

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ВНУТРІШНІХ СПРАВ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та
фундаментальних дисциплін**

ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ

навчальної дисципліни «Опір матеріалів»
вибіркових компонент
освітньо-професійної програми
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти

***272 Авіаційний транспорт
(Аеронавігація)***

за темою – Стійкість стиснутих стержнів

Кременчук 2023

ЗАТВЕРДЖЕНО

Науково-методичною радою
Харківського національного
університету внутрішніх справ
Протокол від 22.02.2024 № 2

СХВАЛЕНО

Методичною радою Кременчуцького
льотного коледжу Харківського
національного університету
внутрішніх справ
Протокол від 17.01.2024 № 6

ПОГОДЖЕНО

Секцією науково-методичної ради
ХНУВС з технічних дисциплін
Протокол від 22.02.2024 № 2

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 05.01.2024 № 14

Розробник:

Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.

Розробник:

Викладач циклової комісії природничих дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.

Рецензенти:

- 1. Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*
- 2. Професор навчального відділу КЛК ХНУВС, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист циклової комісії аеронавігації Тягній В.Г.*

План лекції:

1. Поняття про стійкі і нестійкі форми рівноваги.
2. Формула Ейлера для критичної сили.
3. Критичне напруження. Межі придатності формули Ейлера.
4. Практичний розрахунок стержнів на стійкість.

Рекомендована література:

Основна

1. Гурняк Л.І., Гуцуляк Ю.В., Юзьків Т.Б. Опір матеріалів: Посібник для вивчення курсу при кредитно-модульній системі навчання. – Львів: “Новий світ – 2000”, 2006. – 364 с.
2. Корнілов О. А. Короткий курс опору матеріалів: Підручник.- Львів: Магнолія, 2007. – 170 с.
3. Писаренко Г.С. та ін. Опір матеріалів Підручник/Г.С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е.С.Уманський. За ред. Г.С. Писаренка – К.: Вища шк.,1993. – 655 с.
4. Астанін В.В. Технічна механіка. Частина II. Опір матеріалів: Навч. посіб. – К.:Вид-во Національного авіаційного університету «НАУ-друк», 2009. – 192 с.
5. Астанін В.В., Бордачов М.М., Савченко М.І. Опір матеріалів: Розрахунково-проектні роботи: Навч. посібник / - К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 136 с.
6. Бордачов М.М. Опір матеріалів: навч. посіб. / М.М. Бордачов, М.І. Савченко. – 2-е вид., переробл. та доповн. – К.: НАУ, 2011. – 556 с.

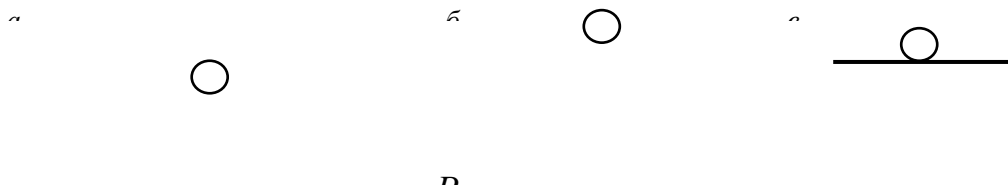
Додаткова

7. Головіна Н.П. Механіка гіроскопічних систем в авіації: Навчальний посібник.
8. Опір матеріалів; Лабораторний практикум / В.В. Астанін, М.М. Бордачов, А.П. Зінковський та ін.; За заг. ред. проф. В.В. Астаніна. – К.: Книжкове вд-во НАУ, 2007. – 224 с.
9. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності: У 2 ч., 5 кн. – Ч. II, кн. 4. Приклади і задачі: Навч. посібник / В.Г. Піскунов, В.Д. Шевченко, М.М. Рубан та ін.; За ред. В.Г. Піскунова. – К.: Вища шк., 1995. – 303 с.

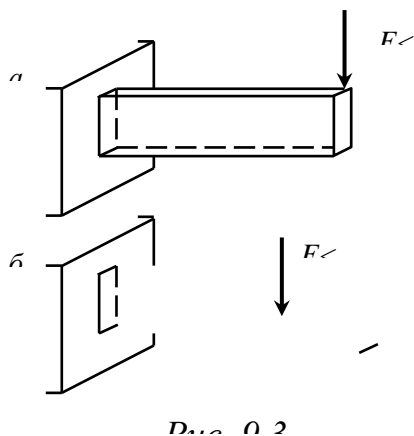
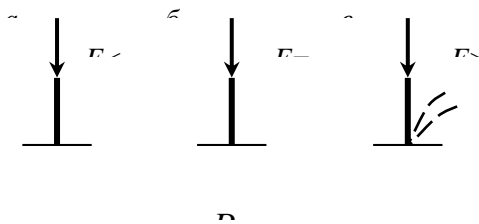
Текст лекції

1. Поняття про стійкі і нестійкі форми рівноваги.

Поняття стійкої, нестійкої та байдужої рівноваги тіла відомі з механіки абсолютно твердого тіла (рис.9.1,а,б,в).



В опорі матеріалів крім положення рівноваги розглядається рівновага системи у деформованому стані. Так, наприклад, гнучкий прямолінійний стержень при дії на нього невеликої стискуючої осьової сили знаходиться у стані стійкої рівноваги. Якщо цей стержень зігнути якою-небудь поперечною силою, а потім її відкинути, то стержень повернеться до своєї попередньої прямолінійної форми рівноваги (рис.9.2,а). При значенні осьової стискуючої сили, яка перевищує певне значення, прямолінійна форма рівноваги стане нестійкою і замінюється криволінійною (рис.9.2,в). Таким чином, стійкістю називається властивість конструкцій зберігати своє попереднє положення або деяку деформовану форму рівноваги і повертатися до них при малих відхиленнях після того, як відкинути причину, що викликала ці малі відхилення.



Розрізняють стійке положення рівноваги і стійкість форми рівноваги стержня у деформованому стані. Перше відноситься до достатньо “жорстких” конструкцій або їх елементів. Друге – до гнучких конструкцій, виготовлених з пружного матеріалу.

Вихід конструкції з попереднього стану рівноваги називається втратою стійкості. Навантаження, при невеликому перевищенні якого можливо існування нової стійкої форми рівноваги, називається критичним навантаженням і позначається F_{cr} . Критична сила – найменше значення центральної стискуючої сили, при якій стержень втрачає здатність зберігати свою попередню форму рівноваги. Втрата стійкості з якісною зміною деформованої форми рівноваги називається втратою

стійкості першого роду або Ейлерової втрати стійкості.

У новій формі рівноваги за рахунок якісної зміни деформованого стану в конструкції (елементі) виникають додаткові напруження, не передбачені звичайним розрахунком на міцність. Ці додаткові напруження можуть привести до руйнування конструкції при менших зовнішніх навантаженнях, одержаних з розрахунків на міцність за початковою формою рівноваги. Явище втрати

стійкості настає раптово, тому його важко упередити в тих конструкціях, де неправильно назначені розміри стиснутих елементів.

Прямолінійний стержень, навантажений осьовою стискуючою силою, меншою від критичної, працює тільки на стиск, а при силі, більшій від критичної, він вже зазнає сумісної дії стиску і згину за рахунок скривлення його осі.

Втрата стійкості першого роду відбувається і в ряді інших випадків. Наприклад, консоль тонкого прямокутного перерізу, яка згинається у вертикальній площині, при критичному значенні сили втрачає початкову форму (рис.9.3,а) і у балці з'являється додатковий згин у горизонтальній площині і кручення (рис.9.3,б).

Істотне значення має той факт, що навіть тоді, коли стискуючі напруження при дії критичної сили набагато менші від границі текучості і границі міцності матеріалу, стержень виходить з ладу через втрату стійкості. Тому незалежно від розрахунку стиснутих стержнів на міцність першорядного значення набуває їх розрахунок на стійкість.

Згин стержня, що відбувається після втрати стійкості його прямої форми під дією осьових стискуючих сил, іноді називають поздовжнім згином прямого стержня.

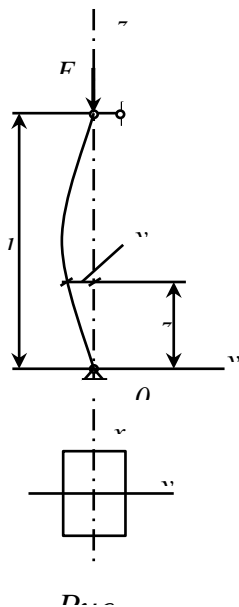
Як відомо з історії техніки, недооцінка небезпеки втрати стійкості була причиною ряду аварій великих інженерних споруд, наприклад руйнування у 1907 р. моста через річку св. Лаврентія поблизу м. Квебека у Канаді.

Підсумовуючи вище сказане, заключаємо, що навантаження не повинні бути такими, за яких конструкції втрачають стійкість, тобто вони не повинні перевершувати критичних значень. Допустимим навантаженням слід вважати у деяке число разів менше критичне навантаження:

$$F_{adm} = \frac{F_{cr}}{n_s}, \quad (9.1)$$

де F_{adm} - допустиме навантаження; F_{cr} - критичне значення сили, яка стискує стержень; n_s - заданий коефіцієнт запасу стійкості (індекс s від stability (англ.) - стійкість).

Звідси витікає, що для розрахунків на стійкість необхідно вміти визначати критичні сили.



2. Формула Ейлера для критичної сили.

Задача визначення критичної сили для прямого стиснутого стержня вперше була розв'язана теоретично видатним математиком Л. Ейлером і тому її називають "задачею Ейлера".

Розглянемо задачу Ейлера для прямого стержня довжиною l з шарнірними опорами, у яких його кінцеві перерізи можуть вільно повертатися в усіх напрямках. При поздовжньому згині стержень згинатиметься у

площині найменшої жорсткості, яку суміщаємо з площиною координатної системи Ozy (рис. 9.4).

Нехай осьова стискаюча сила досягає величини критичної сили F_{cr} , при якій стержень може перебувати вже у злегка зігнутому стані. Тоді, незважаючи на відсутність поперечного навантаження, у поперечних прорізах стержня виникають згинальні моменти, пропорціональні його прогинам, $M=F_{cr}y$.

Підставляючи значення згинального моменту у диференціальне рівняння зігнутої осі стержня, одержуємо

$$y'' = -\frac{F_{cr}y}{EI_{\min}}, \quad (9.2)$$

де I_{\min} – мінімальний момент інерції поперечного перерізу стержня (за рис. 9.4 $I_{\min}=I_x$).

Зауважимо, що, незалежно від прийнятого напрямку осі прогинів, знаки прогину y і кривизни y'' зігнутої осі стержня завжди протилежні і тому обидві частини диференціального рівняння поздовжнього згину мають протилежні знаки.

Вводячи позначення

$$\frac{F_{cr}}{EI_{\min}} = k^2, \quad (9.3)$$

зведемо рівняння (9.2) до вигляду

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (9.4)$$

Загальний розв'язок цього диференціального рівняння записується, як відомо, так:

$$y = C \sin kz + D \cos kz. \quad (9.5)$$

Для визначення сталих інтегрування C і D використаємо граничні умови

$$y(0) = 0, \quad y(l) = 0.$$

З першої з цих умов випливає $D=0$, і вираз (10.5) спрощується до вигляду

$$y = C \sin kz. \quad (9.6)$$

З другої умови (9.5) одержуємо

$$C \sin kl = 0.$$

Оскільки $C \neq 0$ (в протилежному разі не було б згину стержня, що суперечить умові задачі), $\sin kl = 0$ і $kl = n\pi$, де n - довільне ціле число.

Беручи до уваги формулу (10.3), із залежності $kl = n\pi$ знаходимо

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} n^2, n = 1, 2, 3, \dots$$

Таким чином, ми одержали безліч значень критичних сил, кожній з яких відповідає своя форма втрати стійкості. Практичне значення має найменша сила, що дістається при підстановці $n=1$

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{l^2} \quad (9.7)$$

Одержали формулу Ейлера для визначення критичної сили у випадку, коли стержень має шарнірне закріплення його кінців. Їй відповідає зігнута вісь стержня у вигляді півхвилі синусоїди (рис. 10.5,а) з рівнянням

$$y = C \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right). \quad (9.8)$$

Стала C залишилась невизначеною. Однак її фізичний зміст легко з'ясовується після підстановки у рівняння (10.8) абсциси середини прольоту стержня $z=l/2$

$$y\left(\frac{l}{2}\right) = y_{\max} = C.$$

Отже, C - це прогин посередині довжини стержня, який, згідно з умовами розв'язання задачі Ейлера, повинен бути малим.

Форми рівноваги стержня, що відповідають більш високим значенням сили F_{cr} (при $n=2,3$ і т.д.), є нестійкими і не мають практичного значення (рис. 9.5,б,в).

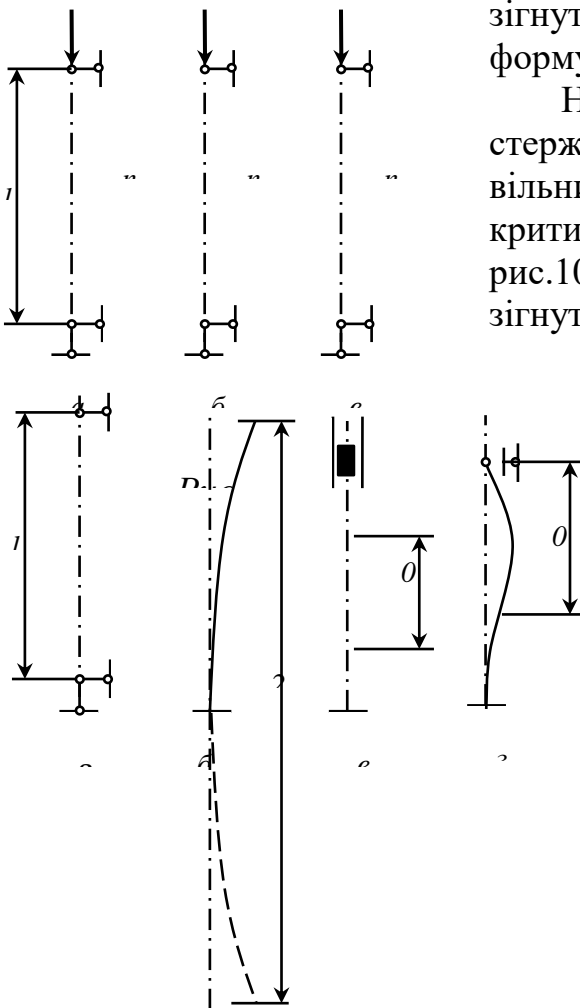
Розглянутий випадок шарнірного закріплення опорних перерізів стержня будемо далі називати основним випадком. При інших способах закріплення кінців стержня треба, взагалі кажучи, інтегрувати диференціальне рівняння його зігнутої осі при відповідних загальних умовах. Однак критичну силу для деяких інших випадків можна визначити також на основі розгляду форми

зігнутої осі стержня і з використанням формули (9.7) для основного випадку.

Нехай, наприклад, один опорний переріз стержня жорстко затиснутий, а другий вільний. Зігнута вісь такого стержня при дії критичної сили матиме форму, показану на рис.10.6,б. Довжина півхвилі синусоїди зігнутої осі стержня дорівнює подвійній довжині його прольоту, тобто $2l$. Зігнута вісь стержня з двома жорстко затиснутими кінцями, у яких його опорні перерізи не можуть повертатись і переміщатись у горизонтальному напрямку, показана на рис.10.6,в.

Півхвиля синусоїди, що відповідає основному випадку, має тут довжину половини прольоту ($0,5l$).

Для стержня з одним жорстко затиснутим і другим шарнірно-обіпертим опорним перерізом (рис.10.6,г) довжина півхвилі



синусоїди, що відповідає основному випадку, дорівнює приблизно $0,7l$.

Введемо поняття приведеної довжини стержня μl , що дорівнює довжині півхвилі синусоїди його зігнутої осі для кожного з розглянутих випадків закріплення кінців стержня, можна критичну силу за Ейлером виразити загальною формулою, яка одержується після підстановки у формулу (9.7) основного випадку замість довжини стержня l його приведеної довжини μl

$$F_{cr} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} . \quad (9.9)$$

Коефіцієнти μ набувають залежно від умов на кінцях стержня значень: 1; 2; 0,5; 0,7 (рис. 9.6, а, б, в, г).

На практиці можливі випадки, коли умови закріплення кінців стержня різні у напрямку кожної з головних центральних осей його перерізу. Тоді, підставляючи у формулу (9.9) відповідні значення коефіцієнтів μ і головних моментів інерції, одержуємо два значення критичної сили. Стійкість стержня буде визначатися меншою з них.

3. Критичне напруження. Межі придатності формули Ейлера.

Нормальне напруження у поперечному прорізі стиснутого критичною силою стержні називається критичним напруженням:

$$\sigma_{cr} = \frac{F_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{[(\mu l)^2 A]} = \frac{\pi^2 E i_{\min}^2}{(\mu l)^2} , \quad (9.10)$$

де $i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}}$ - радіус інерції поперечного перерізу стержня.

Введемо поняття гнучкості стержня:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} . \quad (9.11)$$

Формула (9.10) набуває вигляду

$$\sigma_{cr} = \pi^2 E / \lambda^2 . \quad (9.12)$$

У випадку різних умов закріплення в обох головних площинах інерції треба вибрати ту комбінацію величин μ та i , при якій гнучкість буде більшою.

Оскільки величину критичної сили ми визначили в результаті інтегрування диференціального рівняння зігнутої осі стержня, яке справедливе лише в межах дії закону Гука, фізичний зміст мають лише ті значення критичного напруження, які менші від границі пропорційності.

Таким чином, щоб можна було користуватися формулою Ейлера, необхідно задовольнити умові:

$$\sigma_{cr} \leq \sigma_{pr} . \quad (9.13)$$

Використовуючи формулу (9.12), одержуємо

$$\lambda \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} . \quad (9.14)$$

З врахування (9.11), умова придатності формули Ейлера запишеться так:

$$\frac{\mu l}{i_{\min}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} . \quad (9.15)$$

У тих випадках, коли формула Ейлера становиться не придатною, користуються емпіричними формулами, найпростіша з яких формула Тетмайера-Ясінського

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda , \quad (9.16)$$

де a і b - коефіцієнти, що залежать від матеріалу. Так, для сталі Ст3 при гнучкості $\lambda=40\dots 100$ коефіцієнт a і b можуть бути прийнятими рівними: $a=350\text{МПа}$, $b=1,14\text{МПа}$.

Якщо гнучкість стержня виявляється меншою від $\lambda < 40$, то його розрахунок обмежується розрахунком на міцність.

4. Практичний розрахунок стержнів на стійкість.

Після встановлення допустимого напруження стійкості перевірку стиснутого стержня на стійкість можна вести за формулою, аналогічною формулі перевірки стержня на міцність при стиску

$$\frac{F}{A} \leq \sigma_{adm}^s , \quad (9.17)$$

де σ_{adm}^s - допустиме напруження стійкості: $\sigma_{adm}^s = \sigma_{cr} / n_s$.

Допустиме напруження стійкості доцільно виразити через допустиме напруження на стиск σ_{adm}^c , яке, як відомо, обчислюється за формулою $\sigma_{adm}^c = \sigma_{неб} / n$, де $\sigma_{неб}$ - небезпечне напруження, тобто границя текучості або границя міцності матеріалу; n – коефіцієнт запасу міцності.

З відношення

$$\frac{\sigma_{adm}^s}{\sigma_{adm}^c} = \frac{\sigma_{cr} n}{(\sigma_{неб} n_s)} ,$$

знаходимо

$$\sigma_{adm}^s = \varphi \sigma_{adm}^c , \quad (9.18)$$

де через φ позначений так званий коефіцієнт поздовжнього згину, що дорівнює

$$\varphi = \sigma_{cr} n / (\sigma_{неб} n_s) .$$

Коефіцієнт поздовжнього згину менший від одиниці і залежить, як видно з останньої формули, від критичного напруження, яке в свою чергу залежить від матеріалу та гнучкості стержня. Для коефіцієнтів φ складені таблиці (табл.9.1).

Використовуючи залежність (9.18), запишемо формулу (9.17) перевірки стійкості в такому вигляді:

$$\frac{F}{\varphi A} \leq \sigma_{adm}^c \quad (9.19)$$

З формули (9.19) випливає формула підбору поперечного перерізу стиснутого стержня з умови стійкості:

$$A \geq \frac{F}{\varphi \sigma_{adm}^c} \quad (9.20)$$

Таблиця 9.1

Гнучкість λ	φ для				
	Сталей Ст1, Ст2, Ст3, Ст4	Сталі Ст5	сталі підвищеної якості	чавун	деревина
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,97	0,97	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25
120	0,45	0,37	0,30	-	0,22
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08

Оскільки коефіцієнт ϕ залежить від форми та розмірів поперечного перерізу стержня, які ще не відомі, підбір перерізів стержнів за формулою (9.20) треба вести методом поступових наближень, який розглянемо на конкретному прикладі.

Приклад 9.1. Для заданого стояка (рис.9.7) довжиною $l=4\text{м}$, навантаженого силою $F=300\text{ кН}$, підібрати прямокутний переріз $b \times h=2b^2$. Матеріал стояка – сталь Ст2, для якої $\sigma_{adm}^c=150\text{МПа}$.

Розв'язання. Коефіцієнт приведення довжини $\mu=0,5$. Площа перерізу $A=b \times h=2b^2$. Потрібна площа з умови стійкості (9.20): $A \geq F/(\phi \sigma_{adm}^c)$. Прирівнявши праві частини обох рівнянь, маємо

$$b \geq \sqrt{\frac{F}{2\phi \sigma_{adm}^c}}.$$

1. Перше наближення.

Задаємося коефіцієнтом $\phi_1=0,5$. Потрібний розмір перерізу.

$$b \geq \sqrt{\frac{300 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,5 \cdot 150}} = 44,72\text{мм}.$$

Прийmemo $b=45\text{мм}$.

Мінімальний радіус інерції перерізу

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A}} = \sqrt{\frac{hb^3}{(12bh)}} = \frac{b}{\sqrt{12}} = \frac{b}{3,464} = \frac{45}{3,464} = 13\text{мм}.$$

Гнучкість стояка

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{0,5 \cdot 4000}{13} = 153,8$$

Звертаємося до таблиці коефіцієнтів ϕ : при $\lambda=150$ $\phi=0,32$; при $\lambda=160$ $\phi=0,29$. Прийом лінійної інтерполяції дає табличне значення коефіцієнта ϕ , яке відповідає одержаній гнучкості:

$$\phi_{T.1} = 0,32 - \frac{0,32-0,29}{10}(153,8-150) = 0,31.$$

Задалися $\phi_1=0,5$, а одержали, якщо прийняти $b=45\text{мм}$, $\phi_{T.1}=0,31$.

2) Друге наближення.

Приймаємо $\phi_2=(\phi_1+\phi_{T.1})/2=(0,5+0,31)/2=0,405$.

Розрахунки повторюються, тому пояснення відкинуті.

$$b \geq \sqrt{\frac{F}{2\phi_2 \sigma_{adm}^c}} = \sqrt{\frac{300 \cdot 10^3}{2 \cdot 0,405 \cdot 150}} = 49,7\text{мм}.$$

Приймаємо $b=50\text{мм}$: $i_{\min}=b/3,464=50/3,464=14,43\text{мм}$;

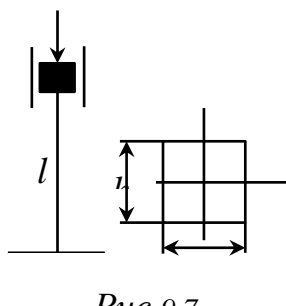
$\lambda=\mu l/i_{\min}=0,5 \cdot 4000/14,43=138,6$.

Користуючись таблицею 10.1, як і у першому наближенні, вираховуємо табличне значення коефіцієнта $\phi_{T.2}$

$$\phi_{T.2} = 0,36 + \frac{0,40-0,36}{10}(140-138,6) = 0,366.$$

Визначимо допустиме навантаження, якщо $b=50\text{мм}$:

$$F_{adm}^s = \phi_{T.2} A \sigma_{adm}^c = \phi_{T.2} 2b^2 \sigma_{adm}^c = 0,366 \cdot 2 \cdot 50^2 \cdot 150 = 274500\text{Н} = 274,5\text{кН}$$



Перенавантаження складе:

$$\frac{(F_{adm}^s - F)}{F_{adm}^s} 100\% = \frac{(274,5 - 300)}{974,5} 100\% = -9,3\% > 5\%$$

але результат доволі близький до прийнятного. Тому можна дещо збільшити останній результат розрахунку (наприклад, на 2 мм).

Якщо візьмемо $b=52\text{мм}$, то будемо мати такі результати: $i_{\min}=15\text{мм}$; $\lambda=133,3$; $\phi_{T.3}=0,374$; $F_{adm}^s=303,3\text{кН}$. Недонавантаження складе $\approx 1,1\%$, що цілком прийнятно (докладні розрахунки останнього варіанту не приводяться).