

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Опір матеріалів»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

***272 Авіаційний транспорт
(Аеронавігація)***

за темою— Геометричні характеристики плоских перерізів

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 22.02.2024 № 2

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 17.01.2024 № 6

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22.02.2024 № 2

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 05.01.2024 № 14

Розробник:

Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.

Рецензенти:

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

План лекції:

1. Статичний момент плоскої фігури.
2. Моменти інерції перерізу.
3. Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей.
4. Залежність між моментами інерції при повороті осей.
5. Головні моменти інерції.
6. Моменти інерції деяких простих і складних перерізів.

Рекомендована література:

Основна

1. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
2. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія, 2007. – 170 с.
3. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк.,1993. – 655 с.
4. Астанін В.В. Технічна механіка. Частина II. Опір матеріалів: Навч. посіб. – К.:Вид-во Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2009. – 192 с.
5. Астанін В.В., Бордачов М.М., Савченко М.І. Опір матеріалів: Розрахунково-проектні роботи: Навч. посібник / - К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 136 с.
6. Бордачов М.М. Опір матеріалів: навч. посіб. / М.М. Бордачов, М.І. Савченко. – 2-е вид., переробл. Та доповн. – К.: НАУ, 2011. – 556 с.

Додаткова

7. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
8. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
9. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

Текст лекції

1. Статичний момент плоскої фігури.

При вивченні розтягу і стиску прямого стержня ми бачимо, що як напруження, так і деформації залежать від величини площі поперечного перерізу стержня, тобто що ця площа характеризує опір стержня деформації

розтягу або стиску. Далі ми будемо вивчати кручення, згин і побачимо, що величина цих деформацій і напружень також залежить від інших геометричних величин. Усі такого роду величини називають “геометричними характеристиками” поперечного перерізу стержня або плоскої фігури, яка цей переріз зображає.

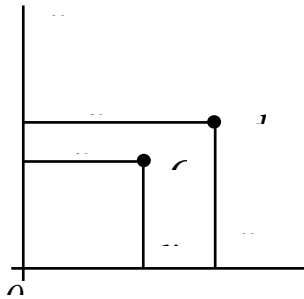
Як першу з таких величин розглянемо статичний момент плоскої фігури.

Візьмемо плоску фігуру з площею A в системі координат oxy (рис. 4.1). Статичним моментом плоскої фігури відносно осі ox , який позначається через S_x , називається величина

$$S_x = \int_A y dA. \quad (4.1)$$

Статичним моментом цієї ж фігури відносно осі oy буде

$$S_y = \int_A x dA. \quad (4.2)$$



Рис

Якщо ототожнити площу з силою, діючою перпендикулярно площині креслення, то інтеграли (4.1) і (4.2) можна розглянути як суми моментів сил відносно відповідних осей. За відомою із теоретичної механіки теоремою про момент рівнодіючої можна написати:

$$S_x = Ay_c; \quad S_y = Ax_c, \quad (4.3)$$

де x_c і y_c – координати центра ваги фігури.

Осі, які проходять через центр ваги фігури, називаються центральними осями. З формул (4.3) видно, що статичні моменти фігури відносно центральних осей дорівнюють нулеві. Для інших осей статичні моменти можуть бути додатні або від’ємні, залежно від положення центра ваги фігури відносно даної осі.

Розмірністю статичного моменту плоскої фігури є одиниця довжини у третьому степені.

З (4.3) випливають формули для визначення положення центра ваги фігури у прямокутній системі координат oxy :

$$x_c = S_y / A; \quad y_c = S_x / A. \quad (4.4)$$

Якщо фігуру можна представити у вигляді окремих простих фігур (квадратів, прямокутників, трикутників і т.д.), для яких відомі положення центрів ваги, то в цьому випадку статичний момент всієї фігури можна одержати як суму статичних моментів цих простих фігур. Це безпосередньо випливає з властивостей означеного інтеграла:

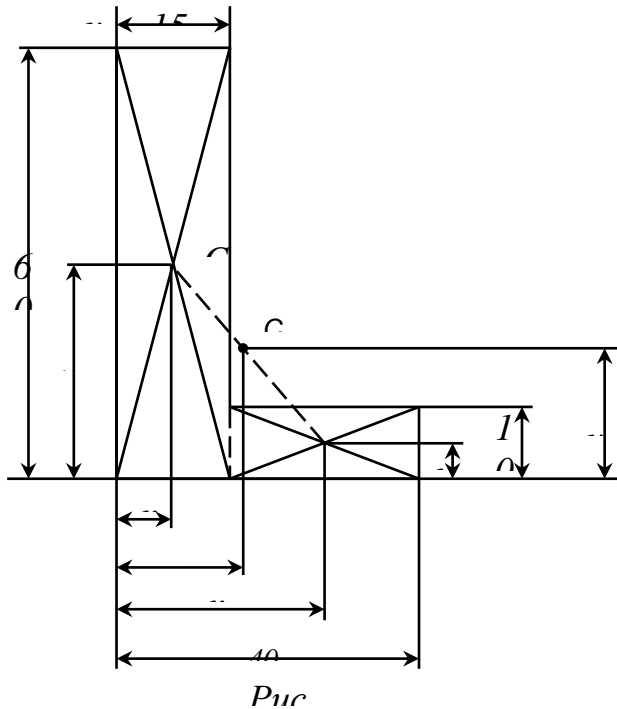
$$S = \sum S_i, \quad (4.5)$$

де S_i – статичний момент площі кожної окремої простої частини фігури.

Тоді формули (4.3) можна записати так:

$$S_x = \sum A_i y_{ci}; \quad S_y = \sum A_i x_{ci}, \quad (4.6)$$

де A_i – площа кожної окремої частини фігури; x_{ci}, y_{ci} – координати центрів ваги цих площ.



Використовуючи формули (4.4), одержимо зручні формули для обчислення центрів ваги складних фігур:

$$x_c = \sum A_i x_{ci} / \sum A_i; y_c = \sum A_i y_{ci} / \sum A_i. \quad (4.7)$$

Приклад 4.1. Визначити положення центра ваги перерізу, показаного на рис. 4.2.

Розв'язання. Розбиваємо переріз на два прямокутники:

$$A_1 = 60 \times 15 = 900 \text{ мм}^2; \quad A_2 = 25 \times 10 = 250 \text{ мм}^2.$$

Проводимо осі x і y , в яких визначаємо координати центрів ваги окремих прямокутників:

$$x_{c1} = 15 / 2 = 7.5 \text{ мм}; \quad y_{c1} = 60 / 2 = 30 \text{ мм};$$

$$x_{c2} = 15 + 25 / 2 = 27.5 \text{ мм};$$

$$y_{c2} = 10 / 2 = 5 \text{ мм}.$$

За формулами (4.7) маємо:

$$x_c = \sum A_i x_{ci} / \sum A_i = (A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2}) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (900 \cdot 7.5 + 250 \cdot 27.5) / (900 + 250) = 11.85 \text{ мм};$$

$$y_c = \sum A_i y_{ci} / \sum A_i = (A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2}) / (A_1 + A_2) =$$

$$= (900 \cdot 30 + 250 \cdot 5) / (900 + 250) = 24.57 \text{ мм}$$

За цими координатами знаходимо точку C - центр ваги фігури. Вона лежить на лінії, що з'єднує точки C_1 і C_2 .

2. Моменти інерції перерізу.

Осьовими або екваторіальними моментами інерції перерізу відносно осей x і y (рис. 4.3) називають геометричні характеристики, чисельно рівні інтегралам

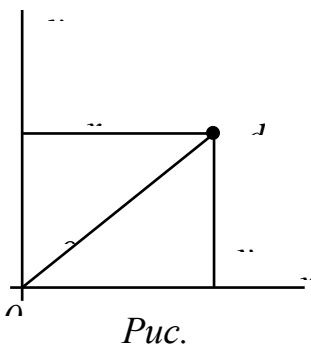
$$I_x = \int_A y^2 dA; \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad (4.8)$$

де x і y - відстані від елементарної площинки dA до відповідно осей oy і ox .

На основі теореми про середнє значення означеного інтеграла моменти інерції можна зобразити так:

$$I_x = \int_A y^2 dA = y_{cp}^2 \cdot A; \quad I_y = \int_A x^2 dA = x_{cp}^2 \cdot A.$$

Середні значення x_{cp} і y_{cp} називають радіусами інерції перерізу і звичайно позначають i_x та i_y . Таким чином, осьові моменти інерції можна записати так:



$$I_x = i_x^2 A, I_y = i_y^2 A. \quad (4.9)$$

З останніх формул одержимо для радіусів інерції вирази

$$i_x = \sqrt{I_x / A}; i_y = \sqrt{I_y / A}. \quad (4.10)$$

Полярним моментом інерції плоскої фігури відносно точки (полюса) О (рис. 4.3) називається геометрична характеристика, чисельно рівна інтегралові

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (4.11)$$

де ρ - відстань від елементарної площинки до полюса.

Як полярний, так і осеві моменти інерції можуть набути лише додатних значень. Їх розмірності є одиниця довжини у четвертому степені.

Оскільки між координатами ρ , y , x елементарної площинки dA (рис. 4.3) існує залежність $\rho^2 = x^2 + y^2$, то

$$\int_A \rho^2 dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA,$$

тобто

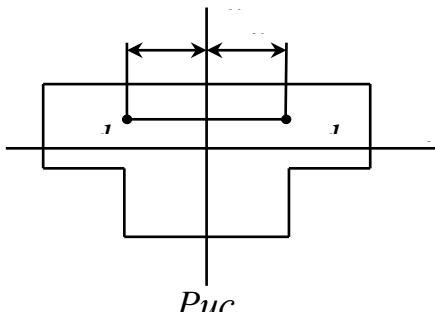
$$I_p = I_x + I_y. \quad (4.12)$$

Отже, полярний момент інерції фігури відносно довільного полюса дорівнює сумі осевих моментів інерції відносно взаємно перпендикулярних осей з початком у цьому полюсі.

Відцентровим моментом інерції плоскої фігури називається геометрична характеристика, яка чисельно дорівнює інтегралові

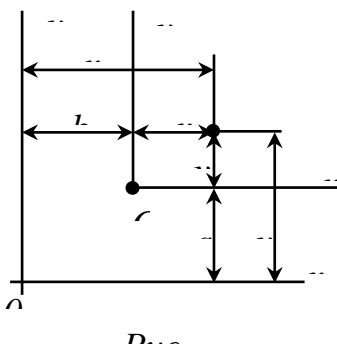
$$I_{xy} = \int_A xy dA \quad (4.13)$$

Відцентровий момент інерції може набути додатних і від'ємних значень, а при певному положенні осей він може бути рівним нулю.



Якщо взаємно перпендикулярні осі x і y або одна з них будуть осями симетрії фігури, то відносно таких осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю. Дійсно, для симетричної фігури завжди можна виділити два елементи її площі (рис. 4.4), які мають однакові ординати y і рівні, але протилежні за знаком абсциси x . Складаючи суму добутків $xy dA$ для таких елементів, тобто обчислюючи інтеграл (4.13), одержимо нуль.

3. Залежність між моментами інерції при паралельному переносі осей.



Розглянемо деякий переріз з площею A , віднесений до довільної прямокутної системи координат $O_1x_1y_1$ (рис. 4.4). Через центр ваги C проведемо центральні осі x і y , відповідно

паралельні осям x_1 і y_1 . Осьовий момент інерції перерізу відносно осі x_1 можна записати так:

$$I_{x1} = \int_A y_1^2 dA$$

Враховуючи, що $y_1 = y + a$ (рис. 4.4), маємо:

$$I_{x1} = \int_A (y + a)^2 dA = \int_A y^2 dA + 2a \int_A y dA + a^2 \int_A dA$$

Так, як $\int_A y dA = S_x = 0$ (як статичний момент плоскої фігури відносно центральної осі), а $\int_A dA = A$

$$\text{то } I_{x1} = I_x + a^2 A \quad (4.14)$$

Аналогічно для моменту інерції відносно осі y_1 :

$$I_{y1} = I_y + b^2 A \quad (4.15)$$

З одержуваних формул (4.14) і (4.11) випливає, що момент інерції відносно довільної осі дорівнює осьовому моменту інерції відносно центральної осі, паралельної довільній осі, плюс добуток площі перерізу на квадрат відстані між цими осями.

Знайдемо ще залежність між відцентровими моментами інерції відносно взаємно паралельних систем координат, з яких одна система центральна.

Відцентровий момент інерції фігури відносно осей x_1 і y_1

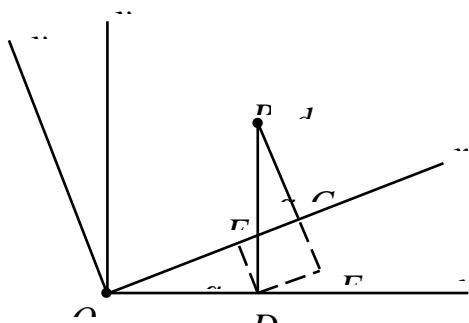
$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + b)(y + a) dA = \int_A xy dA + b \int_A y dA + a \int_A x dA + ab \int_A dA$$

Враховуючи, що $\int_A xy dA = I_{xy}$; $\int_A y dA = S_x = 0$ і $\int_A x dA = S_y = 0$ (як статичні моменти площі відносно центральних осей x і y); $\int_A dA = A$, одержимо

$$I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA \quad (4.16)$$

Отже, відцентровий момент інерції відносно системи взаємно перпендикулярних осей, паралельних центральним осям, дорівнює відцентровому моменту інерції відносно центральних осей плюс добуток площі фігури на відстані між осями.

4. Залежність між моментами інерції при повороті осей.



Знайдемо залежність між моментами інерції відносно осей x , y і моментами інерції відносно осей x_1 , y_1 , повернутих на кут α (рис. 4.6). Нехай $I_x > I_y$ і додатний кут α відліковується від осі x проти годинникової стрілки.

Для рішення поставленої задачі знайдемо залежності між координатами площини dA у початкових і повернутих координатних осях.

З креслення маємо:

$$\begin{aligned} x_1 &= OC = OE + EC = OE + DF = \\ &= OD \cos \alpha + DB \sin \alpha = x \cos \alpha + y \sin \alpha; \quad (4.17) \end{aligned}$$

$$y_1 = BC = BF - DE = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (4.18)$$

Визначимо момент інерції відносно осей x_1 і y_1 .

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cos \alpha - x \sin \alpha)^2 dA = \int_A y^2 \cos^2 \alpha dA - 2 \int_A xy \sin \alpha \cos \alpha dA + \int_A x^2 \sin^2 \alpha dA,$$

або

$$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha \quad (4.19)$$

Аналогічно

$$I_{y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 dA = I_x \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (4.20)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A (x \cos \alpha + y \sin \alpha)(y \cos \alpha - x \sin \alpha) dA = I_x \sin 2\alpha / 2 - I_y \sin 2\alpha / 2 + I_{xy} \cos 2\alpha.$$

Складаючи (4.19) і (4.20), одержуємо

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_p \quad (4.21)$$

З останньої залежності видно, що при повороті координатних осей полярний момент інерції не змінюється, а сума осьових моментів інерції залишається незмінною, тобто

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = \text{const.} \quad (4.22)$$

5. Головні моменти інерції.

Якщо сума двох змінних величин залишається сталою величиною, що витікає з формули (4.22), то одна з них зменшується, а друга збільшується. Отже, при якомусь положенні осей один з осьових моментів інерції досягне максимального, а другий мінімального значень. Знайдемо значення кута α_0 , при

якому осьові моменти інерції I_{x_1} і I_{y_1} набувають екстремальних значень. Для

цього візьмемо від I_{x_1} або I_{y_1} першу похідну по α і прирівняємо її нулю:

$$dI_{x_1} / d\alpha = -2I_x \cos \alpha_0 \sin \alpha_0 + 2I_y \sin \alpha_0 \cos \alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

або

$$(I_{x_1} + I_{y_1}) \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

звідки

$$\tan 2\alpha_0 = 2I_{xy} / (I_y - I_x) \quad (4.23)$$

Ця формула визначає положення двох осей, відносно однієї з яких осьовий момент інерції максимальний, а відносно другої мінімальний.

Такі осі називаються головними. Моменти інерції відносно головних осей називаються головними моментами інерції. Їх легко визначити за формулами (4.19) і (4.20), якщо підставити $\alpha = \alpha_0$, що вираховується за формулою (4.23).

Відносно головних осей відцентровий момент інерції фігури дорівнює нулю. Дійсно, порівнюючи $I_{x_1y_1}$ за формулою (4.21) нулю, одержуємо

$$[(I_x - I_y)/2] \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

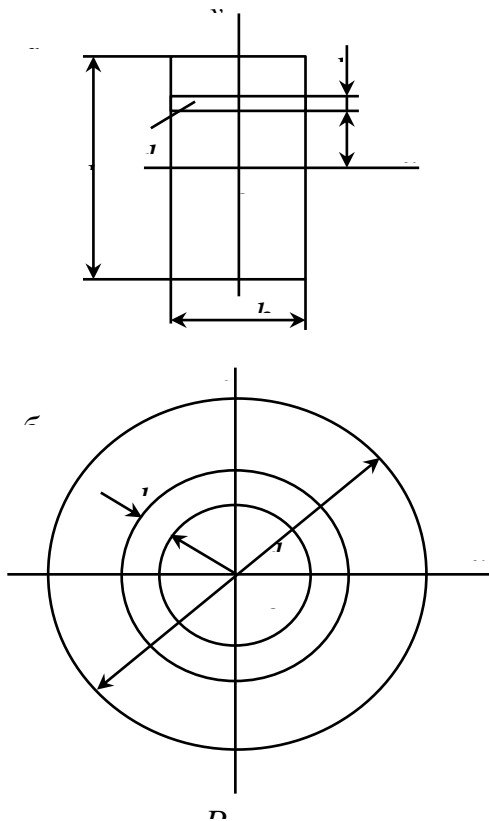
Звідки для $\tan 2\alpha_0$ знову одержуємо формулу (4.23)

Таким чином, головними осями називають осі, які мають такі властивості:

1. Відцентровий момент інерції відносно цих осей дорівнює нулю.
2. Моменти інерції відносно головних осей мають екстремальні значення.

Якщо головні осі проходять через центр ваги перерізу, то такі осі називаються головними центральними осями, а відносно них осьові моменти інерції називаються головними центральними моментами інерції.

6. Моменти інерції деяких простих і складних перерізів.



1. Прямокутник (рис. 4.7,а). Вирахуємо момент інерції відносно центральної осі x_c . За dA візьмемо площину нескінченно тонкого шару $dA = bdy$. Тоді

$$I_{x_c} = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{+h/2} y^2 b dy = bh^3 / 12.$$

Отже

$$I_{x_c} = bh^3 / 12. \quad (4.24)$$

Аналогічно одержимо

$$I_{y_c} = hb^3 / 12 \quad (4.25)$$

2. Круг (рис. 4.7,б). Спочатку визначимо полярний момент інерції відносно центра круга:

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^{d/2} 2\pi \rho^3 d\rho = \pi d^4 / 32.$$

Отже

$$I_p = \pi d^4 / 32 \approx 0.1 d^4. \quad (4.26)$$

Так як для круга $I_{x_c} = I_{y_c}$, то згідно з формулою (4.12) $I_p = 2I_{x_c} = 2I_{y_c}$. Тоді

$$I_{x_c} = I_{y_c} = I_p / 2 = \pi d^4 / 64 \approx 0.05 d^4. \quad (4.27)$$

Момент інерції складної фігури дорівнює сумі моментів інерції її складових частин:

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + \dots \quad (4.28)$$

Це безпосередньо витікає з властивостей означеного інтегралу:

$$\int_A y^2 dA = \int_{A1} y^2 dA + \int_{A2} y^2 dA + \int_{A3} y^2 dA + \dots,$$

де $A=A_1+A_2+A_3+\dots$

Таким чином, для визначення моменту інерції складної фігури треба розбити її на ряд простих фігур, обчислити моменти інерції цих фігур і потім просумувати ці моменти інерції.

Указана теорема справедлива також і для відцентрованого моменту інерції.

Моменти інерції прокатних перерізів (двотавр, швелер, кутник і т.д.) приводяться в таблицях сортаменту.