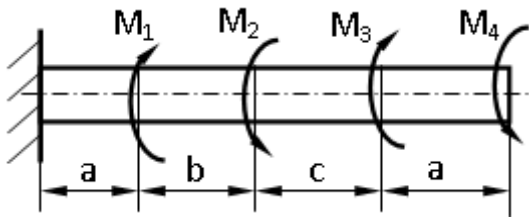
Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

**Індивідуальні завдання:**

Розв'язати задачу за індивідуальним варіантом. Номер варіанта обрати за номером за списком у журналі

Для заданого валу, постійного поперечного перерізу:

- 1) побудувати епюри крутильних моментів;
- 2) визначити діаметр небезпечної ділянки валу із умов міцності і жорсткості;
- 3) побудувати епюру відносних кутів закручування;
- 4) побудувати епюру кутів закручування.

**1 варіант**

Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4$  МПа

Допустимі напруження  $[\tau]=20$  МПа

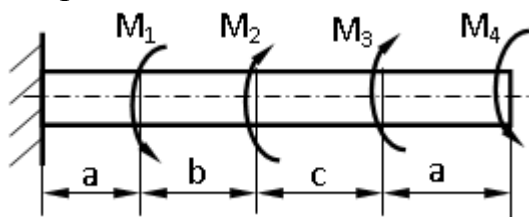
Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$M_1=1,7$  кН  $a=0,8$  м

$M_2=1,4$  кН  $b=1$  м

$M_3=0$  кН  $c=1,5$  м

$M_4=1,2$  кН

**2 варіант**

Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4$  МПа

Допустимі напруження  $[\tau]=20$  МПа

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

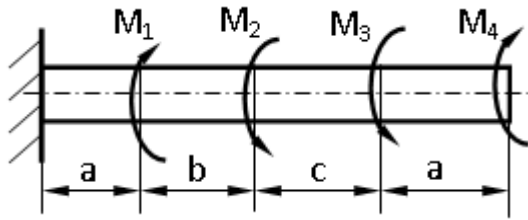
$M_1=1,8$  кН  $a=0,8$  м

$M_2=1,3$  кН  $b=1$  м

$M_3=1,2$  кН  $c=1,5$  м

$M_4=0$  кН

**3 варіант**



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$M_1=1,9 \text{ кН}$

$a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,2 \text{ кН}$

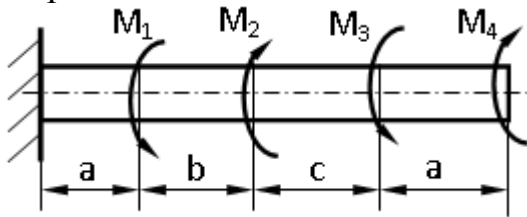
$b=1 \text{ м}$

$M_3=0 \text{ кН}$

$c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,5 \text{ кН}$

4 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$M_1=2 \text{ кН}$

$a=0,8 \text{ м}$

$M_2=0 \text{ кН}$

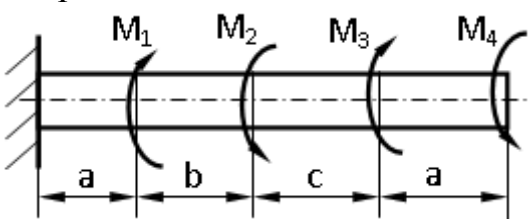
$b=1 \text{ м}$

$M_3=1,4 \text{ кН}$

$c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,6 \text{ кН}$

5 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$M_1=1,8 \text{ кН}$

$a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,3 \text{ кН}$

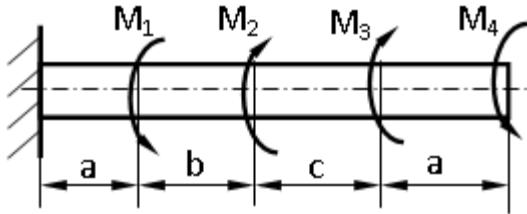
$b=1 \text{ м}$

$M_3=1,2 \text{ кН}$

$c=1,5 \text{ м}$

$$M_4 = 0 \text{ кН}$$

6 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$$M_1 = 1,7 \text{ кН}$$

$$a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,4 \text{ кН}$$

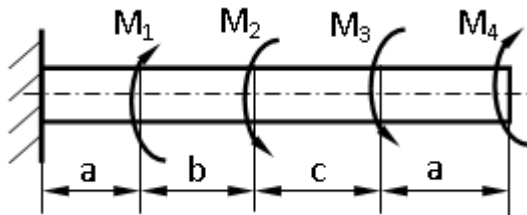
$$b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 0 \text{ кН}$$

$$c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,2 \text{ кН}$$

7 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$$M_1 = 2 \text{ кН}$$

$$a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 0 \text{ кН}$$

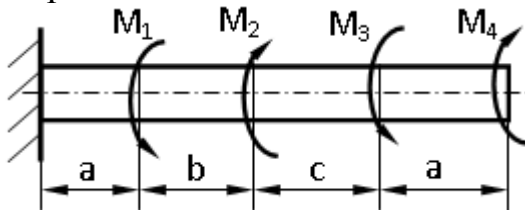
$$b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,4 \text{ кН}$$

$$c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,6 \text{ кН}$$

8 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

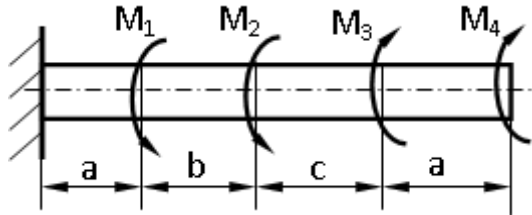
$M_1=1,9 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,2 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=0 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,5 \text{ кН}$

9 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

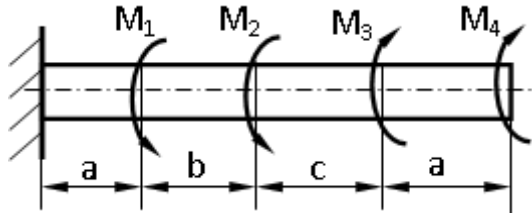
$M_1=1,2 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,9 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=0 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,9 \text{ кН}$

10 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

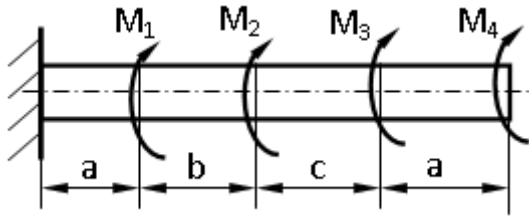
$M_1=0 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

$M_2=2 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=1,5 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,8 \text{ кН}$

11 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

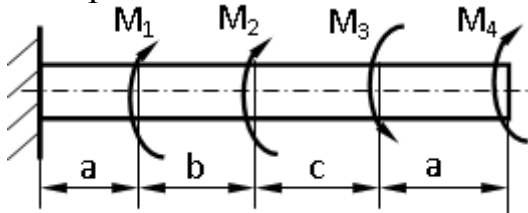
$M_1=1,2 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,9 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=0 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,9 \text{ кН}$

12 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

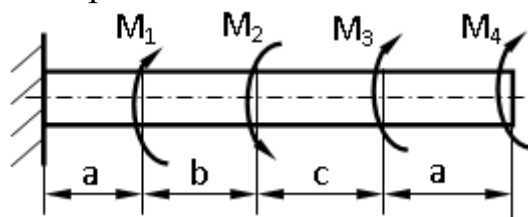
$M_1=0 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

$M_2=1,8 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=1,7 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=2 \text{ кН}$

13 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$M_1=1,4 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$

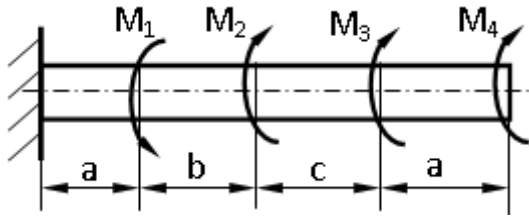
$M_2=1,7 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$

$M_3=0 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$M_4=1,7 \text{ кН}$



## 14 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4$  МПа

Допустимі напруження  $[\tau]=20$  МПа

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

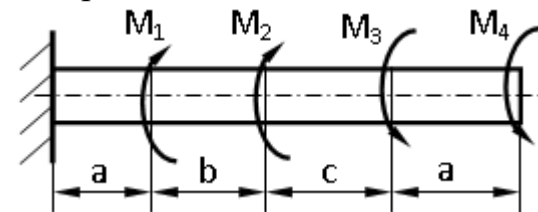
$M_1=1,5$  кН  $a=0,8$  м

$M_2=1,6$  кН  $b=1$  м

$M_3=1,9$  кН  $c=1,5$  м

$M_4=0$  кН

## 15 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4$  МПа

Допустимі напруження  $[\tau]=20$  МПа

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

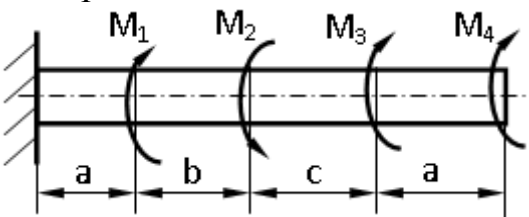
$M_1=1,6$  кН  $a=0,8$  м

$M_2=0$  кН  $b=1$  м

$M_3=2$  кН  $c=1,5$  м

$M_4=1,2$  кН

## 16 варіант



Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4$  МПа

Допустимі напруження  $[\tau]=20$  МПа

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

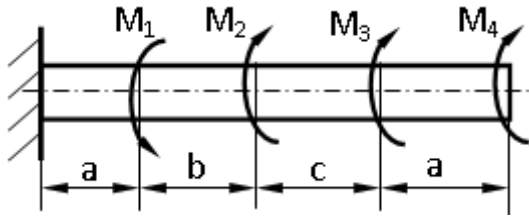
$M_1=1,4$  кН  $a=0,8$  м

$M_2=1,7$  кН  $b=1$  м

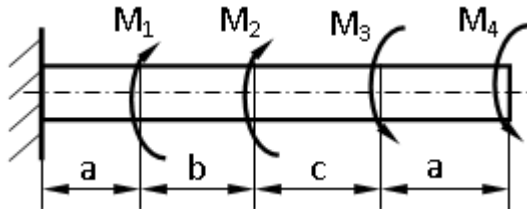
$M_3=0$  кН  $c=1,5$  м

$M_4=1,7$  кН

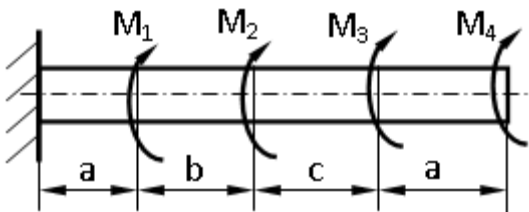
17 варіант

Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$  $M_1=1,6 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$  $M_2=0 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$  $M_3=2 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$  $M_4=1,2 \text{ кН}$ 

18 варіант

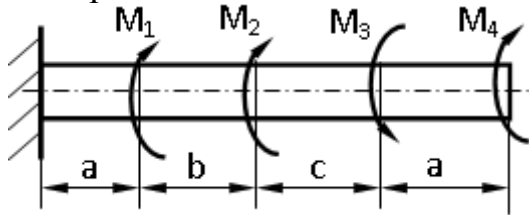
Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$  $M_1=1,5 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$  $M_2=1,6 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$  $M_3=1,9 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$  $M_4=0 \text{ кН}$ 

19 варіант

Жорсткість при крученні  $G=8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau]=20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta]=\pi/(4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$  $M_1=0 \text{ кН}$   $a=0,8 \text{ м}$  $M_2=2 \text{ кН}$   $b=1 \text{ м}$  $M_3=1,5 \text{ кН}$   $c=1,5 \text{ м}$

$$M_4 = 1,8 \text{ кН}$$

20 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

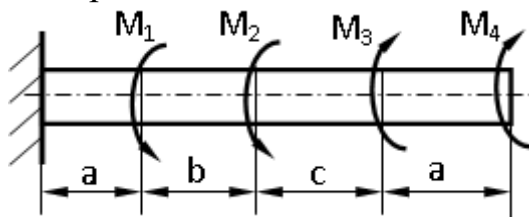
$M_1 = 0 \text{ кН}$   $a = 0,8 \text{ м}$

$M_2 = 1,8 \text{ кН}$   $b = 1 \text{ м}$

$M_3 = 1,7 \text{ кН}$   $c = 1,5 \text{ м}$

$M_4 = 2 \text{ кН}$

21 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

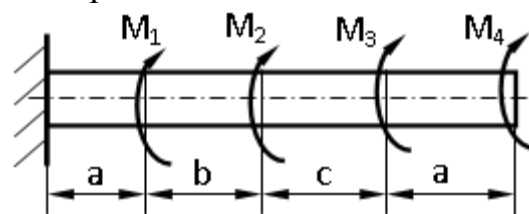
$M_1 = 0 \text{ кН}$   $a = 0,8 \text{ м}$

$M_2 = 2 \text{ кН}$   $b = 1 \text{ м}$

$M_3 = 1,5 \text{ кН}$   $c = 1,5 \text{ м}$

$M_4 = 1,8 \text{ кН}$

22 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

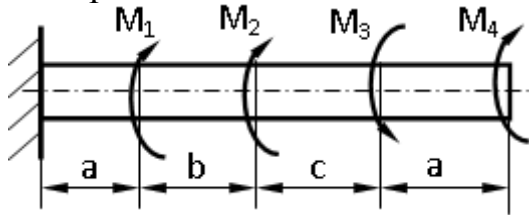
$M_1 = 1,2 \text{ кН}$   $a = 0,8 \text{ м}$

$M_2 = 1,9 \text{ кН}$   $b = 1 \text{ м}$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,9 \text{ кН}$$

23 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

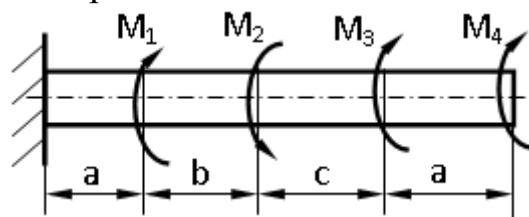
$$M_1 = 0 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,8 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,7 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 2 \text{ кН}$$

24 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

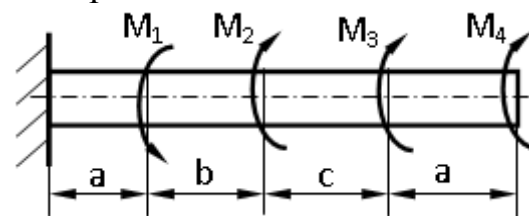
$$M_1 = 1,4 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,7 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,7 \text{ кН}$$

25 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

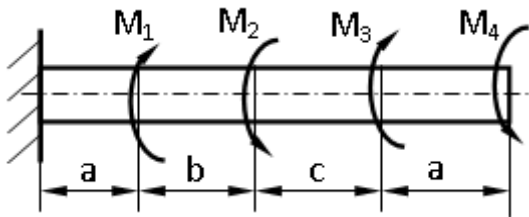
$$M_1 = 1,5 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,6 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,9 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 0 \text{ кН}$$

26 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

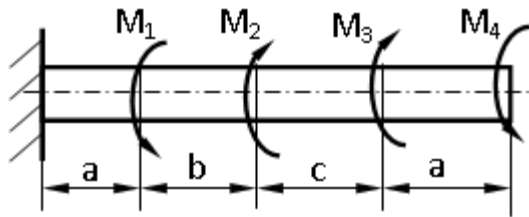
$$M_1 = 1,7 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,4 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,2 \text{ кН}$$

27 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

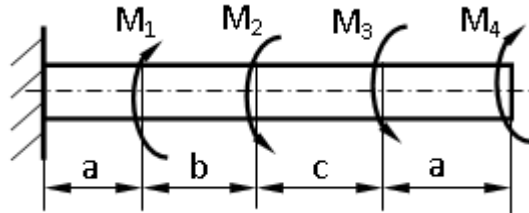
$$M_1 = 1,8 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,3 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,2 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 0 \text{ кН}$$

28 варіант

Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$ Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$ Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$ 

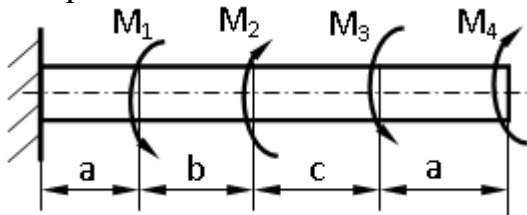
$$M_1 = 1,9 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,2 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 0 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,5 \text{ кН}$$

29 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

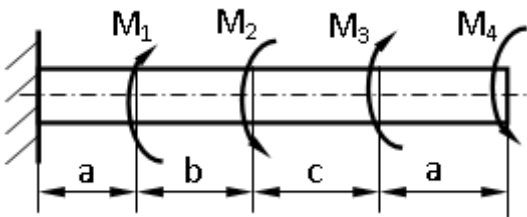
$$M_1 = 2 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 0 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,4 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 1,6 \text{ кН}$$

30 варіант



Жорсткість при крученні  $G = 8 \cdot 10^4 \text{ МПа}$

Допустимі напруження  $[\tau] = 20 \text{ МПа}$

Допустимий відносний кут закручування  $[\theta] = \pi / (4 \cdot 180) \text{ м}^{-1}$

$$M_1 = 1,8 \text{ кН} \quad a = 0,8 \text{ м}$$

$$M_2 = 1,3 \text{ кН} \quad b = 1 \text{ м}$$

$$M_3 = 1,2 \text{ кН} \quad c = 1,5 \text{ м}$$

$$M_4 = 0 \text{ кН}$$

#### Перелік питань для самоконтролю:

- 1 Крутні моменти: визначення, правило знаків?
- 2 Кутова деформація стержня?
- 3 Полярний момент перерізу?
- 4 Умови міцності та жорсткості?

**Тема № 5. Зсув, зминання та кручення.**

**Практичне заняття №10: Зсув, зминання та кручення.**

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: зминання, кручення), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

**Навчальні питання:** Умова міцності на зріз та зминання.

Література: 1, 2, 3 (с. 168 – 193)

### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

Деталі, які використовуються для з'єднання окремих елементів конструкцій, - заклепки, штифти, болти, шпонки і т.п. – у багатьох випадках сприймають навантаження, перпендикулярні до їх поздовжньої осі.

Поперечне навантаження в указаних деталях виникає, наприклад, при розтягу (стиску) з'єднаних елементів. Відповідні приклади наведені на рис.7: а – штифт; б – заклепка; в – болт, щільно вставлений в отвори деталей; г – шпонка.

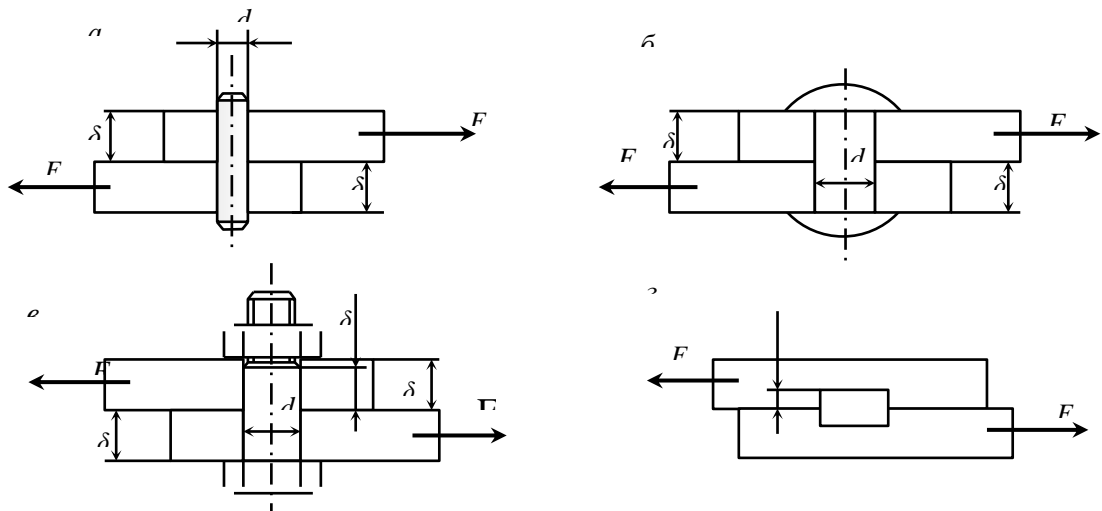


Рис 75

Справжні умови роботи цих деталей складні і багато в чому залежать від технології виготовлення окремих елементів конструкції і її збирання. Практичні розрахунки їх носять вельми умовний характер і базуються на таких основних припущеннях:

1. У поперечних перерізах виникає тільки один внутрішній силовий фактор – поперечна сила  $Q$ ;

2. Дотичні напруження у поперечних перерізах розподіляються рівномірно по його площі;

3. У випадку якщо з'єднання здійснено декількома однаковими деталями (болтами і т.п.), приймається, що всі вони навантажені однаково.

Руйнування з'єднуючих елементів (у випадку недостатньої міцності) відбувається в результаті їх зрізу по площині, співпадаючій з поверхнею співдотику з'єднаних деталей (рис. 7). Тому говорять, що ці елементи працюють на зріз, і виникаючі в їх поперечному перерізі дотичні напруження також називають напруженнями зрізу і позначають  $\tau_{зр}$ . На основі сформульованих вище припущень одержуємо таку умову міцності на зріз:

$$\tau_{зр} = Q / A_{зр} \leq \tau_{adm}^{зр}, \quad (5.9)$$

де  $\tau_{adm}^{зр}$  - допустиме напруження на зріз;  $A_{зр}$  - площа перерізу одного болта, заклепки і т.п.;  $Q$  - поперечна сила на один болт, заклепку і т.п.; при декількох однакових з'єднуючих деталей  $Q = F / i$  ( $F$  - загальне навантаження на з'єднання,  $i$  - число болтів, заклепок і т.п.).

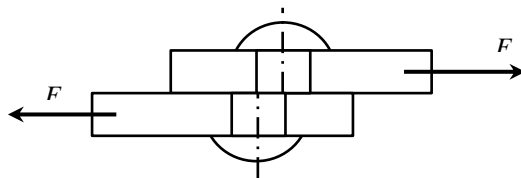


Рис. 8

Допустиме напруження залежить від матеріалу з'єднуючих елементів і умов роботи конструкції. В машинобудуванні при розрахунках штифтів, болтів, шпонок і т.д.

приймають  $\tau_{adm}^{зр} = (0,25 \dots 0,35) \sigma_y$ , де  $\sigma_y$  - границя текучості матеріалу штифта,

болта та ін.

Формула (5.9) служить для перевірочних розрахунків з'єднань. У залежності від умов задачі вона може бути перетворена для визначення допустимого навантаження або потрібної площі перерізу (проектний розрахунок).

Розрахунок на зріз забезпечує міцність з'єднуючих елементів, але не гарантує надійності конструкції в цілому. Якщо товщина з'єднаних елементів недостатня, то стиснення, що виникає між стінками їх отворів і з'єднуючими деталями, стає недопустимо великим. В результаті стінки отворів зминаються і з'єднання становиться ненадійним

Тиск, виникаючий між поверхнями отворів і з'єднувальних деталей, прийнято називати напруженнями зминання і позначати  $\sigma_{con}$ . Розподіл напружень зминання на поверхні контакту деталей вельми неозначене і в значній мірі залежить від щілини (у ненавантаженому стані між стінками отвору і болтом, заклепкою та ін.).

Розрахунок на зминання носить умовний характер і проводиться за припущенням, що сили взаємодії між деталями рівномірно розподілені поверхнею контакту і у всіх точках нормальні до цієї поверхні.

Відповідна розрахункова формула має вигляд

$$\sigma_{con} = F / (i A_{con}) \leq \sigma_{adm}^{con}, \quad (5.10)$$



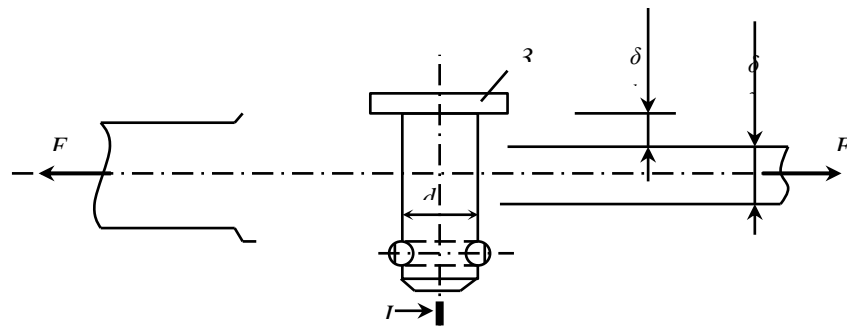
де  $F/i$  – навантаження на одну з'єднуючу деталь;  $A_{con}$  – розрахункова площа зминання;  $\sigma_{adm}^{con}$  – допустиме напруження зминання.

В машинобудуванні для болтових, штифтових і шпонкових з'єднань приймають: для деталей з маловуглецевих сталей  $\sigma_{adm}^{con}=100\dots120\text{МПа}$ ; для деталей середньовуглецевих сталей  $\sigma_{adm}^{con}=140\dots170\text{МПа}$ ; для деталей з чавуну  $\sigma_{adm}^{con}=60\dots80\text{МПа}$ . Коли контактуючі деталі виготовлені з різних матеріалів, то в таких випадках при виборі допустимих напружень зминання орієнтуються на матеріал тієї деталі, міцність якої менша.

За розрахункову площу зминання при контакті по площині (див. рис. 5.5,г) приймають дійсну площу співдотику  $A_{con}=tl$ , де  $l$  – розмір шпонки в напрямі, перпендикулярному площині креслення, тобто її довжина; при контакті по циліндричній поверхні (див. рис. 5.5, а,б,в) приймають площу проекції поверхні контакту на діаметральну площину, тобто  $A_{con}=d\delta$  (при різній товщині з'єднаних деталей в розрахункову формулу слід підставляти  $\delta_{min}$ ).

У деяких конструкціях з'єднуючі деталі (штифти, шпонки) працюють на зріз по поздовжньому перерізу (див. рис. 7, г); методика розрахунку залишається такою ж, як і при зрізі по поперечному перерізі.

Наприклад. Тяги 1 і 2 з'єднані між собою за допомогою штиря 3, встановленого в їх провусини, і навантажені так, як показано на рис. 9. Визначити допустиму силу  $F$  при наступних значеннях допустимих напружень: на зминання  $\sigma_{adm}^{con}=100\text{МПа}$ , на зріз  $\tau_{adm}^{zp}=70\text{МПа}$ .



Розв'язання. 1. Визначаємо допустиме навантаження з умови міцності на зминання. Для тяги 1 розрахункова площа зминання  $A_{con}^I = 2\delta_1 d = 2 \cdot 8 \cdot 20 = 320 \text{ мм}^2$ , для тяги 2 -  $A_{con}^{II} = \delta_2 d = 12 \cdot 20 = 240 \text{ мм}^2$ . Таким чином, достатньо провести розрахунок для більш навантаженої, тобто меншої площі зминання, провусини тяги 2:

$$F_{adm}^{con} = \sigma_{adm}^{con} A_{con}^{II} = 100 \cdot 240 = 24 \cdot 10^3 \text{ Н}.$$

2. Визначаємо допустиме навантаження з умови міцності штиря на зріз. Штир має дві площини зрізу, тому загальна площа зрізу буде:

$$A_{3p} = 2 \cdot \frac{\pi d^2}{4} = 2 \cdot \frac{3.14 \cdot 20^2}{4} = 628 \text{ мм}^2. \text{ Допустиме навантаження } F_{adm}^{3p} = \tau_{adm}^{3p} \cdot A_{3p} = 70 \cdot 628 = 44 \cdot 10^3 \text{ Н.}$$

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 6. Плоске згинання.

### Практичне заняття №11: Плоске згинання.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: згинання), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма), 2 (заочна форма).

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

1. Визначення поперечних сил та згинальних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

Література: 1, 2, 3 (с. 195-210)

### План проведення заняття:

#### I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

#### II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

При згинанні відбувається скривлення подовжньої осі бруса.

*Чисте згинання* (гнуття) – простий вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає тільки одне внутрішнє зусилля – *згинальний момент* ( $M_x$  чи  $M_y$ ).

*Поперечне згинання* (гнуття) – вид деформації, при якому в поперечному перерізі бруса виникає два внутрішні зусилля – *згинальний момент* ( $M_x$  чи  $M_y$ ) і *поперечна сила* ( $Q$ ).

Брус, що працює на гнуття називають *балкою*.

*Правило знаків згинаючого моменту:*

- якщо викликає стиск верхніх волокон балки – позитивний,
- якщо викликає стиск нижніх волокон балки – негативний.

(при позитивному згинальному моменті балка згинається опуклістю вниз, при негативному – опуклістю нагору)

*Правило знаків поперечної сили Q:*

-якщо прагне повернути елемент по годинній стрілці – позитивна,  
 -якщо прагне повернути елемент проти вартів стрілки – негативна.  
 (аналогічно правилу знаків для  $\tau$ , тому що  $Q$  є результатом дії дотичних напружень  $\tau$ )

*Нормальні напруги в довільній точці поперечного перерізу при гнутті:*

$$\sigma = - \frac{M_x}{I_x} \cdot y$$

де  $M_x$  - згинальний момент,  $[H \cdot m]$ ;  
 $I_x$  - осьовий момент інерції перетину,  $[m^4]$ ;  
 $y$  - відстань від нейтрального шару до даної точки,  $[m]$ .  
*Умова міцності при чистому згині:*

$$\sigma_{max} = \frac{M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{max}$  - максимальна нормальна напруга,  $[Па]$ ;  
 $[\sigma]$  - нормальна напруга, що допускається, при згині,  $[Па]$ ;  
 $M_x$  - згинальний момент,  $[H \cdot m]$ ;  
 $W_x$  - осьовий момент опору перерізу,  $[m^3]$ .

(цією же умовою міцності користаються при поперечному гнутті, тому прийнято вважати поперечне гнуття простим видом деформації)

*Формула Журавського:*

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^I}{b \cdot I_x}$$

де  $\tau$  - дотичні напруження в поперечному перерізі балки,  $[Па]$ ;  
 $Q_y$  - поперечна сила,  $[H]$ ;  
 $I_x$  - осьовий момент інерції перетину,  $[m^4]$ ;  
 $b$  - ширина поперечного перерізу в розглянутому волокні,  $[m]$ ;  
 $S_x^I$  - статичний момент частини поперечного перерізу, що відтина розглянутим волокном,  $[m^3]$ .

*Теорема Журавського:* перша похідна від згинаючого моменту по абсцисі  $z$  дорівнює поперечній силі.

$$Q = \frac{dM}{dz}$$

З теореми Журавського випливає, що при позитивній поперечній силі  $Q$ , значення на епюрі згинаючого моменту зростають (ліворуч праворуч), якщо  $Q$  негативна – убывають, якщо  $Q = 0$  – постійні. Зміна згинаючого моменту на ділянці дорівнює площі епюри  $Q$  на цій ділянці.

*Правило перевірки епюри  $Q_y$ :*

Епюра  $Q_y$  перевіряється ліворуч праворуч.

У перетинах де на балці прикладені зосереджені сили  $P$  на епюрі  $Q_y$  повинні бути стрибки рівні цим силам. На ділянках де на балці не діє розподілене навантаження  $q$  поперечна сила  $Q_y$  постійна. На ділянках де на балці прикладене розподілене навантаження  $q$  поперечна сила  $Q_y$  змінюється на величину рівнодіючого розподіленого навантаження.

*Правило перевірки епюри  $M_x$ :*

Епюра  $M_x$  перевіряється ліворуч праворуч.

У перетинах де на балці прикладені зосереджені моменти  $M$  на епюрі  $M_x$  повинні бути стрибки рівні цим моментам. На ділянках де на балці не діє розподілене навантаження  $q$  епюра згинаючого моменту  $M_x$  обмежена прямими.

На ділянках де на балці прикладене розподілене навантаження  $q$  епюра згинаючого моменту  $M_x$  обмежена параболою з опуклістю назустріч розподіленому навантаженню.

### Приклад:

Для заданої балки побудувати епюри внутрішніх зусиль. З умови міцності по нормальних напругах підібрати розміри круглого, прямокутного і двотаврового перетину балки. Порівняти вага двотаврової балки з вагою круглої і прямокутної балки. Для двотаврового перетину провести перевірку міцності по головних напругах і перевірку міцності на зріз.

$$\text{Прийняти: } [\sigma] = 160 \text{ МПа}, h = 2b, \gamma = 77 \frac{\text{кН}}{\text{м}^3}$$

### Розв'язання:

1. Позначимо характерні перетини і пронумеруємо ділянки. Визначимо довжину кожної ділянки окремо.

Покажемо реакції опор. Припустимо, що обидві опорні реакції ( $R_B$  і  $R_D$ ) спрямовані нагору.

2. Визначимо опорні реакції з умови рівноваги:

сума моментів усіх сил щодо точки опори повинна бути дорівнює нулю.

Розподілене навантаження будемо замінювати рівнодіючою зосередженою силою, рівної добутку інтенсивності розподіленого навантаження  $q$  на довжину по якій вона діє і прикладеної в центрі розподіленого навантаження.

$$\sum M_B = 0$$

Тоді

$$R_D = \frac{-2q \cdot \left(1,333 - \frac{b}{2}\right) + P \cdot 0,666 - M}{1,333} = \frac{-2 \cdot 11 \cdot (1,333 - 1) + 28 \cdot 0,666 - 9}{1,333} = 1,75 \text{ кН}$$

Позитивне значення реакції  $R_D$  указує на те, що ми угадали її напрямок (вона в дійсності спрямована нагору).

$$\sum M_D = 0$$

$$\sum M_D = 2q \cdot \left(\frac{b}{2} + 0,666\right) - R_B \cdot 1,333 + P \cdot 0,666 + M = 0$$

$$\sum M_B = 2q \cdot \left(1,333 - \frac{b}{2}\right) - P \cdot 0,666 + R_D \cdot 1,333 + M = 0$$

Тоді

$$R_B = \frac{2q \cdot \left(\frac{b}{2} + 0,666\right) + P \cdot 0,666 + M}{1,333} = \frac{2 \cdot 11 \cdot (1 + 0,666) + 28 \cdot 0,666 + 9}{1,333} = 48,25 \text{ kH}$$

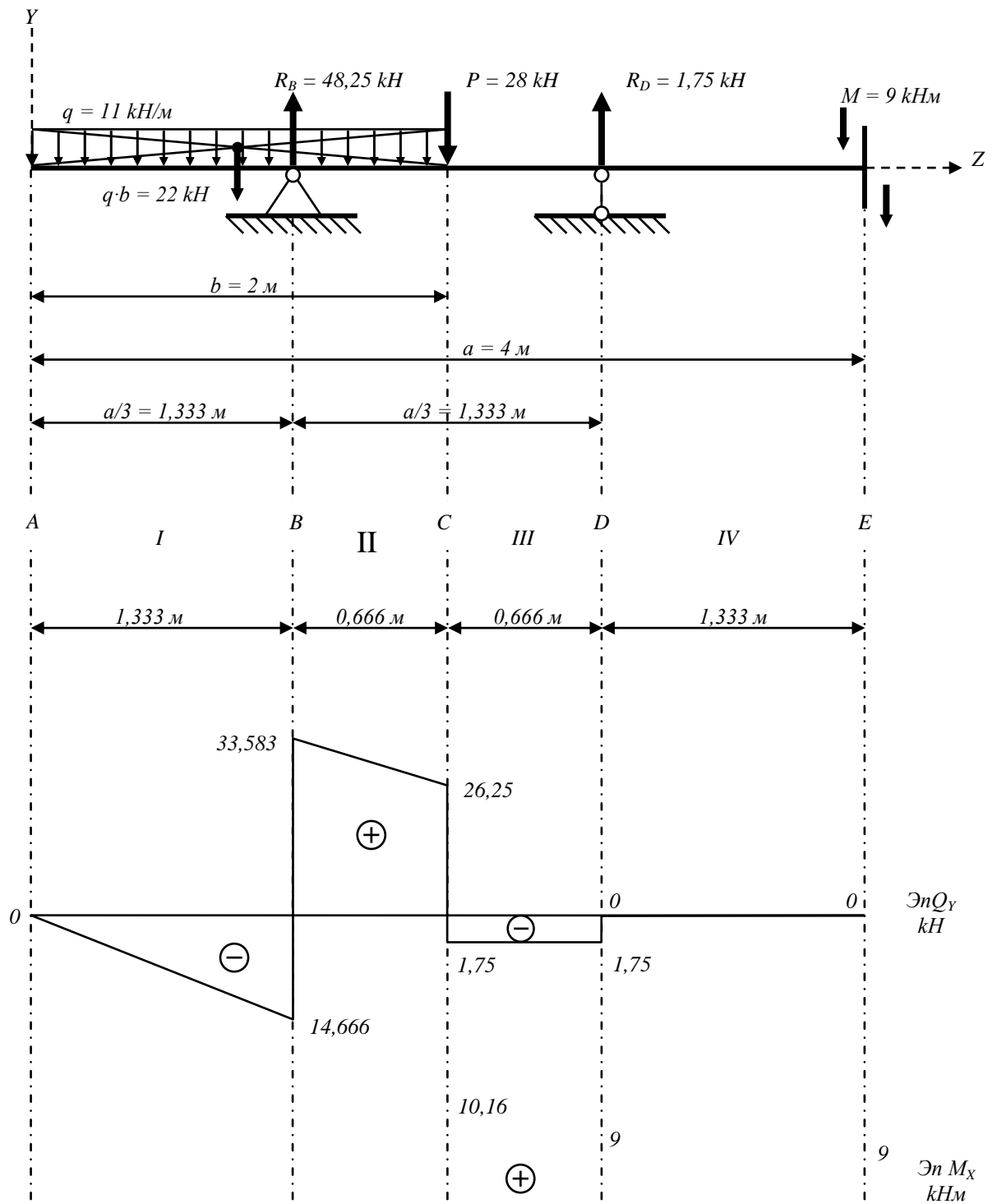
Позитивне значення реакції  $R_B$  указує на те, що ми угадали її напрямок (вона в дійсності спрямована нагору).

### Перевірка:

З умови рівноваги сума проекцій усіх сил на вертикальну вісь повинна бути дорівнює нулю.

$$\Sigma Y = -b \cdot q + R_B - P + R_D = -2 \cdot 11 + 48,25 - 28 + 1,75 = 0$$

Умова виконується, тобто опорні реакції визначені вірно.



### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

### Тема № 6. Плоске згинання.

#### Практичне заняття №12: Плоске згинання.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: згинання), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма).

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

2. Визначення поперечних сил та згинальних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

Література: 1, 2, 3 (с. 195-210)

#### План проведення заняття:

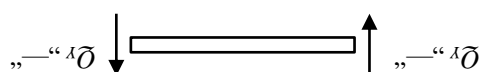
##### I. Порядок проведення вступу до заняття.

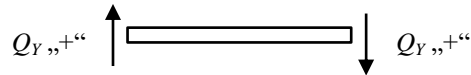
Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

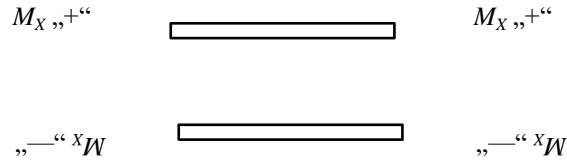
3. Визначимо внутрішні зусилля (поперечну силу  $Q_Y$  і згинальний момент  $M_X$ ) на кожній ділянці методом перетинів.

Т.к. поперечна сила  $Q_Y$  – результат дії дотичних напружень, тому прийнято вважати  $Q_Y$  позитивною, якщо вона прагне повернути елемент (відсічену частину) по годинній стрілці, негативної – якщо прагне повернути елемент (відсічену частину) проти вартовий стрілки.





Т.к. епюру згинаючого моменту  $M_x$  будують з боку стиснутого волокна балки, тому прийнято вважати  $M_x$  позитивним, якщо він викликає стиск верхніх волокон балки, негативним – якщо викликає стиск нижніх волокон балки.

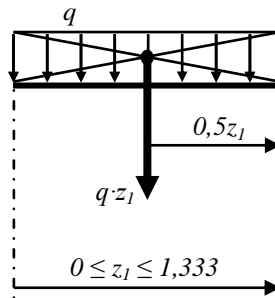


#### Ділянка AB:

Думкою розсічемо балку на ділянці  $AB$ . Відкинемо більш громіздку (праву) частина балки.

Для що залишилася (лівої) частини балки складемо два рівняння рівноваги:

- поперечна сила дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на вертикальну вісь зовнішніх сил прикладених до залишеної частини;
- згинальний момент дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх



сил (прикладених до залишеної частини) щодо центра ваги перетину.

$q$  – прагне повернути частину балки, що залишилася, щодо перетину проти вартовий стрілки

$$Q_y = -(q \cdot z_l) = -11 \cdot z_l$$

$q$  – викликає стиск нижніх волокон

$$M_x = - \left( q \cdot z_l \cdot \frac{z_l}{2} \right) = - \frac{q z_l^2}{2} = -5,5 \cdot z_l^2$$

при  $z_l = 0$  (у перетині  $A$ ):

$$Q_y = -11 \cdot 0 = 0$$

$$M_x = -5,5 \cdot 0 = 0$$

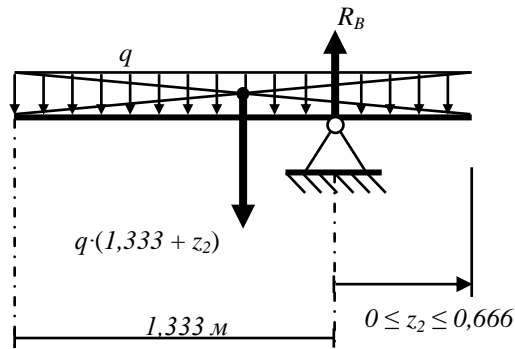
при  $z_l = 1,333 \text{ м}$  (у перетині  $B$ ):

$$Q_y = -11 \cdot 1,333 = -14,66 \text{ кН}$$

$$M_x = -5,5 \cdot 1,333^2 = -9,77 \text{ кНм}$$

#### Ділянка BP:

Думкою розсічемо балку на ділянці  $BP$ . Відкинемо більш громіздку (праву) частина балки.



$q$  – прагне повернути частину балки, що залишилася, проти вартвий стрілки щодо перетину

$R_B$  – прагне повернути частину балки, що залишилася, щодо перетину по годинній стрілці

$$Q_y = -q \cdot (1,333 + z_2) + R_B = -11 \cdot (1,333 + z_2) + 48,25 = 33,58 - 11 \cdot z_2$$

$q$  – викликає стиск нижніх волокон

$R_B$  – викликає стиск верхніх волокон

$$M_x = -\frac{q \cdot (1,333 + z_2)^2}{2} + R_B \cdot z_2 = -5,5 \cdot (1,333 + z_2)^2 + 48,25 z_2$$

при  $z_2 = 0$  (у перетині  $B$ ):

$$Q_y = 33,58 - 11 \cdot 0 = 33,58 \text{ кН}$$

$$M_x = -5,5 \cdot (1,333 + 0)^2 + 48,25 \cdot 0 = -9,77 \text{ кНм}$$

- стиснуті нижні волокна

при  $z_2 = 0,666 \text{ м}$  (у перетині  $3$ ):

$$Q_y = 33,58 - 11 \cdot 0,666 = 26,25 \text{ кН}$$

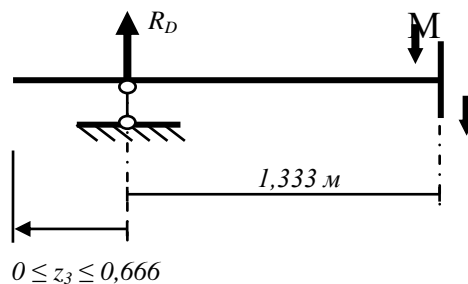
$$M_x = -5,5 \cdot (1,333 + 0,666)^2 + 48,25 \cdot 0,666 = 10,16 \text{ кНм}$$

- стиснуті верхні волокна

Ділянка  $CD$ :

Думкою розсічемо балку на ділянці  $CD$ . Відкинемо більш громіздку (ліву) частина балки.

$R_D$  – прагне повернути частину балки, що залишилася, щодо перетину



проти годинникової стрілки

$$Q_y = -R_D = -1,75 \text{ кН} \quad (\text{не залежить від } z_3)$$



$R_D$  – викликає стиск верхніх волокон

$M$  – викликає стиск верхніх волокон

$$M_x = + (R_D \cdot z_3) + M = 1,75 \cdot z_3 + 9$$

при  $z_3 = 0$  (у перетині  $D$ ):

$$M_x = 1,75 \cdot 0 + 9 = 9 \text{ кНм}$$

- стиснуті верхні волокна

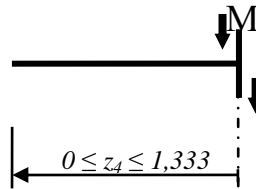
при  $z_3 = 0,666 \text{ м}$  (у перетині  $C$ ):

$$M_x = 1,75 \cdot 0,666 + 9 = 10,16 \text{ кНм}$$

- стиснуті верхні волокна

Ділянка  $DE$ :

Думкою розсічемо балку на ділянці  $DE$ . Відкинемо більш громіздку (ліву) частина балки.



$$Q_y = 0 \quad (\text{не залежить від } z_4)$$

$M$  – викликає стиск верхніх волокон

$$M_x = +M = 9 \text{ кНм} \quad (\text{не залежить від } z_4)$$

4. За отриманими результатами побудуємо епюри внутрішніх зусиль (поперечної сили  $Q_y$  і згинаючого моменту  $M_x$ )

Осі епюр рівнобіжні балці. Позитивні значення відкладемо нагору від осей, негативні – униз (епюра згинаючого моменту  $M_x$  повинна бути побудована з боку стиснутих волокон балки).

Поперечна сила  $Q_y$  на всіх ділянках описується лінійними залежностями, тому епюра  $Q_y$  на всіх ділянках обмежується відрізками прямих.

На  $I$  і  $II$ -м ділянках у вираження для визначення згинаючого моменту  $M_x$  координата  $z$  входить у другому ступені, тому епюра  $M_x$  на цих ділянках обмежується параболою. Опуклість парабол буде назустріч розподіленому навантаженню  $q$  (у даній задачі – нагору). На  $III$  і  $IV$ -м ділянках згинальний момент  $M_x$  описується лінійними залежностями, тому епюра  $M_x$  на цих ділянках обмежується відрізками прямих.

На епюрах необхідно показати знаки і штрихування перпендикулярно осі.

(Епюру  $Q_y$  легко перевірити за розрахунковою схемою рухаючи ліворуч праворуч. На ділянці  $I$  довжиною  $1,333 \text{ м}$  до балки прикладене розподілене навантаження  $q$  спрямована вниз, тому значення на епюрі убувають на величину рівнодіючої  $1,333 \cdot q = 14,666 \text{ к}$ . У перетині  $B$  діє реакція  $R_B$  спрямована нагору, тому на епюрі скачок нагору довжиною  $48,25$  (з  $-14,666$  у  $+33,583$ ). На ділянці  $II$  довжиною  $0,666 \text{ м}$  до балки прикладене розподілене навантаження  $q$  спрямована вниз, тому значення  $Q_y$  убувають на величину рівнодіючої  $0,666 \cdot q = 7,333 \text{ к}$  (з  $+33,583$  у  $+26,25$ ). У перетині  $3$  діє

зосереджена сила  $P$  спрямована вниз, тому на епюрі скачок униз довжиною 28 (з  $+26,25$  у  $-1,75$ ). На ділянках  $III$  і  $IV$  не діє розподілених навантажень, тому  $Q_Y$  на цих ділянках постійна. Скачок нагору на  $1,75$  у перетині  $D$  викликаний реакцією  $R_D$ .

Епюрю  $M_X$  легко перевірити рухаючи ліворуч праворуч. На ділянках  $I$  і  $III$  на епюрі  $Q_Y$  знак «мінус», тому значення на епюрі  $M_X$  на цих ділянках убують. На ділянці  $II$  на епюрі  $Q_Y$  знак «плюс», тому значення на епюрі  $M_X$  зростають. На ділянці  $VI$  на епюрі  $Q_Y = 0$ , тому значення на епюрі  $M_X$  постійні. Скачок униз на  $9$  у перетині  $E$  викликаний зосередженим моментом  $M = 9 \text{ кНм}$ . Зміна згинаючого моменту  $M_X$  на кожній ділянці дорівнює площі епюри  $Q_Y$  на цій ділянці.)

5. Знайдемо небезпечний переріз балки.

Небезпечним буде перетин балки де виникає найбільший по модулі згинальний момент (саме там найбільш ймовірний руйнування балки).

Як видно з епюри  $M_X$  найбільше по модулі значення згинаючого моменту  $|M_X|^{max} = 10,16 \text{ кНм}$  в перетині  $C$ .

6. Підберемо розміри поперечного перерізу балки з умови міцності:

$$\sigma_{max} = \frac{|M_X|^{max}}{W_X} \leq [\sigma]$$

де  $\sigma_{max}$  - максимальна нормальна напруга,  $[Па]$ ;

$[\sigma]$  - нормальна напруга, що допускається, при вигині,  $[Па]$ ;

$M_X$  - згинальний момент,  $[Н \cdot м]$ ;

$W_X$  - осьовий момент опору перетину,  $[м^3]$ .

Осьовий момент опору поперечного перерізу балки з умови міцності:

$$W_X \geq \frac{|M_X|^{max}}{[\sigma]}$$

$$W_X \geq \frac{10,16 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 63,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 63,5 \text{ см}^3$$

Якщо необхідно виготовити балку круглого поперечного перерізу, можна виразити осьовий момент опору поперечного перерізу через діаметр:

$$W_X = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1 d^3$$

тоді діаметр поперечного перерізу балки:

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_X}{0,1}}$$

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{63,5}{0,1}} = 8,59 \text{ см}$$

Якщо необхідно виготовити балку прямокутного поперечного перерізу, можна виразити осьовий момент опору через ширину  $b$  і висоту  $h$ :

$$W_X = \frac{bh^2}{6}$$

якщо  $h = 2b$ , тоді  $W_x = \frac{b(2b)^2}{6} = \frac{2}{3}b^3$   
тоді ширина поперечного перерізу балки:

$$b = \sqrt[3]{\frac{3}{2}W_x}$$

$$b \geq \sqrt[3]{\frac{3}{2}63,5} = 4,57 \text{ см}$$

висота поперечного перерізу балки з умови  $h = 2b \geq 2 \cdot 4,57 = 9,14 \text{ див}$

Якщо потрібно підібрати для балки двотавровий перетин (чи інший прокатний профіль), необхідно скористатися таблицями сортаменту:

виберемо із сортаменту двотавр у який момент опору  $W_x$  приймає найближче більше значення до розрахункового ( $63,5 \text{ див}^3$ ).

**I №14:**  $W_x = 81,7 \text{ див}^3$   
 $h = 14 \text{ див}$   
 $b = 7,3 \text{ див}$   
 $s = 0,49 \text{ див}$   
 $t = 0,75 \text{ див}$   
 $I_x = 572 \text{ див}^4$   
 $S_x^I = 46,8 \text{ див}^3$  – статичний момент напівперетину  
 Вага 1 м = 137 Н = 13,7 кг

**III. Порядок проведення заключної частини заняття.**

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 6. Плоске згинання.

### Практичне заняття №13: Плоске згинання.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: згинання), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма).

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

3. Визначення поперечних сил та згинальних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

Література: 1, 2, 3 (с. 195-210)

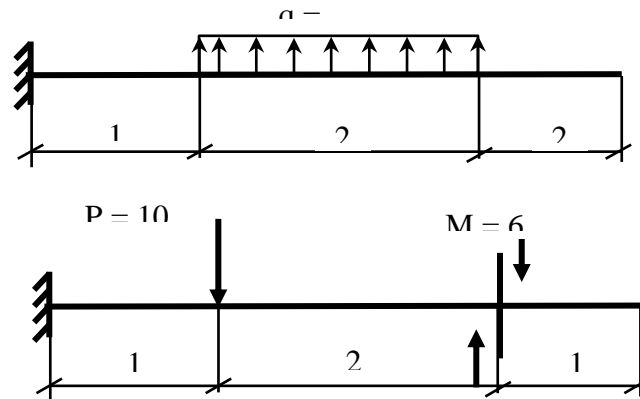
#### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

**Задача.** Для заданої схеми балки підібрати двотавровий переріз.



**III. Порядок проведення заключної частини заняття.**

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 6. Плоске згинання.

### Практичне заняття №14: Плоске згинання.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (прості види деформацій: згинання), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма).

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

4. Визначення поперечних сил та згинальних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

Література: 1, 2, 3 (с. 195-210)

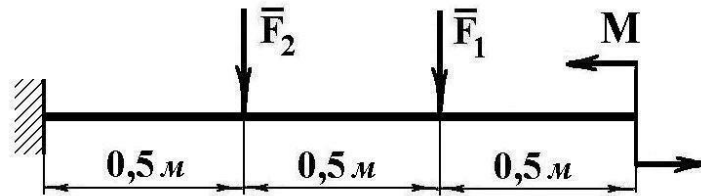
#### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

**Задача.** Консольна сталева балка навантажена двома зосередженими силами  $F_1 = 6 \text{ кН}$  і  $F_2 = 10 \text{ кН}$  та зосередженим моментом пари сил  $M = 4 \text{ кНм}$ . Допустиме нормальне напруження  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ . На кожній ділянці балки визначити поперечні сили та згинальні моменти, побудувати епюри. Для небезпечного перерізу підібрати розміри двотавру.



### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

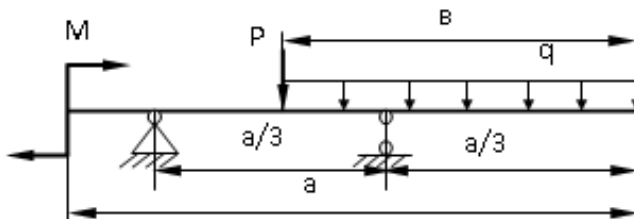
Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

#### Індивідуальні завдання:

Розв'язати задачу за індивідуальним варіантом. Номер варіанта обрати за номером за списком у журналі

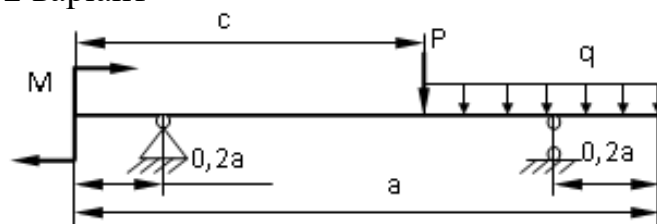
Для даної схеми балки записати в загальному вигляді вирази для визначення поперечної сили та згинального моменту в характерних перерізах, обчислити їх та побудувати епюри. Із умови міцності підібрати двотавровий переріз балки.

#### 1 варіант



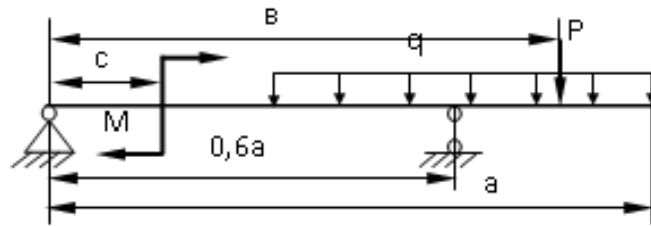
$P=28 \text{ кН}$	$a=4 \text{ м}$
$M=10 \text{ кНм}$	$b=2 \text{ м}$
$q=11 \text{ кН/м}$	$c=1 \text{ м}$

#### 2 варіант



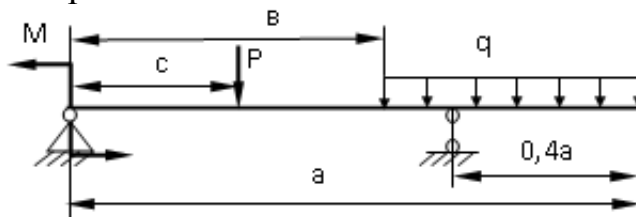
$P=26 \text{ кН}$	$a=4,2 \text{ м}$
$M=11 \text{ кНм}$	$b=2,1 \text{ м}$
$q=10 \text{ кН/м}$	$c=1,2 \text{ м}$

## 3 варіант



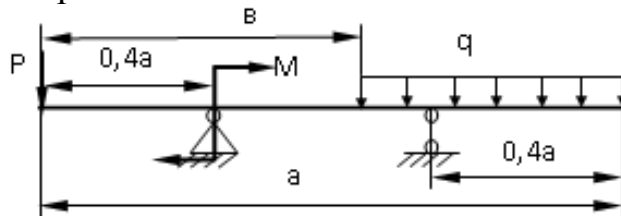
$P=24 \text{ кН}$                        $a=4,4 \text{ м}$   
 $M=12 \text{ кНм}$                      $b=2,2 \text{ м}$   
 $q=13 \text{ кН/м}$                     $c=1,4 \text{ м}$

## 4 варіант



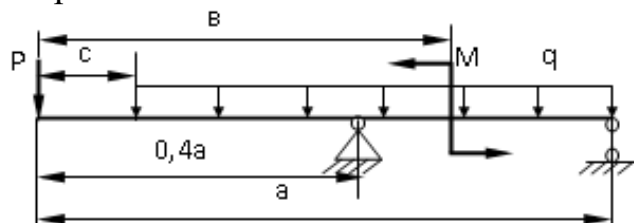
$P=22 \text{ кН}$                        $a=4,6 \text{ м}$   
 $M=13 \text{ кНм}$                      $b=2,3 \text{ м}$   
 $q=12 \text{ кН/м}$                     $c=1,6 \text{ м}$

## 5 варіант



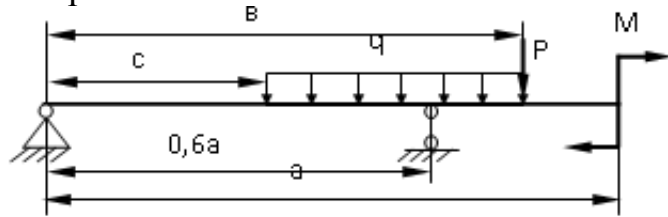
$P=20 \text{ кН}$                        $a=4,8 \text{ м}$   
 $M=14 \text{ кНм}$                      $b=2,4 \text{ м}$   
 $q=15 \text{ кН/м}$                     $c=1,8 \text{ м}$

## 6 варіант



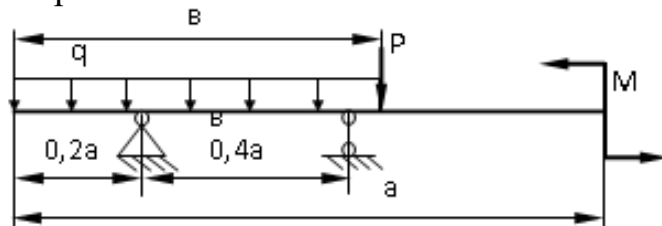
$P=22 \text{ кН}$                        $a=5 \text{ м}$   
 $M=15 \text{ кНм}$                      $b=2,5 \text{ м}$   
 $q=14 \text{ кН/м}$                     $c=1,7 \text{ м}$

## 7 варіант



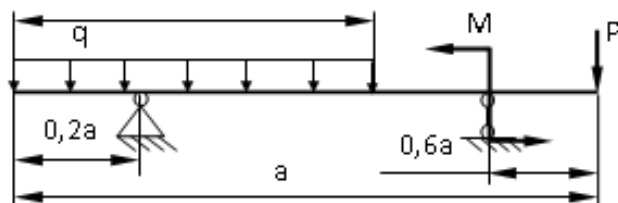
$$\begin{aligned} P &= 24 \text{ кН} & a &= 4,8 \text{ м} \\ M &= 16 \text{ кНм} & b &= 2,6 \text{ м} \\ q &= 12 \text{ кН/м} & c &= 1,5 \text{ м} \end{aligned}$$

## 8 варіант



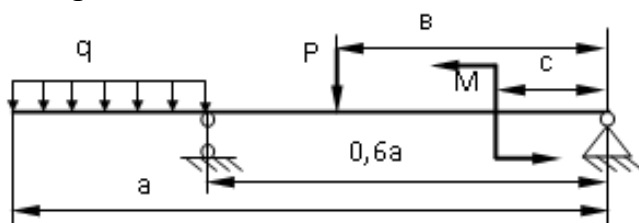
$$\begin{aligned} P &= 26 \text{ кН} & a &= 4,4 \text{ м} \\ M &= 17 \text{ кНм} & b &= 2,7 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,3 \text{ м} \end{aligned}$$

## 9 варіант



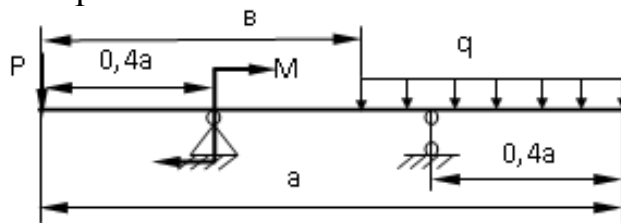
$$\begin{aligned} P &= 28 \text{ кН} & a &= 4,2 \text{ м} \\ M &= 18 \text{ кНм} & b &= 2,8 \text{ м} \\ q &= 11 \text{ кН/м} & c &= 1,2 \text{ м} \end{aligned}$$

## 10 варіант



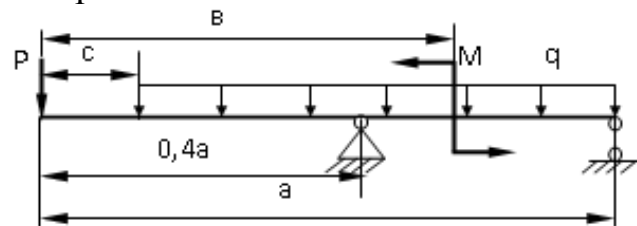
$$\begin{aligned} P &= 20 \text{ кН} & a &= 4 \text{ м} \\ M &= 19 \text{ кНм} & b &= 2,9 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,1 \text{ м} \end{aligned}$$

## 11 варіант



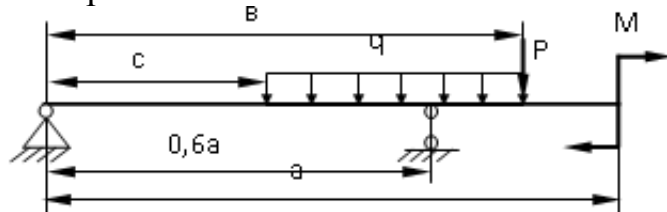
$$\begin{aligned} P &= 28 \text{ кН} & a &= 4 \text{ м} \\ M &= 10 \text{ кНм} & b &= 2 \text{ м} \\ q &= 11 \text{ кН/м} & c &= 1 \text{ м} \end{aligned}$$

## 12 варіант



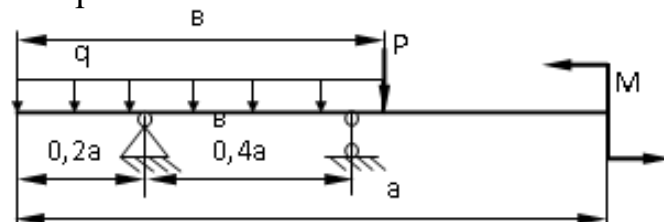
$$\begin{aligned} P &= 26 \text{ кН} & a &= 4,2 \text{ м} \\ M &= 11 \text{ кНм} & b &= 2,1 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,2 \text{ м} \end{aligned}$$

## 13 варіант



$$\begin{aligned} P &= 24 \text{ кН} & a &= 4,4 \text{ м} \\ M &= 12 \text{ кНм} & b &= 2,2 \text{ м} \\ q &= 13 \text{ кН/м} & c &= 1,4 \text{ м} \end{aligned}$$

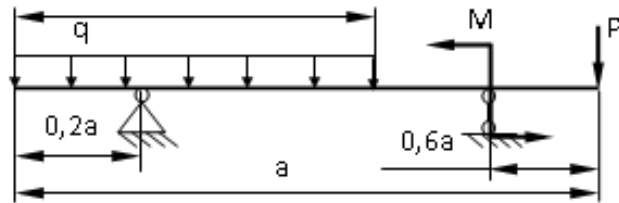
## 14 варіант



$$\begin{aligned} P &= 22 \text{ кН} & a &= 4,6 \text{ м} \\ M &= 13 \text{ кНм} & b &= 2,3 \text{ м} \\ q &= 12 \text{ кН/м} & c &= 1,6 \text{ м} \end{aligned}$$

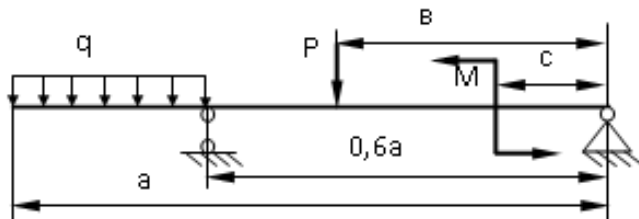


## 15 варіант



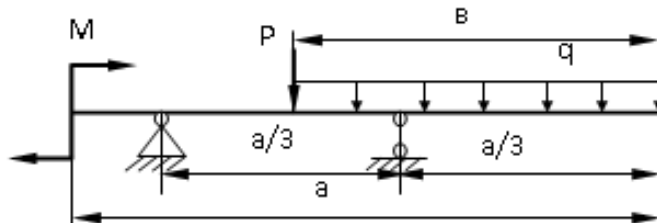
$$\begin{aligned} P &= 20 \text{ кН} & a &= 4,8 \text{ м} \\ M &= 14 \text{ кНм} & b &= 2,4 \text{ м} \\ q &= 15 \text{ кН/м} & c &= 1,8 \text{ м} \end{aligned}$$

## 16 варіант



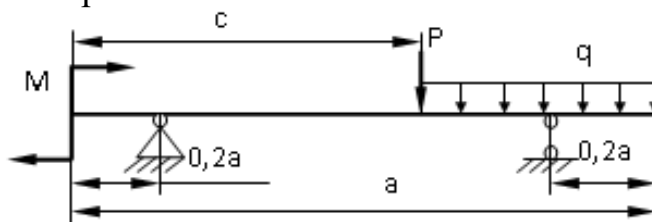
$$\begin{aligned} P &= 22 \text{ кН} & a &= 5 \text{ м} \\ M &= 15 \text{ кНм} & b &= 2,5 \text{ м} \\ q &= 14 \text{ кН/м} & c &= 1,7 \text{ м} \end{aligned}$$

## 17 варіант



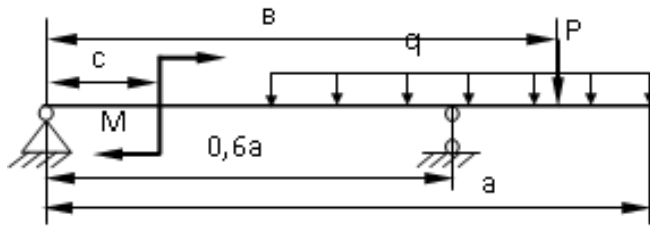
$$\begin{aligned} P &= 24 \text{ кН} & a &= 4,8 \text{ м} \\ M &= 16 \text{ кНм} & b &= 2,6 \text{ м} \\ q &= 12 \text{ кН/м} & c &= 1,5 \text{ м} \end{aligned}$$

## 18 варіант



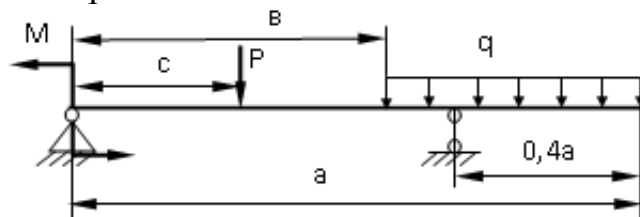
$$\begin{aligned} P &= 26 \text{ кН} & a &= 4,4 \text{ м} \\ M &= 17 \text{ кНм} & b &= 2,7 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,3 \text{ м} \end{aligned}$$

## 19 варіант



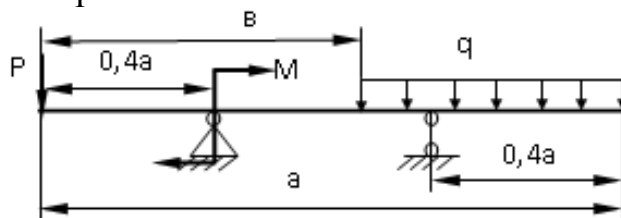
$$\begin{aligned} P &= 28 \text{ кН} & a &= 4,2 \text{ м} \\ M &= 18 \text{ кНм} & b &= 2,8 \text{ м} \\ q &= 11 \text{ кН/м} & c &= 1,2 \text{ м} \end{aligned}$$

## 20 варіант



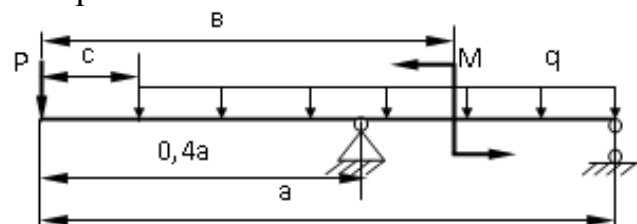
$$\begin{aligned} P &= 20 \text{ кН} & a &= 4 \text{ м} \\ M &= 19 \text{ кНм} & b &= 2,9 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,1 \text{ м} \end{aligned}$$

## 21 варіант



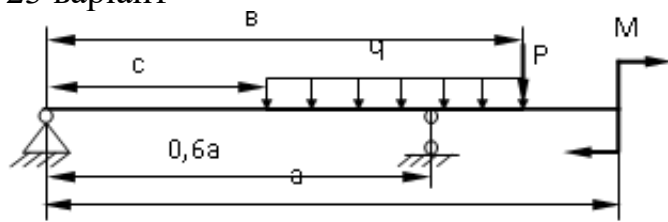
$$\begin{aligned} P &= 28 \text{ кН} & a &= 4 \text{ м} \\ M &= 10 \text{ кНм} & b &= 2 \text{ м} \\ q &= 11 \text{ кН/м} & c &= 1 \text{ м} \end{aligned}$$

## 22 варіант



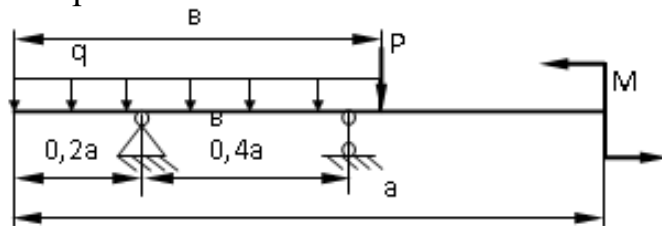
$$\begin{aligned} P &= 26 \text{ кН} & a &= 4,2 \text{ м} \\ M &= 11 \text{ кНм} & b &= 2,1 \text{ м} \\ q &= 10 \text{ кН/м} & c &= 1,2 \text{ м} \end{aligned}$$

## 23 варіант



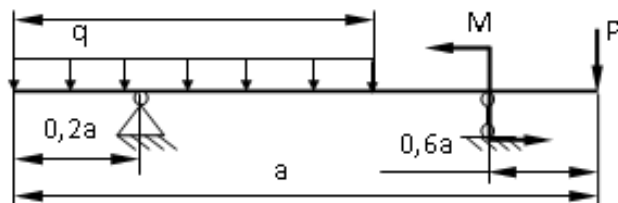
$$\begin{aligned} P &= 24 \text{ кН} & a &= 4,4 \text{ м} \\ M &= 12 \text{ кНм} & b &= 2,2 \text{ м} \\ q &= 13 \text{ кН/м} & c &= 1,4 \text{ м} \end{aligned}$$

## 24 варіант



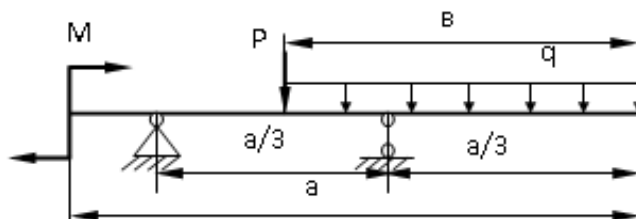
$$\begin{aligned} P &= 22 \text{ кН} & a &= 4,6 \text{ м} \\ M &= 13 \text{ кНм} & b &= 2,3 \text{ м} \\ q &= 12 \text{ кН/м} & c &= 1,6 \text{ м} \end{aligned}$$

## 25 варіант



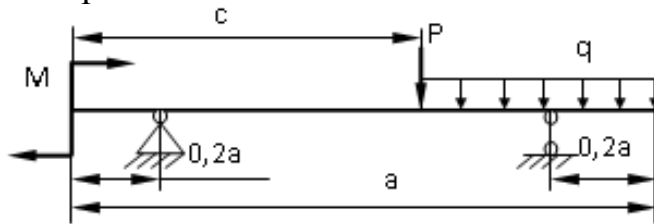
$$\begin{aligned} P &= 20 \text{ кН} & a &= 4,8 \text{ м} \\ M &= 14 \text{ кНм} & b &= 2,4 \text{ м} \\ q &= 15 \text{ кН/м} & c &= 1,8 \text{ м} \end{aligned}$$

## 26 варіант



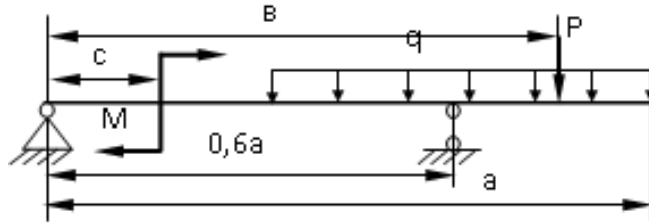
$$\begin{aligned} P &= 28 \text{ кН} & a &= 4 \text{ м} \\ M &= 10 \text{ кНм} & b &= 2 \text{ м} \\ q &= 11 \text{ кН/м} & c &= 1 \text{ м} \end{aligned}$$

## 27 варіант



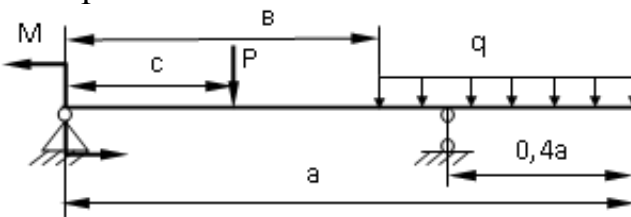
$P=26 \text{ кН}$                        $a=4,2 \text{ м}$   
 $M=11 \text{ кНм}$                      $b=2,1 \text{ м}$   
 $q=10 \text{ кН/м}$                     $c=1,2 \text{ м}$

## 28 варіант



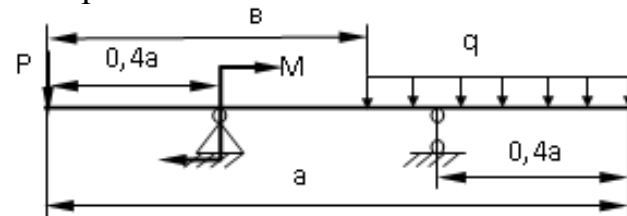
$P=24 \text{ кН}$                        $a=4,4 \text{ м}$   
 $M=12 \text{ кНм}$                      $b=2,2 \text{ м}$   
 $q=13 \text{ кН/м}$                     $c=1,4 \text{ м}$

## 29 варіант



$P=22 \text{ кН}$                        $a=4,6 \text{ м}$   
 $M=13 \text{ кНм}$                      $b=2,3 \text{ м}$   
 $q=12 \text{ кН/м}$                     $c=1,6 \text{ м}$

## 30 варіант



$P=20 \text{ кН}$                        $a=4,8 \text{ м}$   
 $M=14 \text{ кНм}$                      $b=2,4 \text{ м}$   
 $q=15 \text{ кН/м}$                     $c=1,8 \text{ м}$

## Тема № 7. Складний опір.

### Практичне заняття №15: Складний опір.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (складні види деформацій), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма),

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

1. Визначення крутних моментів. Побудова епюри крутних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення діаметру вала за третьою теорією міцності.

Література: 1, 2, 3 (с. 231 - 273)

#### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Складний опір (складні деформації)* – види деформацій, за яких у розрахунках на міцність необхідно враховувати більше одного внутрішнього зусилля.

До складного опору відносять косо гнуття, гнуття із крученням, кручення з розтягом (стиском), поздовжньо-поперечне гнуття, позацентровий розтяг (стиск) тощо.

*Косо гнуття* – вид складної деформації, за якого площина дії гнучого моменту не проходить ні через жодну з головних центральних осей інерції поперечного перерізу стрижня.

Максимальні нормальні напруження  $\sigma_{max}$  підчас косого гнуття виникають у точках поперечного перерізу найбільш віддалених від нульової лінії.

*Нульова (нейтральна) лінія* – пряма в поперечному перерізі, на якій нормальні напруження дорівнюють нулю ( $\sigma = 0$ ).

Підчас косого гнуття нульова лінія проходить через центр маси поперечного перерізу і не співпадає з його головними осями.

*Формула для визначення положення нульової лінії:*

$$\operatorname{tg} \beta = - \frac{M_Y}{M_X} \cdot \frac{I_X}{I_Y},$$

де  $M_X, M_Y$  – гнучі моменти у вертикальній і горизонтальній площині,  $[H \cdot m]$ ;

$I_X, I_Y$  – осьові моменти інерції перерізу,  $[m^4]$ ;

$\beta$  – кут повороту нульової лінії відносно осі  $X$ .

*Правило знаків кута  $\beta$ :*

-  $\beta > 0$ , якщо нульова лінія проходить через I – III квадрант,

-  $\beta < 0$ , якщо нульова лінія проходить через II – IV квадрант.

*Нормальні напруги в довільній точці поперечного перерізу під час косого гнуття:*

$$\sigma = -\frac{M_X}{I_X}y - \frac{M_Y}{I_Y}x,$$

де  $M_X, M_Y$  – гнучі моменти у вертикальній і горизонтальній площині,  $[H \cdot m]$ ;

$I_X, I_Y$  – осьові моменти інерції перерізу,  $[m^4]$ ;

$x, y$  – координати точки,  $[m]$ .

*Умова міцності під час косого гнуття:*

$$\sigma_{max} = \frac{|M_X|}{W_X} + \frac{|M_Y|}{W_Y} \leq [\sigma],$$

де  $M_X, M_Y$  – гнучі моменти у вертикальній і горизонтальній площині,  $[H \cdot m]$ ;

$W_X, W_Y$  – осьові моменти опору перерізу,  $[m^3]$ ;

$\sigma_{max}$  – максимальна нормальна напруга,  $[Pa]$ ;

$[\sigma]$  – допускна нормальна напруга,  $[Pa]$ .

*Гнуття із крученням* – вид складної деформації, за якого в розрахунку на міцність необхідно враховувати два внутрішніх зусилля: гнучий момент та крутний момент.

*Умова міцності під час гнуття з крученням:*

$$\sigma_{max} = \frac{M_{3B}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де  $M_{3B}$  – зведений момент,  $[H \cdot m]$ ;

$W_X$  – осьовий момент опору перерізу,  $[m^3]$ ;

$\sigma_{max}$  – максимальна нормальна напруга,  $[Pa]$ ;

$[\sigma]$  – допускна нормальна напруга,  $[Pa]$ .

*Момент зведений ( $M_{3B}$ )* розраховують із застосуванням теорій (гіпотез) міцності. Для валів із пластичних матеріалів розрахунок  $M_{3B}$  виконують на основі третьої або четвертої теорії міцності:

$$M_{3B}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + \Sigma M_{ГН}^2},$$

$$M_{3B}^{IV} = \sqrt{0,75 \cdot M_{KP}^2 + \Sigma M_{ГН}^2},$$

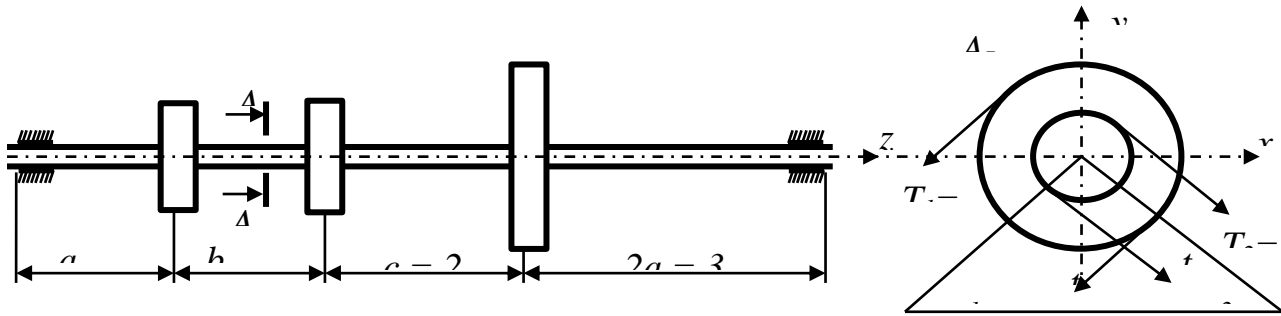
де  $M_{KP}$  – крутний момент,  $[H \cdot m]$ ;

$\Sigma M_{ГН}$  – сумарний (повний) гнучий момент,  $[H \cdot m]$ .

$$\Sigma M_{ГН} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2},$$

де  $M_X$  – гнучкий момент у вертикальній площині,  $[H \cdot m]$ ;

$M_Y$  – гнучкий момент у горизонтальній площині,  $[H \cdot m]$ .

Задача

Шків діаметром  $D_1 = 0,8 \text{ м}$  і кутом нахилу гілок ременя  $\varphi_1 = 30^\circ$ , робить  $n = 600$  обертів за хвилину і передає потужність  $N = 150 \text{ кВт}$ . Два інших шківів мають однаковий діаметр  $D_2 = 0,6 \text{ м}$  і однакові кути нахилу гілок ременя  $\varphi_2 = 60^\circ$ , кожний з них передає потужність  $0,5 \cdot N$ . Потрібно підібрати діаметр вала за третьою теорією міцності. Взяти  $[\sigma] = 70 \text{ МПа}$ ,  $T = 2t$ .

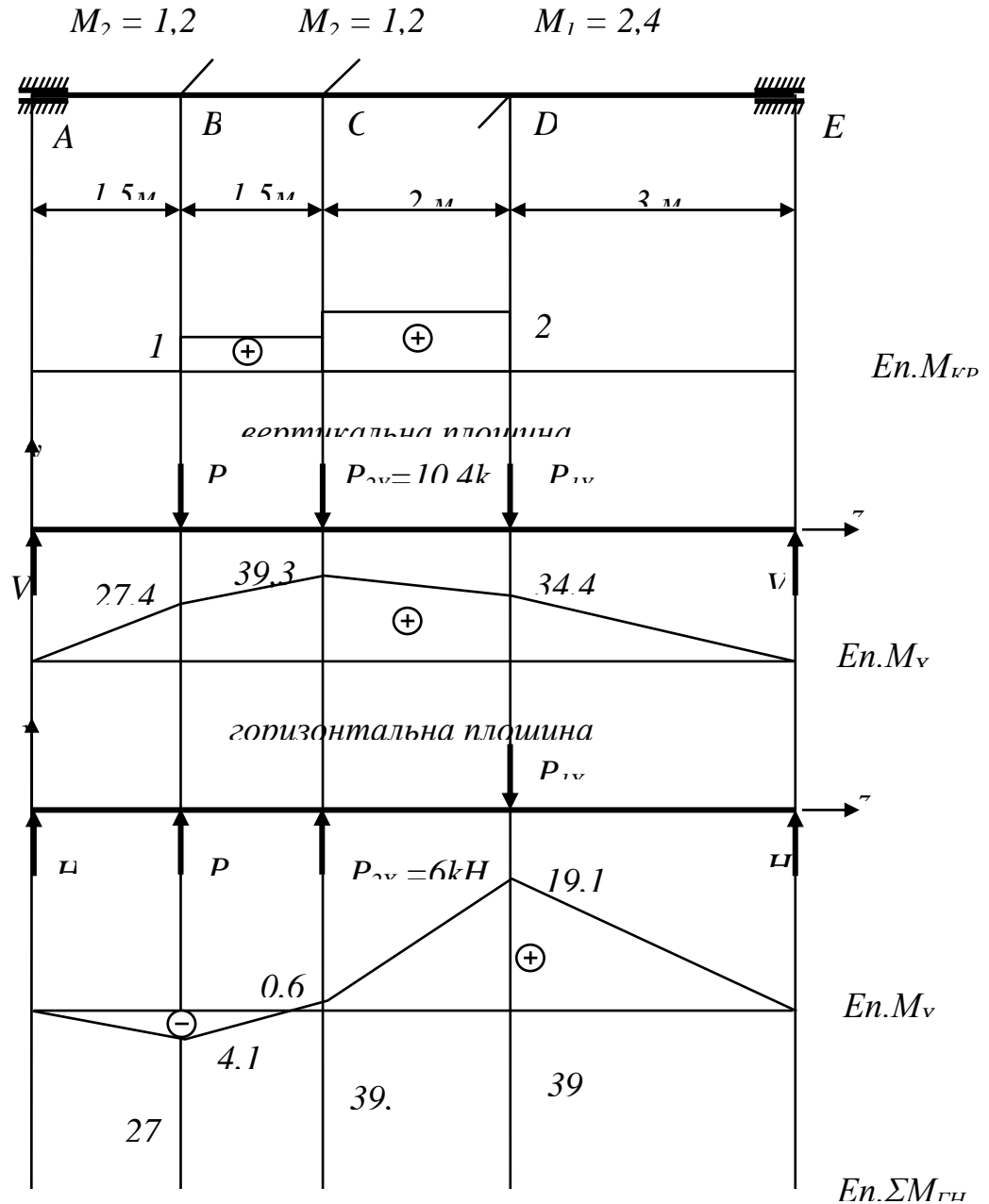
Розв'язання

1) Визначимо закручувальні (зовнішні) моменти, прикладені до шківів:

$$M = \frac{N}{\omega},$$

де  $N$  – потужність,  $\left[ \text{Вт} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right];$

$\omega$  – кутова швидкість обертання,  $\left[ \frac{\text{рад}}{\text{с}} \right]:$



$$\omega = \frac{2\pi}{60} \cdot n = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \frac{\text{рад}}{\text{с}},$$

де  $n$  – число обертів за хвилину.  $M_1 = \frac{150}{62,8} = 2,4 \text{ кНм}$ ,

$$M_2 = \frac{M_1}{2} = \frac{2,4}{2} = 1,2 \text{ кНм}.$$

2) Побудуємо епюру крутних моментів  $M_{кр}$ :



Ділянка $AB$ :	$M_{KP} = 0$ ;
Ділянка $BC$ :	$M_{KP} = M_2 = 1,2 \text{ кНм}$ ;
Ділянка $CD$ :	$M_{KP} = M_2 + M_2 = 2,4 \text{ кНм}$ ;
Ділянка $DE$ :	$M_{KP} = M_2 + M_2 - M_1 = 0$ .

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 7. Складний опір.

### Практичне заняття №16: Складний опір.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (складні види деформацій), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2 (денна форма),

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

1. Визначення крутних моментів. Побудова епюри крутних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення діаметру вала за третьою теорією міцності.

Література: 1, 2, 3 (с. 231 - 273)

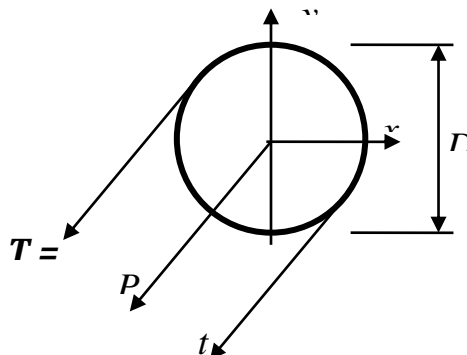
#### План проведення заняття:

##### I. Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

II. Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач (продовження задачі).

- 3) Визначимо окружні зусилля прикладені до шківів (натяг ременів) через закручувальні моменти:



$$|M| = T \frac{D}{2} - t \frac{D}{2} = \frac{D}{2} (T - t),$$

де  $T, t$  – натяг гілок ременя,  $[H]$ ;

якщо  $T = 2t$ , тоді  $M = \frac{D}{2} \cdot t$ , або  $t = \frac{2M}{D}$ .

$$t_1 = \frac{2M_1}{D_1} = \frac{2 \cdot 2,4}{0,8} = 6 \text{ kH}, \quad T_1 = 2t_1 = 2 \cdot 6 = 12 \text{ kH},$$

$$t_2 = \frac{2M_2}{D_2} = \frac{2 \cdot 1,2}{0,6} = 4 \text{ kH}, \quad T_2 = 2t_2 = 2 \cdot 4 = 8 \text{ kH}.$$

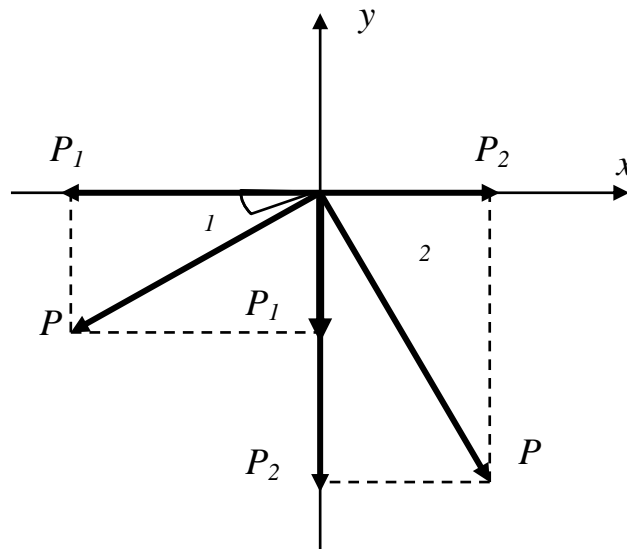
4) Визначимо тиск, що передається шківами на вал:

$$P = T + t$$

$$P_1 = T_1 + t_1 = 12 + 6 = 18 \text{ kH}, \quad P_2 = T_2 + t_2 = 8 + 4 = 12 \text{ kH}.$$

Визначимо проекції сил  $P_1$  та  $P_2$  на вертикальну та горизонтальну площини:

Вертикальна площина  $zy$ :



$$P_{1Y} = P_1 \sin \alpha_1 = 18 \cdot \sin 30^\circ = 9 \text{ kH},$$

$$P_{2Y} = P_2 \sin \alpha_2 = 12 \cdot \sin 60^\circ = 10,4 \text{ kH}.$$

Горизонтальна площина  $zx$ :

$$P_{1X} = P_1 \cos \alpha_1 = 18 \cdot \cos 30^\circ = 15,6 \text{ kH},$$

$$P_{2X} = P_2 \cos \alpha_2 = 12 \cdot \cos 60^\circ = 6 \text{ kH}.$$

5) Побудуємо епюри гнучких моментів:

а) вертикальна площина

Визначимо реакції опор:

$$\Sigma M_E = -V_A \cdot 8 + P_{2Y} \cdot 6,5 + P_{2Y} \cdot 5 + P_{1Y} \cdot 3 = 0,$$

$$V_A = \frac{P_{2Y} \cdot 6,5 + P_{2Y} \cdot 5 + P_{1Y} \cdot 3}{8} = \frac{10,4 \cdot 6,5 + 10,4 \cdot 5 + 9 \cdot 3}{8} = 18,325 \text{ kH},$$

$$\Sigma M_A = -P_{2Y} \cdot 1,5 - P_{2Y} \cdot 3 - P_{1Y} \cdot 5 + V_E \cdot 8 = 0,$$

$$V_E = \frac{P_{2Y} \cdot 1,5 + P_{2Y} \cdot 3 + P_{1Y} \cdot 5}{8} = \frac{10,4 \cdot 1,5 + 10,4 \cdot 3 + 9 \cdot 5}{8} = 11,475 \text{ kH}.$$

Перевірка:

$$\Sigma y = V_A - P_{2Y} - P_{2Y} - P_{1Y} + V_E = 18,325 - 10,4 - 10,4 - 9 + 11,475 = 0.$$

Ділянка AB:  $(0 \leq z \leq 1,5)$   $M_X = V_A \cdot z,$   
при  $z = 0$   $M_X = 0,$   
при  $z = 1,5$   $M_X = 18,325 \cdot 1,5 = 27,487 \text{ kHm}.$

Ділянка BC:  $(0 \leq z \leq 1,5)$   $M_X = V_A (a + z) - P_{2Y} \cdot z,$   
при  $z = 0$   $M_X = 18,325 \cdot 1,5 - 0 = 27,487 \text{ kHm},$   
при  $z = 1,5$   $M_X = 18,325 \cdot 3 - 10,4 \cdot 1,5 = 39,375 \text{ kHm}.$

Ділянка DC:  $(2 \geq z \geq 0)$   $M_X = V_E (2a + z) - P_{1Y} \cdot z,$   
при  $z = 2$   $M_X = 11,475 \cdot 5 - 9 \cdot 2 = 39,375 \text{ kHm},$   
при  $z = 0$   $M_X = 11,475 \cdot 3 - 0 = 34,425 \text{ kHm}.$

Ділянка ED:  $(3 \geq z \geq 0)$   $M_X = V_E \cdot z,$   
при  $z = 3$   $M_X = 11,475 \cdot 3 = 34,425 \text{ kHm},$   
при  $z = 0$   $M_X = 0.$

b) горизонтальна площина

Визначимо реакції опор:

$$H_A = \frac{-P_{2X} \cdot 6,5 - P_{2X} \cdot 5 + P_{1X} \cdot 3}{8} = \frac{-6 \cdot 6,5 - 6 \cdot 5 + 15,6 \cdot 3}{8} = -2,775 \text{ kH},$$

$$H_E = \frac{-P_{2X} \cdot 1,5 - P_{2X} \cdot 3 + P_{1X} \cdot 5}{8} = \frac{-6 \cdot 1,5 - 6 \cdot 3 + 15,6 \cdot 5}{8} = 6,375 \text{ kH}.$$

Перевірка:

$$\Sigma x = H_A + P_{2X} + P_{2X} - P_{1X} + H_E = -2,775 + 6 + 6 - 15,6 + 6,375 = 0.$$

Ділянка AB:  $(0 \leq z \leq 1,5)$   $M_Y = H_A \cdot z,$   
при  $z = 0$   $M_Y = 0,$   
при  $z = 1,5$   $M_Y = -2,775 \cdot 1,5 = -4,163 \text{ kHm}.$

Ділянка BC:	$(0 \leq z \leq 1,5)$	$M_Y = H_A (a + z) + P_{2X} \cdot z,$
	при $z = 0$	$M_Y = -2,775 \cdot 1,5 + 0 = -4,163 \text{ кНм},$
	при $z = 1,5$	$M_Y = -2,775 \cdot 3 + 6 \cdot 1,5 = 0,675 \text{ кНм}.$
Ділянка DC:	$(2 \leq z \leq 0)$	$M_Y = H_E (2a + z) - P_{1X} \cdot z,$
	при $z = 2$	$M_Y = 6,375 \cdot 5 - 15,6 \cdot 2 = 0,675 \text{ кНм},$
	при $z = 0$	$M_Y = 6,375 \cdot 3 - 0 = 19,125 \text{ кНм}.$
Ділянка ED:	$(3 \leq z \leq 0)$	$M_Y = H_E \cdot z,$
	при $z = 3$	$M_Y = 6,375 \cdot 3 = 19,125 \text{ кНм},$
	при $z = 0$	$M_Y = 0.$

6) Визначимо сумарний (повний) гнучкий момент  $\Sigma M_{ГН}$  в окремих перерізах:

$$\Sigma M_{ГН} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2},$$

$$\Sigma M_{ГН}^A = 0,$$

$$\Sigma M_{ГН}^B = \sqrt{27,487^2 + 4,163^2} = 27,8 \text{ кНм},$$

$$\Sigma M_{ГН}^C = \sqrt{39,375^2 + 0,675^2} = 39,38 \text{ кНм},$$

$$\Sigma M_{ГН}^D = \sqrt{34,425^2 + 19,125^2} = 39,4 \text{ кНм},$$

$$\Sigma M_{ГН}^E = 0.$$

7) Небезпечний переріз D:  $M_{KP}^D = 2,4 \text{ кНм}, \Sigma M_{ГН}^D = 39,4 \text{ кНм}.$

8) Визначимо момент зведений для небезпечного перерізу за третьою теорією міцності:

$$M_{3B}^{III} = \sqrt{M_{KP}^2 + \Sigma M_{ГН}^2},$$

$$M_{3B}^{III} = \sqrt{2,4^2 + 39,4^2} = 39,5 \text{ кНм}.$$

9) Визначимо діаметр вала  $d$  з умови міцності:

$$\sigma_{max} = \frac{M_{3B}}{W_X} \leq [\sigma],$$

де  $M_{3B}$  — зведений момент,  $[H \cdot м];$

$\sigma_{max}$  — максимальна нормальна напруга,  $[Па];$

$[\sigma]$  — допускна нормальна напруга,  $[Па];$

$W_X$  — осьовий момент опору перерізу,  $[м^3].$

Відомо, що для круглого перерізу осьовий момент опору дорівнює:

$$W_X = 0,1 \cdot d^3,$$

де  $d$  – діаметр круга, [м].

Тоді

$$d = \sqrt[3]{\frac{W_X}{0,1}} \geq \sqrt[3]{\frac{M_{3B}^{III}}{0,1 [\sigma]}} = \sqrt[3]{\frac{39,5 \cdot 10^3}{0,1 \cdot 70 \cdot 10^6}} = 0,178 \text{ м} = 178 \text{ мм}.$$

Беремо  $d = 180 \text{ мм}$

Приклад розв'язано.

**III.** Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## Тема № 8. Стійкість стиснутих стержнів.

### Практичне заняття №17: Стійкість стиснутих стержнів.

Навчальна мета заняття: поглибити і розширити знання здобувачів з опору матеріалів (складні види деформацій), ознайомити їх із методикою розв'язання задач.

Кількість годин - 2

Місце проведення: навчальний кабінет.

#### Навчальні питання:

1. Визначення поперечних сил та згинальних моментів.
2. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів.
3. Визначення розмірів поперечного перерізу балки.

Література: 1, 2, 3 (с. 276 - 306)

### План проведення заняття:

**I.** Порядок проведення вступу до заняття.

Проведення попереднього контролю теоретичних знань здобувачів.

**II.** Порядок проведення основної частини заняття: постановка задачі та обговорення методики її розв'язання за участю здобувачів, розв'язування задач.

*Стійкість* – здатність опиратися появі великих деформацій при малих змінах навантаження.

*Поздовжнє гнуття* – втрата стійкості прямим стрижнем під час стиску.

Небезпека втрати стійкості полягає в тому, що вона настає раптово, при досягненні стискаючою силою критичного значення, і супроводжується

швидким зростанням деформацій.

*Критична сила* – найменше значення стискаючої сили, за якої відбувається втрата стійкості.

*Формула Ейлера:*

$$P_{KP} = \left( \frac{\pi}{\mu l} \right)^2 EI_X,$$

де  $P_{KP}$  – критична (ейлерова) сила, [Н];

$l$  – довжина стрижня, [м];

$\mu$  – коефіцієнт зведеної довжини стрижня;

$E$  – модуль Юнга, [Па];

$I_X$  – осьовий момент інерції поперечного перерізу стрижня, [м<sup>4</sup>].

*Коефіцієнт зведеної довжини стрижня  $\mu$  залежить від способу закріплення кінців стрижня:*

$\mu = 0,5$  – якщо обидва кінці закріплені жорстко;

$\mu = 0,7$  – якщо один кінець закріплений жорстко, другий – шарнірно;

$\mu = 1$  – якщо обидва кінці закріплені шарнірно;

$\mu = 2$  – якщо один кінець закріплений жорстко, а другий вільний.

*Формула Ейлера для визначення  $\sigma_{KP}$ :*

$$\sigma_{KP} = \left( \frac{\pi}{\lambda} \right)^2 E,$$

де  $\sigma_{KP}$  – критична нормальна напруга, [Па];

$\lambda$  – гнучкість стрижня;

$E$  – модуль Юнга, [Па].

*Гнучкість:*

$$\lambda = \frac{\mu l}{i},$$

де  $\mu$  – коефіцієнт зведеної довжини стрижня;

$l$  – довжина стрижня, [м];

$i$  – радіус інерції поперечного перерізу стрижня, [м].

*Умова стійкості:*

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \varphi,$$

де  $\sigma_{max}$  – максимальна нормальна напруга, [Па];

$[\sigma]$  – допускна нормальна напруга при стиску, [Па];

$P$  – стискаюча сила, [Н];

- $F$  - площа поперечного перерізу стрижня,  $[м^2]$ ;  
 $\varphi$  - коефіцієнт поздовжнього гнуття.

*Коефіцієнт поздовжнього гнуття ( $0 < \varphi < 1$ )* залежить від матеріалу стрижня і його гнучкості. Коефіцієнт  $\varphi$  для різних матеріалів можна знайти в довідкових таблицях [Дарков.А.В. «Опір матеріалів», табл.13.1].

*Метод послідовних наближень* – метод, що застосовується для розрахунку на стійкість стиснутих стрижнів:

- 1) оскільки  $0 < \varphi < 1$ , то в першому наближенні беруть  $\varphi_1 = 0,5$ ;
- 2) з умови стійкості визначають необхідну площу перерізу в першому наближенні;
- 3) за знайденим розміром площі та за її формою визначають мінімальний радіус інерції перерізу в першому наближенні;
- 4) визначають максимальну гнучкість стрижня в першому наближенні;
- 5) за допомогою таблиць за знайденим значенням гнучкості визначають табличний коефіцієнт поздовжнього гнуття  $\varphi_T$ ;
- 6) порівнюють прийняте і табличне значення коефіцієнта  $\varphi$ ;
- 7) якщо прийняте і табличне значення  $\varphi$  відрізняються менш ніж на  $0,01$ , то розрахунок зупиняють і виконують перевірку;
- 8) якщо прийняте і табличне значення  $\varphi$  відрізняються більш ніж на  $0,01$ , то необхідно повторити розрахунок у наступному наближенні;
- 9) в усіх наступних наближеннях коефіцієнт  $\varphi$  беруть як середнє значення від прийнятого і табличного з попереднього наближення.

### Задача 7

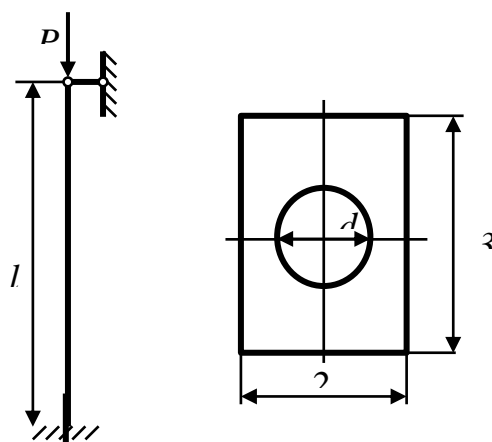
Сталевий стрижень завдовжки  $l = 5\text{ м}$  стискається силою  $P = 1\text{ МН}$ .

- Потрібно: 1) визначити розміри поперечного перерізу, якщо  $[\sigma] = 160\text{ МПа}$ ;  
 2) визначити критичну силу  $P_{кр}$  і коефіцієнт запасу стійкості.

### Розв'язання

- 1) Виразимо геометричні характеристики перерізу стрижня ( $F$ ,  $I_{max}$ ,  $I_{min}$ ,  $i_{min}$ ) через один розмір  $d$ .

Площу перерізу даного стрижня знайдемо як різницю площ прямокутника і круглого отвору:



$$F = F^{ПРЯМ} - F^{КР} = 6d^2 - \frac{3,14 \cdot d^2}{4} = 5,215d^2,$$

де  $F^{ПРЯМ} = 3d \cdot 2d$  - площа прямокутника;

$$F^{КР} = \frac{\pi d^2}{4} \quad - \text{площа круга.}$$

Осьові моменти інерції для прямокутника визначають за формулами:

$$I_X^{ПРЯМ} = \frac{h^3 \cdot b}{12}; \quad I_Y^{ПРЯМ} = \frac{h \cdot b^3}{12},$$

де  $h$  – висота прямокутника,

$b$  – ширина прямокутника.

Якщо  $h = 3d$ ,  $b = 2d$ , тоді

$$I_X^{ПРЯМ} = \frac{(3d)^3 \cdot 2d}{12} = 4,5d^4; \quad I_Y^{ПРЯМ} = \frac{3d \cdot (2d)^3}{12} = 2d^4.$$

Осьові моменти інерції круга:

$$I_X^{КР} = I_Y^{КР} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} = 0,049d^4,$$

де  $d$  – діаметр.

Осьові моменти інерції перерізу даного стрижня знайдемо як різницю моментів інерції прямокутника і круглого отвору:

$$I_X = I_X^{ПРЯМ} - I_X^{КР} = 4,5d^4 - 0,049d^4 = 4,451d^4,$$

$$I_Y = I_Y^{ПРЯМ} - I_Y^{КР} = 2d^4 - 0,049d^4 = 1,951d^4.$$

Головними осями перерізу є його осі симетрії. Оскільки  $I_X > I_Y$ , тоді:

$$I_{max} = I_X = 4,451d^4, \quad I_{min} = I_Y = 1,951d^4.$$

Мінімальний радіус інерції перерізу:

$$i_{min} = \sqrt{\frac{I_{min}}{F}} = \sqrt{\frac{1,951d^4}{5,215d^2}} = 0,612d.$$

- 2) Визначимо залежність мінімального радіуса інерції перерізу стрижня ( $i_{min}$ ) від площі перерізу  $F$ . Оскільки для заданого перерізу  $F = 5,215d^2$ , тоді:

$$i_{min} = 0,612d = 0,612\sqrt{\frac{F}{5,215}} = 0,268\sqrt{F}.$$

- 3) Виразимо необхідну площу поперечного перерізу з умови стійкості:



$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} \leq [\sigma] \varphi,$$

- де  $\sigma_{max}$  - максимальна нормальна напруга, [Па];  
 $[\sigma]$  - допускна нормальна напруга при стиску, [Па];  
 $P$  - стискаюча сила, [Н];  
 $F$  - площа поперечного перерізу стрижня, [м<sup>2</sup>];  
 $\varphi$  - коефіцієнт поздовжнього гнуття.

$$F \geq \frac{P}{[\sigma] \varphi} = \frac{1 \text{ МН}}{160 \text{ МПа} \cdot \varphi} = \frac{6,25 \cdot 10^{-3}}{\varphi} \quad [\text{м}^2].$$

4) Скористаємося методом послідовних наближень.

Оскільки  $0 < \varphi < 1$ , тоді в першому наближенні візьмемо  $\varphi_1 = 0,5$ .

$$F_1 \geq \frac{6,25 \cdot 10^{-3}}{\varphi_1} = \frac{6,25 \cdot 10^{-3}}{0,5} = 12,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2.$$

При цьому

$$i_{min} = 0,268 \sqrt{F_1} \geq 0,268 \sqrt{12,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 0,030 \text{ м}.$$

Визначимо максимальну гнучкість стрижня в першому наближенні:

$$\lambda_{max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}},$$

- де  $l$  - довжина стрижня, [м];  
 $i_{min}$  - мінімальний радіус інерції перерізу стрижня, [м];  
 $\mu$  - коефіцієнт зведеної довжини стрижня.

У даного стрижня один кінець закріплений жорстко, а другий - шарнірно, тому  $\mu = 0,7$ . Тоді (у першому наближенні):

$$\lambda_1^{max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{min}} \leq \frac{0,7 \cdot 5}{0,030} \approx 117.$$

Випишемо з таблиці [Дарков А.В. «Опір матеріалів», табл.13.1] значення коефіцієнта  $\varphi$  при значеннях  $\lambda$  найбільш близьких до 117.

$$\begin{aligned} \lambda = 110 & \quad \varphi = 0,52, \\ \lambda = 120 & \quad \varphi = 0,45. \end{aligned}$$

За допомогою лінійної інтерполяції знайдемо величину  $\varphi_1^T$  при  $\lambda = 117$

$$\varphi_1^T = 0,52 - \frac{0,52 - 0,45}{10} \cdot (117 - 110) = 0,471.$$

Порівняємо прийняте і табличне значення коефіцієнта поздовжнього гнуття:

$$|\varphi_1 - \varphi_1^T| = |0,5 - 0,471| = 0,029 > 0,01.$$

Оскільки прийняте і табличне значення  $\varphi$  відрізняються більш ніж на 0,01, то необхідно продовжити розрахунок у другому наближенні.

У другому наближенні візьмемо

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^T}{2} = \frac{0,5 + 0,471}{2} = 0,4855.$$

Тоді

$$F_2 \geq \frac{6,25 \cdot 10^{-3}}{\varphi_2} = \frac{6,25 \cdot 10^{-3}}{0,4855} = 12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2;$$

$$i_{\min} = 0,268 \sqrt{F_2} \geq 0,268 \sqrt{12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 3,044 \cdot 10^{-2} \text{ м};$$

$$\lambda_2^{\max} = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} \leq \frac{0,7 \cdot 5}{3,044 \cdot 10^{-2}} \approx 115,$$

$$\begin{aligned} \lambda &= 110 & \varphi &= 0,52, \\ \lambda &= 120 & \varphi &= 0,45. \end{aligned}$$

За допомогою лінійної інтерполяції знайдемо величину  $\varphi_2^T$  при  $\lambda = 115$

$$\varphi_2^T = 0,52 - \frac{0,52 - 0,45}{10} \cdot (115 - 110) = 0,485.$$

Порівняємо прийняте і табличне значення коефіцієнта поздовжнього гнуття:

$$|\varphi_2 - \varphi_2^T| = |0,4855 - 0,485| = 0,0005 < 0,01$$

Оскільки прийняте і табличне значення  $\varphi$  відрізняються менш ніж на 0,01, зупинимо розрахунок на другому наближенні.

- 5) Перевіримо, чи виконується умова стійкості для даного стрижня якщо  $F_2 = 12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ ,  $\varphi_2^T = 0,485$ .

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{F_2} = \frac{1 \cdot 10^6 \text{ Н}}{12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2} = 77,52 \cdot 10^6 \text{ Па} = 77,52 \text{ МПа}$$

$$[\sigma] \cdot \varphi_2^T = 160 \text{ МПа} \cdot 0,485 = 77,6 \text{ МПа}$$

Оскільки  $\sigma_{\max} < [\sigma] \varphi$ , умова стійкості виконується.

Відсоткова розбіжність (недонапруження) становить:

$$\frac{|77,52 - 77,6|}{77,52} \cdot 100\% = 0,1\% < 5\%.$$

Остаточно візьмемо необхідну площу перерізу стрижня  $F \geq 12,9 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$ .

- 6) Знайдемо розмір  $d$ .

Оскільки для даного стрижня  $F = 5,215d^2$ , тоді:

$$d = \sqrt{\frac{F}{5,215}} \geq \sqrt{\frac{12,9 \cdot 10^{-3}}{5,215}} = 49,7 \cdot 10^{-3} \text{ м} = 49,7 \text{ мм}.$$

- 7) Визначимо критичну стискаючу силу.

Оскільки для сталі гранична гнучкість  $\lambda_{\text{ГРАН}} \approx 100 < \lambda_2^{\max} \approx 115$ , маємо право

застосовувати формулу Ейлера:

$$P_{KP} = \left( \frac{\pi}{\mu l} \right)^2 EI_{min},$$

де  $l$  - довжина стрижня, [м];

$\mu$  - коефіцієнт зведеної довжини стрижня;

$I_{min}$  - мінімальний момент інерції перерізу стрижня, [м<sup>4</sup>];

$E$  - модуль поздовжньої пружності (для сталі  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа).

Якщо  $I_{min} = 1,951 \cdot d^4 = 1,951 \cdot (49,7 \cdot 10^{-3})^4 = 1,19 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4$ , тоді

$$P_{KP} = \left( \frac{3,14}{0,7 \cdot 5} \right)^2 \cdot 2 \cdot 10^5 \cdot 1,19 \cdot 10^{-5} = 1,92 \text{ МН}$$

8) Визначимо коефіцієнт запасу стійкості:

$$n = \frac{P_{KP}}{P} = \frac{1,92}{1,00} = 1,92.$$

Приклад розв'язано.

### III. Порядок проведення заключної частини заняття.

Здійснити перевірку і оцінювання виконаних завдань. Підвести підсумок практичного заняття звернувши увагу на основні помилки при його виконанні.

## 3. Рекомендована література (основна, допоміжна), інформаційні ресурси в Інтернеті

### Основна

1. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.

2. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія, 2007. – 170 с.

3. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк.,1993. – 655 с.

4. Астанін В.В. Технічна механіка. Частина II. Опір матеріалів: Навч. посіб. – К.:Вид-во Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2009. – 192 с.

5. Астанін В.В., Бордачов М.М., Савченко М.І. Опір матеріалів: Розрахунково-проектні роботи: Навч. посібник / - К.: Книжкове вид-во НАУ,

2007. – 136 с.

6. Бордачов М.М. Опір матеріалів: навч. посіб. / М.М. Бордачов, М.І. Савченко. – 2-е вид., переробл. та доповн. – К.: НАУ, 2011. – 556 с.

### **Допоміжна**

7. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.

8. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.

9. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.