

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та  
фундаментальних дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

навчальної дисципліни «Опір матеріалів»  
вибіркових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

***272 Авіаційний транспорт  
(Аеронавігація)***

**за темою – Складний опір**

**Кременчук 2023**

### **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 22.02.2024 № 2

### **СХВАЛЕНО**

Методичною радою Кременчуцького  
льотного коледжу Харківського  
національного університету  
внутрішніх справ  
Протокол від 17.01.2024 № 6

### **ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з технічних дисциплін  
Протокол від 22.02.2024 № 2

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 05.01.2024 № 14

### **Розробник:**

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.*

### **Рецензенти:**

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

### План лекції:

1. Косий згин.
2. Сумісний згин з крученням.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
2. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія, 2007. – 170 с.
3. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк.,1993. – 655 с.
4. Астанін В.В. Технічна механіка. Частина II. Опір матеріалів: Навч. посіб. – К.:Вид-во Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2009. – 192 с.
5. Астанін В.В., Бордачов М.М., Савченко М.І. Опір матеріалів: Розрахунково-проектні роботи: Навч. посібник / - К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 136 с.
6. Бордачов М.М. Опір матеріалів: навч. посіб. / М.М. Бордачов, М.І. Савченко. – 2-е вид., переробл. та доповн. – К.: НАУ, 2011. – 556 с.

#### Додаткова

7. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
8. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
9. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

### Текст лекції

#### 1. Косий згин.

Дотепер ми розглядали прості випадки навантаження стержня, які викликають його осьовий розтяг або стиск, кручення та прямий згин. Опір стержня у цих випадках прийнято називати простим. При сумісній дії кількох простих навантажень виникає так званий складний опір стержня. Одним з випадків складного опору є косий згин.

Косий згин викликається навантаженням, що проходить через центр ваги поперечного перерізу стержня під довільним кутом до його головних центральних осей. На рис.8.1 кут нахилу площини дії навантаження (так званої

силової площини)  $mn$  до головної центральної осі у позначений через  $\varphi$ . Визначимо нормальні напруження у поперечному перерізі стержня при косому згині.

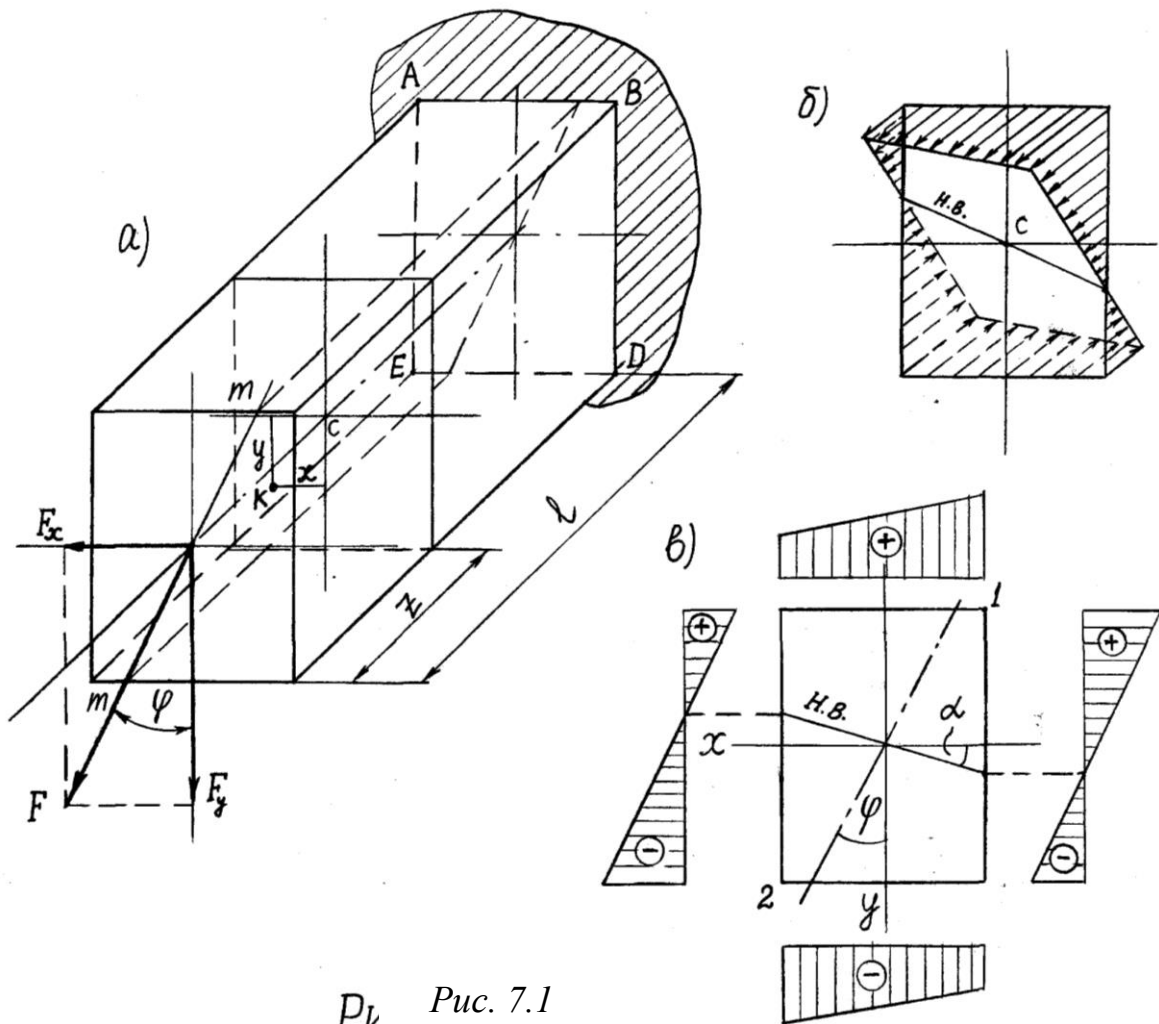


Рис. 7.1

Розклавши сили  $F$  на дві складові  $F_x$  та  $F_y$ , матимемо прямий згин бруса у двох взаємно перпендикулярних головних площинах. У довільному перерізі (на відстані  $z$  від вільного кінця бруса) будуть діяти згинальні моменти  $M_x = -F_y z$  і  $M_y = -F_x z$ . Використовуючи формулу (7.13), визначимо напруження в будь-якій точці  $K$  розглядуваного перерізу: від моменту  $M_x$  -  $\sigma_{M_x} = -M_x y / I_x$ ; від моменту  $M_y$  -  $\sigma_{M_y} = -M_y x / I_y$ . Згідно з принципом суперпозиції загальне напруження у будь-якій точці довільного перерізу буде дорівнювати

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (7.1)$$

Згинальні моменти легко визначити за відомим значенням кута  $\Pi$ :

$M_x = -F_y z = -F \cos \varphi \cdot z = -M \cos \varphi$ ;  $M_y = F_x z = F \sin \varphi \cdot z = M \sin \varphi$ , де  $M=Fz$  – згинальний момент у даному перерізі бруса. Тоді формула (8.1) набирає вигляду:

$$\sigma = -M \left( \frac{y}{I_x} \cos \varphi + \frac{x}{I_y} \sin \varphi \right). \quad (7.2)$$

Формула (8.2) завжди буде справедливою, якщо систему координат вибирати так, щоб діюча на брус сила лежала у першому квадранті, а координати досліджуваних точок (x,y) брати зі своїми знаками.

Геометричне місце точок, у яких нормальні напруження дорівнюють нулеві, називається нейтральною лінією. Як видно з формул (7.1) і (7.2), просторова епіюра нормальних напружень при косому згині утворює площину, що проходить через початок координатної системи (рис. 7.1,б). Нейтральна лінія, як лінія перетину цієї площини з площиною перерізу, є прямою, що також проходить через початок координатної системи. Її рівняння визначається з умови  $\int (x,y)=0$ , тобто

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0,$$

звідки

$$y = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} x = kx, \quad (7.3)$$

Кут нахилу  $\alpha$  нейтральної лінії до осі  $x$  знаходиться з виразу для кутового коефіцієнта  $k$  прямої (8.3):

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{M_y I_x}{M_x I_y} = -\operatorname{tg} \varphi \frac{I_x}{I_y}. \quad (7.4)$$

Знаючи положення нейтральної лінії, можна вказати ті точки перерізу стержня, в яких виникають найбільші за абсолютною величиною нормальні напруження: це точки найбільш віддалені від нейтральної лінії. На рис.7.1,в вони позначені цифрами 1 і 2; показана також епіюра нормальних напружень у суміщенні з площиною рисунку.

У прямокутному перерізі, а також в інших перерізах з двома осями симетрії, які вписуються в прямокутник і мають спільні з ним кутові точки, максимальні напруження виникають у кутових точках перерізу і дорівнюють за абсолютною величиною

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y}. \quad (7.5)$$

Як і при прямому згині, міцність балки при косому згині залежить у першу чергу від величини максимальних нормальних напружень, що виникають у її поперечних перерізах. Тому перевірка міцності при косому згині полягає у порівнянні максимального нормального напруження у перерізі з максимальним за абсолютною величиною рівнодійним моментом  $M_{\max}$  з допустимим напруженням  $\sigma_{adm}$ . Так, наприклад, для балки, показаної на рис.8.1,а максимальний згинальний момент буде у перерізі ABDE (в затисненні):  $M_{\max} = Fl$ . Складові цього моменту:  $M_{x\max}$  і  $M_{y\max}$ . Тоді умова міцності запишеться так

$$\frac{M_{x\max}}{W_x} + \frac{M_{y\max}}{W_y} \leq \sigma_{adm} \quad (7.6)$$

Переміщення будь-якої точки осі балки визначається як геометрична сума переміщень, викликаних заданим навантаженням у напрямках головних центральних осей перерізу. Наприклад, прогин  $f$  кінця консолі (рис.7.1,а) дорівнюватиме

$$f = \sqrt{f_x^2 + f_y^2} \quad (7.7)$$

де  $f_x$  і  $f_y$  - складові прогини  $f$  балки від складових сили  $F$ , тобто від  $F_x$  і  $F_y$  (рис.7.2). Визначення  $f_x$  і  $f_y$  може бути здійснено, наприклад, за методом початкових параметрів, або методом інтегрування диференціального рівняння пружної лінії (зігнутої осі) балки.

Скористуємося результатом прикладу 7.3. Маємо

$$f_y = \frac{Fl^3 \cos \varphi}{3EI_x} ; \quad f_x = \frac{Fl^3 \sin \varphi}{3EI_y} .$$

Напрямок повного прогину  $f$  утворює з віссю  $y$  кут, тангенс якого

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{f_x}{f_y} = \operatorname{tg} \varphi \frac{I_x}{I_y} \quad (7.8)$$

Як видно, при  $I_x/I_y \neq 1$  кути  $\alpha$  і  $\varphi$  нерівні, отже, у випадку косого згину напрямок дії навантаження і напрямок прогину не збігається. Це розходження тим більше, чим більше відношення  $I_x/I_y$ .

При порівнянні останньої формули з формулою (7.4) видно, що кут нахилу прогину до осі  $y$  дорівнює кутові нахилу

Рис. 7.2

нейтральної лінії до осі  $x$ , тобто що напрямки прогину і напрямок нейтральної лінії взаємно перпендикулярні (рис.7.2).

**Приклад 8.1.** Перевірити міцність чавунного бруса (рис. 7.3,а), якщо допустимі напруження на розтяг  $\sigma_{adm.t}=35\text{МПа}$ , на стиск  $\sigma_{adm.c}=130\text{МПа}$ . Побудувати епюру напружень для небезпечного поперечного перерізу бруса.

**Розв'язання.** Брус працює на плоский косий згин. Розкладаємо навантаження на складові за головними осями  $x$  і  $y$  (рис. 7.3,б) і одержуємо сполучення двох прямих згинів. Небезпечним є переріз затиску бруса.

$$\max M_x = \frac{q_z l^2}{2} = \frac{(q \cos \varphi) l^2}{2} = \frac{150 \cdot 0,866 \cdot 1,2^2}{2} = 93,5 \text{ Нм};$$

$$\max M_y = \frac{q_y l^2}{2} = \frac{(q \sin \varphi) l^2}{2} = \frac{150 \cdot 0,5 \cdot 1,2^2}{2} = 54,1 \text{ Нм}.$$

Не визначаючи величин нормальних напружень від моментів  $M_x$  та  $M_y$ , покажемо характер епюр цих напружень (рис.7.3,в).

Для визначення небезпечної точки перерізу знайдемо положення нульової лінії:

$$\tan \alpha = -\frac{M_y}{M_x} \frac{I_x}{I_y} = -\tan \varphi \frac{I_x}{I_y},$$

де моменти інерції поперечного перерізу бруса

$$I_x = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{7 \cdot 11^4}{12} = 2440 \text{ см}^4; \quad I_y = \frac{\pi d^4}{64} - \frac{hb^3}{12} = \frac{\pi \cdot 16^4}{64} - \frac{11 \cdot 7^3}{12} = 2910 \text{ см}^4.$$

Тоді

$$\tan \alpha = -\tan 30^\circ \frac{2440}{2910} = -0,485; \quad \alpha = -25^\circ 52'$$

Від'ємний кут  $\alpha$  відкладаємо від осі  $x$  за годинниковою стрілкою і проводимо нульову лінію (н.л.).

Для побудови сумарної епюри напружень визначаємо точки перерізу, найбільш віддалені від нульової лінії. Ці точки одержуємо, провівши дві дотичні до перерізу, паралельні нульовій лінії. На рис.8.3,в це точки А і В. З них більш небезпечна точка А (у ній виникають розтягуючі напруження).

Вісь епюри  $\sigma$  перпендикулярна нульовій лінії. Для побудови епюри достатньо обчислити ординату однієї її точки, так як нульова точка вже визначена. Виразуємо  $\sigma_A$

$$\sigma_A = \frac{\max M_x y_A}{I_x} + \frac{\max M_y x_A}{I_y} = \frac{93,5 \cdot 10^3}{2440 \cdot 10^4} 72 + \frac{54,1 \cdot 10^3}{2910 \cdot 10^4} 34,9 = 34,1 \text{ МПа},$$

де

$$x_A = \frac{1}{2} d \sin \alpha = \frac{1}{2} 16 \sin 25^\circ 52' = 3,49 \text{ см}; \quad y_A = \frac{1}{2} d \cos \alpha = \frac{1}{2} 8 \cos 25^\circ 52' = 7,2 \text{ см}$$

координати точки А. Так як  $\sigma_A < \sigma_{\text{adm.t}}$ , то міцність балки забезпечена.

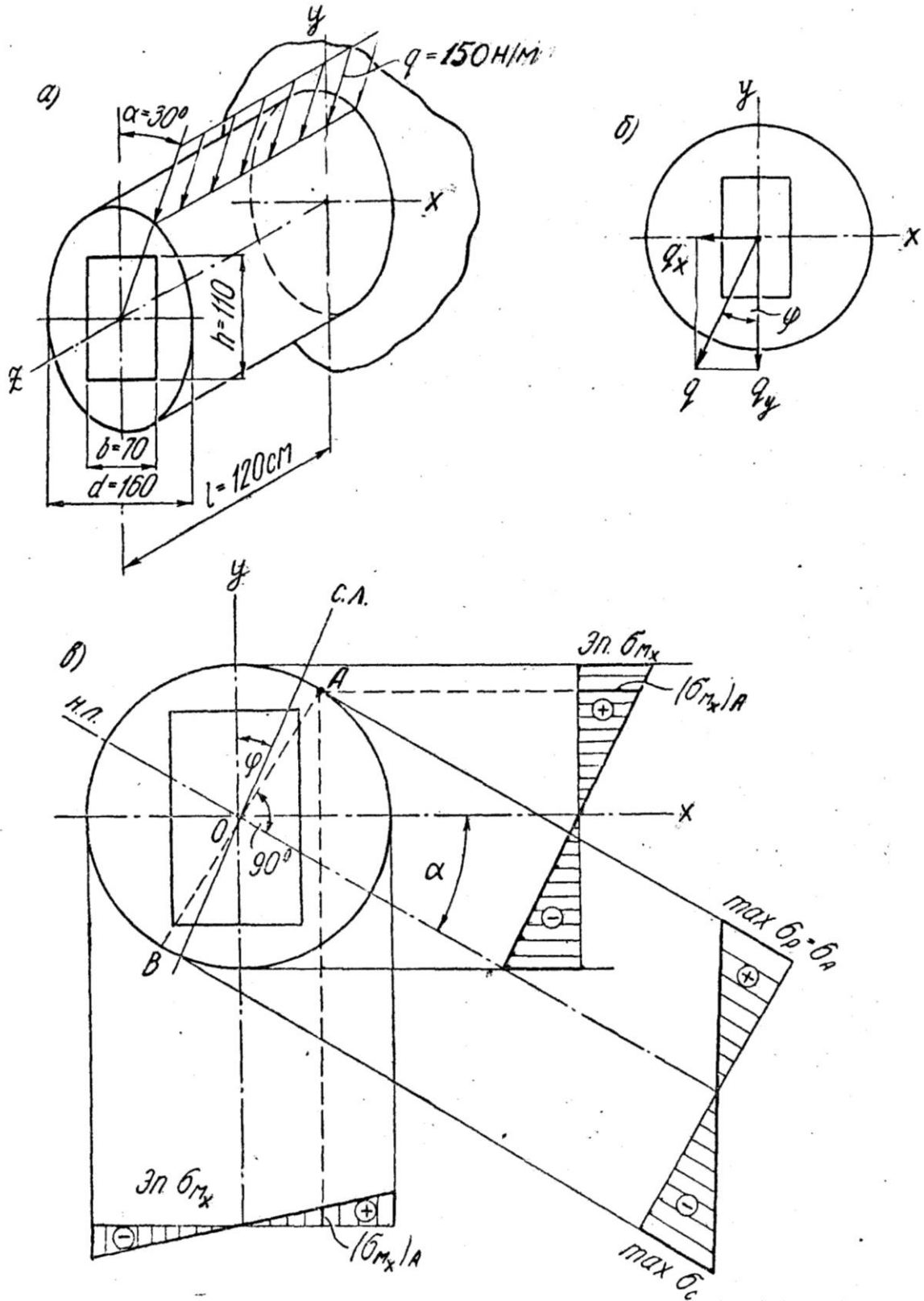


Рис. 7.3

## 2.Сумісний згин з крученням.

Нехай на стержень (рис.8.4,а) у кінцевому перерізі діє сила  $F$ , яка визиває прямий його згин, і пара сил  $T_e$ , закручуюча стержень. Епюри згинальних і крутних моментів побудовані на рис.7.4,б,в. Таким чином, розглядуваний стержень водночас працює на згин і кручення. Небезпечним перерізом буде опорний переріз А, де одночасно виникають максимальний згинальний і крутний моменти.

Ми обмежимося лише розглядом стержнів круглого поперечного перерізу. При сумісному поперечному згині і крученні у поперечних перерізах стержня виникають нормальні напруження при дії згинальних моментів і дотичні напруження, зв'язані з поперечними силами і крутними моментами. Однак вплив поперечних сил у круглих перерізах настільки малий, що цими силами

Рис. 7.4

нехтують і беруть до уваги лише нормальні напруження згину і дотичні напруження кручення.

При згині такого стержня у площині  $Ozy$  і крученні навколо осі  $z$  епюри нормальних і дотичних напружень матимуть вигляд, показаний на рис.7.5,а. При сумісній дії цих напружень в околі довільної точки поперечного перерізу (за винятком точок на нейтральній осі  $x$ ) виникатиме плоский напружений стан (рис. 7.5,б). Небезпечними точками у перерізі стержня є точки, у яких одночасно виникають максимальні нормальні та дотичні напруження, тобто крайні точки перерізу на осі  $y$ , найбільш віддалені від нейтральної осі. Ці максимальні напруження визначаються за формулами (7.19) і (6.6):  $\sigma = M/W$ ,  $\tau = T/W_p$ .

Міцність стержня при плоскому напруженому стані треба перевірити за однією з теорій міцності, залежно від очікуваного характеру руйнування. Якщо передбачається пластичне руйнування, то, застосовуючи третю теорію

(найбільших дотичних напружень), знайдемо еквівалентне напруження за виразом (3.17):  $\sigma_{eIII} = \sigma_1 - \sigma_3$ . Для визначення головних напружень використовуємо формулу (3.9)

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}.$$

Тоді

$$\sigma_{eIII} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}. \quad (7.9)$$

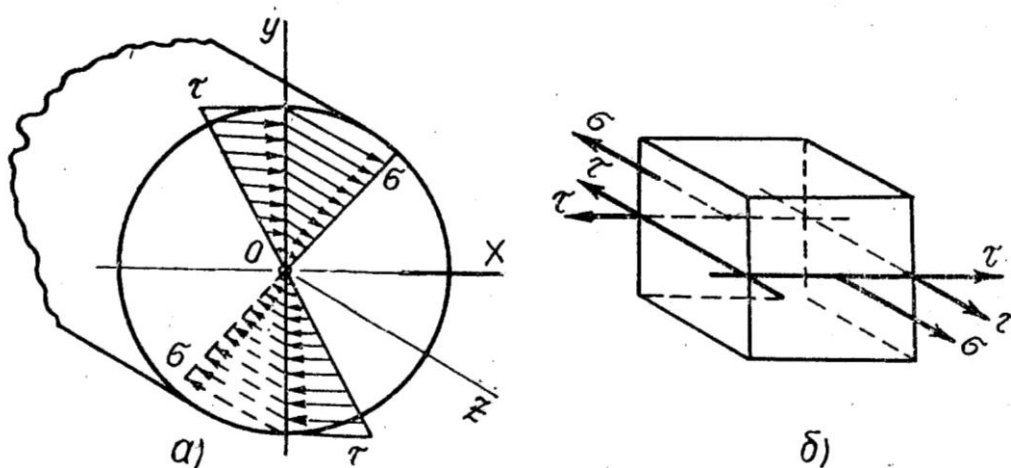


Рис. 7.5

Підставляючи значення  $\sigma$  і  $\tau$ , маємо

$$\sigma_{eIII} = \sqrt{\left(\frac{M}{W}\right)^2 + 4\left(\frac{T}{W_p}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{W}{W}\right)^2 + 4\left[\frac{T}{(2W)}\right]^2} = \frac{\sqrt{M^2 + T^2}}{W}.$$

Вираз, що стоїть у чисельнику, назвемо еквівалентним моментом за третьою теорією міцності

$$M_{eIII} = \sqrt{M^2 + T^2}. \quad (7.10)$$

Використовуючи четверту теорію міцності, одержимо

$$M_{eIV} = \sqrt{M^2 + 0,75T^2} \quad (7.11)$$

Розрахункова формула для круглих стержнів, працюючих при сумісному згині і крученні, буде мати вигляд:

$$\sigma_e = \frac{M_e}{W} \leq \sigma_{adm}. \quad (7.12)$$

Методику розрахунку вала на згин з крученням розглянемо на прикладі.

**Приклад 8.2.** Перевірити міцність вала (рис. 7.6,а), який за допомогою пасових передач передає потужність  $P=40$ кВт при частоті обертання  $n=600$  об/хв. Матеріал вала сталь 45 з границею текучості  $\sigma_y=280$ МПа, допустимий коефіцієнт запасу міцності  $S_{adm}=2,5$ , діаметр вала  $d=60$ мм; діаметри шківів  $D_1=0,3$ м і  $D_2=0,5$ м.

**Розв'язання.** Визначаємо скручуючий момент на шківках передач:

$$T_{e1} = T_{e2} = T_e = 9550 \frac{40}{600} = 636,7 \text{ Нм}$$

Прикладаємо знайдені зовнішні моменти  $T_{e1}$  і  $T_{e2}$  (рис. 7.6,б) і будуємо епюру крутних моментів. У перерізах ділянки, розташованої між шківками  $T = T_{e1} = T_e = 636,7 \text{ Нм} = \text{const}$  (рис. 7.6,в).

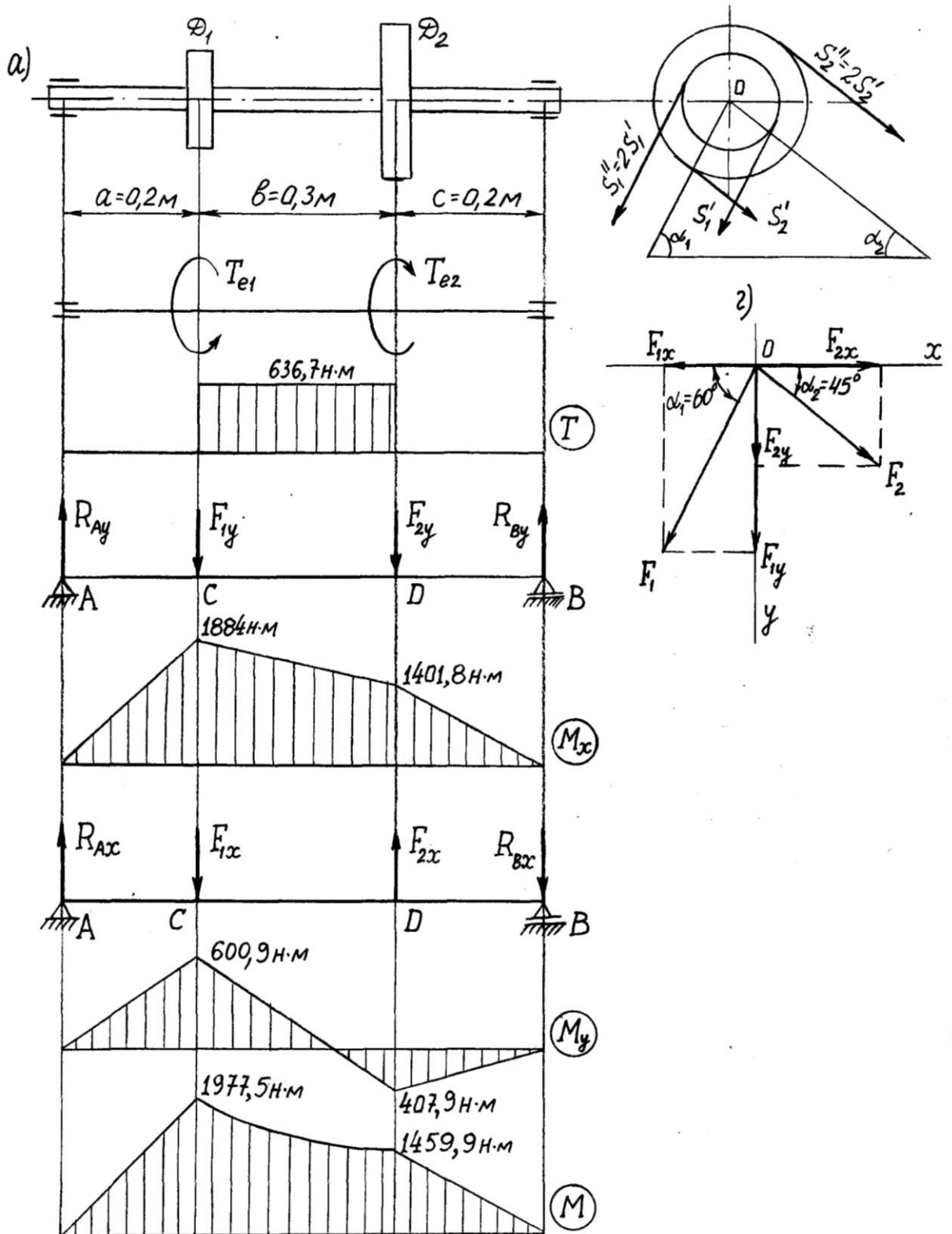


Рис. 7.6

Визначаємо сили, що передаються від шківів на вал. Шків1:

$$\sum M_0 = 0; \quad S_1'' \frac{D_1}{2} - S_1' \frac{D_1}{2} - T_{e1} = 0, \quad S_1'' = 2S_1'; \quad S_1' = \frac{2T_{e1}}{D_1} = \frac{2 \cdot 636,7}{0,3} = 4244,7 \text{ Н};$$

$$S_1'' = 2S_1' = 2 \cdot 4244,7 = 8489,4 \text{ Н}.$$

Шків2:  $\sum M_0 = 0; \quad S_2'' \frac{D_2}{2} - S_2' \frac{D_2}{2} - T_{e2} = 0;$

$$S_2'' = \frac{2T_{e2}}{D_2} = \frac{2 \cdot 636,7}{0,5} = 2546,8 \text{ Н}; \quad S_2'' = 2S_2' = 2 \cdot 2546,8 = 5093,6 \text{ Н}$$

Обчислюємо сумарні сили, що передаються від шківів на вал:

$$F_1 = S_1' + S_1'' = 4244,7 + 8489,4 = 12734,1 \text{ Н}; \quad F_2 = S_2' + S_2'' = 5093,6 + 2546,8 = 7640,4 \text{ Н}.$$

Визначаємо вертикальні і горизонтальні складові сил, прикладених до вала (рис.8.6,г):

$$F_{1x} = F_1 \cos \alpha_1 = 12734,1 \cdot \cos 60^\circ = 6367 \text{ Н}; \quad F_{1y} = F_1 \sin \alpha_1 = 12734,1 \cdot \sin 60^\circ = 11027,7 \text{ Н};$$

$$F_{2x} = F_2 \cos \alpha_2 = 7640,4 \cdot \cos 45^\circ = 5401,8 \text{ Н}; \quad F_{2y} = F_2 \sin \alpha_2 = 7640,4 \cdot \sin 45^\circ = 5401,8 \text{ Н}.$$

Розглядаємо згин вала у вертикальній площині (рис.8.6,д). Знаходимо реакції опор і будуємо епюру згинальних моментів відносно осі x ( $M_x$ ).

$$\sum M_A = 0: \quad R_{By}(a+b+c) - F_{2y}(a+b) - F_{1y}a = 0; \quad R_{By} = 7009,2 \text{ Н}$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_{Ay}(a+b+c) + F_{1y}(a+b) + F_{2y}c = 0; \quad R_{Ay} = 9420,3 \text{ Н}$$

Перевірка:  $\sum Y = R_{Ay} + R_{By} - F_{1y} - F_{2y} = 9420,3 + 7009,2 - 11027,7 - 5401,8 = 0$ .

Згинальні моменти у характерних перерізах:  $M_{xc} = R_{Ay}a = 9420,3 \cdot 0,2 = 1884 \text{ Нм}$ ;  $M_{xD} = R_{By}c = 7009,2 \cdot 0,2 = 1401,8 \text{ Нм}$ . Епюра згинальних моментів  $M_x$  показана на рис.8.6,е.

Розглядаємо згин вала у горизонтальній площині (рис.8.6,є). Звертаємо увагу на те, що напрямки сил  $F_{1x}$  і  $F_{2x}$  не співпадають (див.рис.8.6,г). Визначаємо реакції опор:

$$\sum M_A = 0: \quad -R_{Bx}(a+b+c) + F_{2x}(a+b) - F_{1x}a = 0; \quad R_{Bx} = 2039,3 \text{ Н};$$

$$\sum M_B = 0: \quad -R_{Ax}(a+b+c) + F_{1x}(a+b) - F_{2x}c = 0; \quad R_{Ax} = 9420,3 \text{ Н}.$$

Перевірка:  $\sum X = R_{Ax} - R_{Bx} - F_{1x} + F_{2x} = 30004,5 - 2039,3 - 6367 + 5401,8 = 0$ .

Згинальні моменти:  $M_{yc} = R_{Ax}a = 30004,5 \cdot 0,2 = 6000,9 \text{ Нм}$ ;

$M_{yD} = -R_{Bx}c = -2039,3 \cdot 0,2 = -407,9 \text{ Нм}$ .

Будуємо епюру згинальних моментів  $M_y$  (рис.8.6,ж).

Знаходимо сумарні згинальні моменти у характерних перерізах:

$$M_c = \sqrt{M_{xc}^2 + M_{yc}^2} = \sqrt{(1884)^2 + (6000,9)^2} = 1977,5 \text{ Нм};$$

$$M_D = \sqrt{M_{xD}^2 + M_{yD}^2} = \sqrt{(1401,8)^2 + (-407,9)^2} = 1459,9 \text{ Нм}.$$

Будуємо епюру сумарних згинальних моментів (рис.8.6,з).

Якщо скористуємося третьою теорією міцності (8.10), то найбільший еквівалентний момент у перерізі С буде дорівнювати

$$M_{eIII} = \sqrt{M_c^2 + T^2} = \sqrt{(1977,5)^2 + (636,7)^2} = 2077,5 \text{ Нм}$$

Найбільші напруження у цьому перерізі

$$\sigma_{\kappa\theta} = \frac{M_{ell}}{W} = \frac{2077,5 \cdot 10^3}{21195} = 98 \text{ МПа},$$

де  $W = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{3,14 \cdot 60^3}{32} = 21195 \text{ мм}^3$  - осьовий момент опору перерізу вала (круг з діаметром  $d=60 \text{ мм}$ ).

Визначаємо коефіцієнт запасу міцності  $S$ :

$$S = \frac{\sigma_y}{\sigma_{\kappa\theta}} = \frac{280}{98} = 2,86.$$

Порівнюючи знайдений коефіцієнт запасу міцності  $S$  із заданим допустимим  $S_{adm}$ , бачимо, що  $S > S_{adm}$ , тобто міцність вала забезпечена. Недонапруження складає:

$$\frac{|(S_{adm} - S)|}{S_{adm}} = \frac{|(2,5 - 2,86)|}{2,5} = 14,4\% > 5\%$$

З економічної точки зору слід вибрати менш якісний матеріал, наприклад сталь з границею текучості  $\sigma_y = 250 \text{ МПа}$ . Тоді коефіцієнт запасу міцності буде дорівнювати  $S = 250/98 = 2,55$ , а недонапруження складе 2%, що цілком прийнятно.