

**МІНІСТЕРСТВО ВНУТРІШНІХ СПРАВ УКРАЇНИ  
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ  
ВНУТРІШНІХ СПРАВ  
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ ЛЬОТНИЙ КОЛЕДЖ**

**Циклова комісія економіки, соціально-гуманітарних та  
фундаментальних дисциплін**

**ТЕКСТ ЛЕКЦІЇ**

**з навчальної дисципліни «Теорія машин і механізмів»  
обов'язкових компонент  
освітньо-професійної програми  
першого (бакалаврського) рівня вищої освіти**

**272 Авіаційний транспорт  
Технології робіт та технологічне обладнання аеропортів**

**за темою - Дослідження руху машинного агрегату з жорсткими ланками**

## **ЗАТВЕРДЖЕНО**

Науково-методичною радою  
Харківського національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 22.02.2024 №2

## **СХВАЛЕНО**

Методичною радою  
Кременчуцького льотного  
коледжу Харківського  
національного  
університету внутрішніх справ  
Протокол від 17.01.2024 №6

## **ПОГОДЖЕНО**

Секцією науково-методичної ради  
ХНУВС з гуманітарних та соціально-  
економічних дисциплін  
Протокол від 22.02.2024 №2

Розглянуто на засіданні циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, протокол від 05.01.2024 № 14

### **Розробник:**

*Викладач циклової комісії економіки, соціально-гуманітарних та фундаментальних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, Сіора А.С.*

### **Рецензенти:**

*1.Доцент кафедри автомобілів та тракторів Кременчуцького національного університету імені Михайла Остроградського, кандидат технічних наук, доцент Черниш А.А.*

*2.Начальник відділу організації наукової роботи та гендерних питань КЛК ХНУВС, к.т.н., спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Владов С.І.*

### План лекції

1. Динамічна модель машинного агрегату з одним ступенем вільності. Зведення сил та мас. Рівняння руху механізму. Режими руху. Визначення закону руху механізму. Усталений режим. Нерівномірність руху механізму.

### Рекомендована література:

#### Основна

1. Кіницький Я. Т. Теорія механізмів і машин: Підручник . - К.: Наукова думка, 2002. - 660 с. ISBN 966-00-0740-X
2. Кореняко О. С. Теорія механізмів і машин: Навчальний посібник / За ред. Афанасьєва М. К.-К.:Вища школа,1987 .-206 с.
3. Бучинський М.Я., Горик О.В., Чернявський А.М., Яхін С.В. Основи творення машин/ За редакцією О.В. Горика, – Харків : Вид-во «НТМТ», 2017. — 448 с. : 52 іл. ISBN 978-966-2989-39-7
4. Кіницький Я. Т. Практикум з ТММ: Навчальний посібник, Львів: Афіша, 2002. - 165 с.

#### Додаткова

5. Соколенко А.І., Українець А.І., Шевченко О.Ю., та ін.. Теорія механізмів і машин. Курсове проектування, навчальний посібник, 2005, К.: Люксар. – 112с.

#### Інформаційні ресурси

6. <http://mashinoved.ua>
7. <http://li.ro/go?www./optimi-zation>
8. <http://tmm-umk.bmstu.ua>

### Текст лекції

**1. Динамічна модель машинного агрегату з одним ступенем вільності. Зведення сил та мас. Рівняння руху механізму. Режими руху. Визначення закону руху механізму. Усталений режим. Нерівномірність руху механізму.**

Машинний агрегат – це, переважно, сукупність машини-двигуна, механізму передач та робочої машини. Це, як правило, багатоланкова система, навантажена багатьма силами та моментами, прикладеними до різних ланок. На рис. 3.1, як приклад, приведена силова установка, в якій ДВЗ приводить в рух через зубчасту передачу вал робочої машини – відцентрової помпи. До ланок машинного агрегату під час руху прикладені різні сили: рушійна сила  $F_d$ , сила корисного опору – момент  $M_{PM}$ , сили тяжіння, в усіх кінематичних парах діють сили тертя. Характер дії цих сил різний: деякі залежать від положення чи швидкості ланок, інші постійні. При цьому кожна ланка має свою масу, момент інерції. Своїми діями прикладені сили надають механізму той чи інший закон руху. Визначення закону руху такої складної багатоланкової системи становить непросту задачу.

У той же час для механізму, що має один ступінь вільності, задачу можна вважати розв'язаною, якщо буде відомий закон руху однієї ланки, яка таким

чином буде початковою. Закон руху інших ланок і точок механізму після цього можна без значних зусиль визначити методами кінематичного аналізу.

Викладене наводить на думку замінити весь складний багатоланковий механізм однією умовною рухомою ланкою. Виберемо за таку ланку  $I$  (рис. 5.1, *а*) та виділимо її разом зі стояком (рис. 5.1, *б*). До умовної ланки пред'явимо такі вимоги: нехай її момент інерції  $I_{36}$  і момент сил  $M_{36}$ , якими вона навантажена, будуть такими, що закон руху умовної ланки буде повністю співпадати з законом руху ланки  $I$  заданого механізму, тобто для будь-якого моменту часу буде справедливим рівняння

$$\omega_1 = \omega_m,$$

де  $\omega_1$  - кутова швидкість кривошипу  $I$  заданого механізму,  $\omega_m$  - кутова швидкість умовної ланки (моделі).

Це означає, що умовна ланка зі стояком є своєрідною динамічною моделлю машинного агрегату. Таким чином, якщо визначити закон руху цієї простої моделі (рис. 5.1, *б*), то автоматично стане відомим дійсний закон руху початкової ланки заданого механізму. Зазначимо, якщо заданий механізм має кривошип, то його доцільно вибрати за рухому ланку динамічної моделі.

Підсумуємо викладене. Побудова динамічної моделі машинного агрегату полягає в заміні заданого багатоланкового механізму, навантаженого довільною системою сил та моментів, простою динамічною моделлю (рис. 5.1, *б*) – однією умовною рухомою ланкою зі стояком. При цьому, всі сили і моменти, що прикладені до заданого механізму, замінені, як правило, одним зведеним моментом, що прикладений до умовної ланки. Отже,  $M_{36}$  є еквівалентом до всього навантаження, прикладеного до машинного агрегату. Так само маси всіх ланок замінені моментом інерції умовної ланки - зведеним моментом інерції  $I_{36}$ .

Таким чином, побудова динамічної моделі полягає в зведенні сил – визначенні  $M_{36}$  і в зведенні мас – визначенні  $I_{36}$ . При цьому, щоб динамічна модель була адекватна заданому механізму, необхідно (слідє з рівняння Лагранжа II роду, принципу можливих переміщень), щоб при зведенні сил була витримана умова рівності елементарних робіт всіх сил і моментів, прикладених до ланок реального механізму, і зведеної сили; при зведенні мас - умова рівності кінетичних енергій мас реального механізму і зведеного моменту інерції моделі.

Наголосимо: побудова динамічної моделі дає змогу, розв'язуючи задачі динаміки, розглядати не весь складний машинний агрегат з багатьма ланками, що мають різні маси та на які діють різні сили, а одну умовну ланку з однією еквівалентною масою (чи моментом інерції) із прикладеною до неї, як правило, однією силою (чи моментом).

Зазначимо, що в загальному випадку розрізняють дві динамічні моделі: з розподіленою масою (рис. 5.1, *б*), та із зосередженою масою (рис. 5.1, *в*). Остання застосовується, переважно, якщо в складі механізму немає жодної ланки, що здійснює обертальний рух.

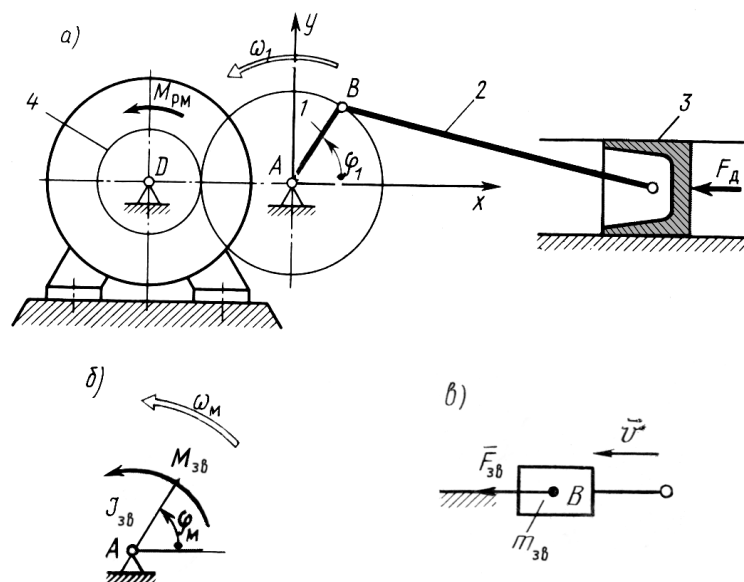


Рис. 5.1

### Зведення сил та мас

При дослідженні руху механізму зручно замінити усі сили та моменти, звівши їх до однієї ланки, еквівалентною з точки зору динаміки, силою чи моментом сил. При цьому необхідно, щоб елементарна робота на розглядуваному можливому переміщенні, або потужність, що розвивається замінюючою силою чи моментом, була рівна, відповідно, сумі елементарних робіт або потужностей, що розвивають усі сили та моменти, які прикладені до ланок механізму на цьому ж переміщенні.

Сили чи моменти, що задовольняють цій умові, називають *зведеними силами та моментами*. Ланка, до якої зводяться сили та моменти (маси), називається *ланкою зведення*, а точка прикладання зведеної сили – *точкою зведення*. Зазвичай за ланку зведення приймають ту ланку, за узагальненою координатою якої проводяться дослідження механізму. Частіше це початкова ланка, головний вал робочої машини або вихідний вал машини-двигуна.

Для визначення зведеної сили чи моменту може бути використана рівність

$$P_{3B} = \sum_1^n P_i, \quad (1)$$

де  $P_{3B}$  - потужність, що розвиває зведена сила чи зведений момент;  $\sum_1^n P_i$  - сумарна потужність усіх сил та моментів, що підлягають зведенню.

Потужність  $P_{3B}$  може бути представлена, як

$$P_{3B} = M_{3B} \omega, \quad \text{або} \quad P_{3B} = F_{3B} v_B, \quad (2)$$

де  $M_{3B}$  - зведений момент;  $\omega$  - кутова швидкість ланки зведення;  $F_{3B}$  - величина зведеної до точки  $B$  сили;  $v_B$  - швидкість точки зведення (рис. 5.1, в).

Права частина рівності (1) в розгорнутому вигляді може бути представлена так

$$\sum_1^n P_i = \sum_1^n (F_i v_i \cos \alpha_i + M_i \omega_i), \quad (3)$$

де  $F_i, M_i$  – сила і момент, які прикладені до  $i$ -ої ланки;  $v_i$  – швидкість точки прикладання сили  $F_i$ ;  $\alpha_i$  – кут, утворений силою  $F_i$  та вектором швидкості  $v_i$ ;  $\omega_i$  – кутова швидкість  $i$ -ої ланки.

З рівнянь (2) та (3) отримуємо

$$M_{3B} = \sum_1^n \left( F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{\omega} + M_i \frac{\omega_i}{\omega} \right), \quad (4)$$

$$F_{3B} = \sum_1^n \left( F_i \frac{v_i \cos \alpha_i}{v_B} + M_i \frac{\omega_i}{v_B} \right). \quad (5)$$

Існує таке визначення: зведеним моментом (силою) називають момент (силу), що умовно прикладений до ланки зведення, миттєва потужність якого дорівнює сумі миттєвих потужностей усіх сил і моментів, що діють на ланки механізму.

Наголосимо, що при заданих силах  $F_i$  та моментах  $M_i$  визначення зведеного моменту чи зведеної сили не являє значних труднощів і може бути легко проведене, наприклад, якщо для кожного досліджуваного положення механізму буде побудований план швидкостей.

Зазначимо, що деколи окремо зводять рушійні сили, сили опору, сили ваги і т.ін. Формули (4), (5) залишаються справедливими в усіх випадках, потрібно лише вказати, які сили зводяться.

**Зведення мас.** Заміна мас рухомих ланок механізму зведеною масою, зосередженою в довільно вибраній точці ланки зведення, або зведеним моментом інерції виконується на основі еквівалентності миттєвих значень кінетичних енергій моделі  $T_{mod}$  та всього механізму  $T_{mex}$

$$T_{mod} = T_{mex}.$$

Кінетична енергія плоского механізму для будь-якого його положення дорівнює сумі кінетичних енергій усіх його рухомих ланок  $T_i$  і в загальному випадку може бути представлена у вигляді

$$T_{mex} = \sum_1^n T_i = \sum_1^n \left( \frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

де  $I_{si}$  – момент інерції  $i$ -ої ланки відносно осі, що проходить через центр мас  $s_i$  перпендикулярно площині руху;  $\omega_i$  – кутова швидкість  $i$ -ої ланки;  $m_i$  – маса  $i$ -ої ланки;  $v_{si}$  – швидкість центру мас  $i$ -ої ланки.

Вирази кінетичної енергії  $T_{mod}$  для ланки зведення, або точки зведення:

$$T_{mod} = \frac{I_{3B} \omega^2}{2}, \text{ або } T_{mod} = \frac{m_{3B} v_B^2}{2}. \quad (6)$$

Згідно з умовою динамічної еквівалентності механізму та моделі отримаємо

$$\frac{I_{3B} \omega^2}{2} = \sum_1^n \left( \frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right),$$

$$\text{або } \frac{m_{3B} v_B^2}{2} = \sum_1^n \left( \frac{I_{si} \omega_i^2}{2} + \frac{m_i v_{si}^2}{2} \right), \text{ звідки}$$

$$I_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left( \frac{\omega_i}{\omega} \right)^2 + m_i \left( \frac{v_{si}}{\omega} \right)^2 \right\}, \quad (7)$$

$$m_{3B} = \sum_1^n \left\{ I_{si} \left( \frac{\omega_i}{v_B} \right)^2 + m_i \left( \frac{v_{si}}{v_B} \right)^2 \right\}. \quad (8)$$

Зустрічаються такі визначення: - зведеним моментом інерції називається такий умовний момент інерції, кінетична енергія якого у кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок;

- зведена маса являє собою таку умовну масу, зосереджену в деякій точці зведення, кінетична енергія якої в кожному розглядуваному положенні механізму дорівнює сумі кінетичних енергій всіх його ланок.

Зведені сила та маса, згідно з рівняннями (4)-(8), залежать від співвідношень, відповідно, швидкостей ланок механізму до швидкості ланки зведення та квадратів цих відношень. Ці співвідношення, в загальному випадку, залежать тільки від положення механізму, але вони будуть однаковими при будь-якому законі руху механізму. Отже, зведена сила і маса, як правило, є величинами змінними, періодичними функціями, які залежать від узагальненої координати механізму.

З викладеного робимо висновок, що модель, якою замінюється механізм, є умовним тілом тому, що в загальному випадку її момент інерції (маса) є змінними, тоді як реальні фізичні тіла мають постійні моменти інерції (маси). Лише в окремих випадках, коли передатне відношення механізму є сталим (наприклад, зубчасті, фрикційні механізми, шарнірний паралелограм та інші), зведений момент інерції постійний.

Таким чином, оскільки  $I_{3B}, M_{3B}$  не залежать від закону руху, зведення мас та сил можна виконувати і не знаючи законів руху механізму. Отже, розв'язуючи задачі динаміки, цілком можливо (і потрібно) спочатку побудувати динамічну модель механізму, виконавши зведення сил та мас, а потім вже знаходити закон її руху.

#### Рівняння руху механізму

Для визначення законів руху початкових ланок за заданими силами використовуються рівняння, що називаються рівняннями руху механізму. Число цих рівнянь дорівнює числу ступенів рухомості механізму.

Рівняння руху механізму можуть бути представлені в різних формах. Для механізмів з одним ступенем вільності одна з найпростіших форм рівнянь отримується на основі теореми про зміну кінетичної енергії: зміна кінетичної енергії механізму на деякому переміщенні дорівнює сумі робіт усіх сил, що діють на ланки механізму на цьому самому переміщенні. Цей закон подають у вигляді рівняння

$$T - T_0 = \sum A, \quad (9)$$

де  $T$  – кінетична енергія механізму в довільному положенні;  $T_0$  – кінетична енергія механізму в положенні, що приймається за початкове;  $\sum A$  – алгебраїчна сума робіт усіх сил і моментів, що прикладені до механізму на деякому переміщенні.

Роботу здійснюють усі активні сили і моменти та сили тертя у всіх

кінематичних парах механізму.

**Рівняння руху в енергетичній формі.** Зведемо усі сили і моменти механізму з одним ступенем вільності до однієї ланки зведення, тобто замінімо розглядуваний механізм його динамічною моделлю. Оскільки все навантаження, прикладене до моделі, виражається зведеним моментом  $M_{3B}$ , то права частина рівняння (9) дорівнює

$$\sum A = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi, \quad (10)$$

а саме рівняння (9), враховуючи (6), можна записати у вигляді

$$\frac{I_{3B}\omega^2}{2} - \frac{I_{3B0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi. \quad (11)$$

Рівняння (11) називають *рівнянням руху механізму в енергетичному вигляді*, або – в формі рівняння кінетичної енергії. Загалом верхня межа  $\varphi$  інтегрування в (11) вважається змінною.

Якщо все навантаження, що прикладене до механізму, залежить тільки від його положення (і не залежить від  $\omega$ ), то рівняння (10) розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини  $\omega$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}} + \frac{I_{3B0}}{I_{3B}} \omega_0^2}. \quad (12)$$

При заданих функціях  $I_{3B}$ ,  $M_{3B}$  і відомій швидкості  $\omega_0$  в початковий момент, рівняння (12) дозволяє визначити значення  $\omega$  при різних переміщеннях ланки зведення. Таким чином можна отримати дійсний закон руху механізму.

Якщо дослідження механізму починається з моменту пуску (тобто  $\omega_0 = 0$ ), то (12) набуде вигляду

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi}{I_{3B}}}.$$

Аналогічно (11) можна представити рівняння руху механізму, якщо всі сили і маси зводяться до вибраної точки зведення  $B$

$$\frac{m_{3B} v_B^2}{2} - \frac{m_{3B0} v_{B0}^2}{2} = \int_{s_0}^s F_{3B} ds. \quad (13)$$

**Рівняння руху в диференційній формі.** Рівняння руху механізму в енергетичній формі (11) використовується, переважно, у випадках коли зведені силові фактори залежать від положень ланок. В інших випадках використовується диференційне рівняння руху механізму, яке можна отримати, продиференціювавши рівняння (11) по координаті  $\varphi$ .

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{I_{3B}\omega^2}{2} \right) = M_{3B},$$

або, враховуючи, що в загальному випадку змінною величиною є не тільки  $\omega$ , але й  $I_{3B}$ , після нескладних перетворень одержимо

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2 dI_{3B}}{2d\varphi} = M_{3B}. \quad (14)$$

Рівняння (14) називається *рівнянням руху в диференційній формі*, оскільки



шукана змінна величина – кутова швидкість  $\omega$  початкової ланки, знаходиться під знаком похідної.

У випадку, коли досліджуваний механізм має  $I_{3B} = \text{const}$ , то рівняння (14) спрощується і має вигляд

$$I_{3B} \frac{d\omega}{dt} = M_{3B}.$$

Для визначення кутового прискорення початкової ланки розв'яжемо рівняння (14) відносно  $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{M_{3B}}{I_{3B}} - \frac{\omega^2}{2I_{3B}} \frac{dI_{3B}}{d\varphi}.$$

Похідна  $\frac{dI_{3B}}{d\varphi}$  обчислюється чисельним диференціюванням з використанням ЕОМ, або графічним диференціюванням, якщо це не можливо зробити аналітично. У більшості випадків диференціальне рівняння руху (14) може бути проінтегровано лише чисельними методами. Точний розв'язок рівняння можна одержати лише тоді, коли сили що діють на ланки механізму є функціями положень ланок

### Режими руху

Дослідження динаміки машин полягає, в першу чергу, у визначенні та аналізі часткових розв'язків, наведених вище диференціальних рівнянь руху, що відповідають характерним режимам роботи.

Процес руху машини в загальному випадку складається з трьох режимів: *розбігу, усталеного руху, вибігу*. Це наочно показує діаграма залежності швидкості руху початкової ланки від часу (рис. 5.2). При усталеному русі швидкість головного вала змінюється періодично, інколи вона може бути постійною. Розбіг та вибіг – це перехідні режими, які характеризуються неперіодичними змінами швидкості вала машини (початкової ланки). З цих міркувань часто розрізняють два режими: усталений рух та перехідні процеси.

**Усталений рух.** Під усталеним рухом будемо розуміти такий режим роботи, при якому вхідний параметр двигуна (параметри  $u$ , що керує процесом перетворення енергії) лишається постійним ( $u = u_o = \text{const}$ ), а кутова швидкість вихідного вала двигуна або лишається постійною, або коливається біля деякого середнього значення  $\omega_o$ , причому найбільші відхилення малі у порівнянні з цим середнім значенням. Іншими словами, в цьому випадку

$$\dot{\varphi} = \omega(t) = \omega_o + \dot{\psi}(t); \quad |\dot{\psi}(t)|_{\max} \ll \omega_o. \quad (15)$$

*Усталеним рухом* машини називається рух, при якому її кінетична енергія є періодичною функцією часу. Проміжок часу ( $t_u$ ), протягом якого швидкість головного вала набуває свого початкового значення, пройшовши через  $\omega_{\max}$  та  $\omega_{\min}$ , називають *циклом усталеного руху*.

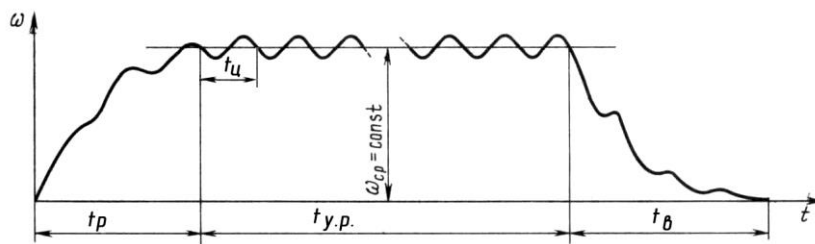


Рис. 5.2

Оскільки швидкості на початку та в кінці циклу усталеного руху рівні між собою ( $\omega_0 = \omega$ ), то рівняння руху (9) набуває вигляду

$$A_p = A_o.$$

Рівність (15) – основне енергетичне рівняння усталеного руху. При усталеному русі робота рушійних сил за один цикл дорівнює роботі сил опору (виробничого та шкідливого). У середині циклу ця рівність, як правило, не зберігається, а тому мають місце коливання швидкості початкових ланок. Якщо,  $A_p > A_o$  - рух механізму прискорений і навпаки.

**Перехідні процеси.** *Розбіг* - це режим руху, у процесі якого машина зі стану спокою приходить до усталеного руху. Рівняння руху набуває вигляду

$$\frac{I_{ze} \omega^2}{2} = A_p - A_o.$$

Оскільки кінетична енергія завжди додатна, то для можливості пуску машини необхідно, щоб робота рушійних сил була більшою за роботу сил опору,  $A_p > A_o$ . Надлишок роботи  $A_p$  витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто збільшення швидкості рухомих мас.

**Вибіг** (зупинка) – це режим руху, в процесі якого машина переходить від усталеного руху до стану спокою. Переважно при вибігу двигун відключається або переводиться в генераторний режим, при якому вводиться додатковий гальмівний момент.

Таким чином, у період розбігу кінетична енергія машини збільшується за рахунок надлишку роботи рушійних сил над роботою сил опору ( $A_p > A_o$ ); під час усталеного руху кінетична енергія на початку та в кінці кожного циклу однакова ( $A_p = A_o$ ); у період вибігу кінетична енергія повністю поглинається роботою сил опору.

*Перехідні процеси при зміні навантаження.* Часто усталений рух чергується із розбігом (при підвищеннях швидкісного режиму) та гальмуваннями (при зменшенні швидкості). Так працює, наприклад, автомобільний двигун.

Відмітимо, що багато механізмів не працюють у режимі усталеного руху.

#### Визначення закону руху механізму

Визначення закону руху механізму полягає у визначенні закону руху її початкової ланки. Початковою ланкою в більшості механізмів є кривошип.

Для визначення закону руху початкової ланки механізму, яка визначає рух усіх інших ланок, використовуються рівняння руху (11) - (14). Розв'язуючи їх відносно швидкості руху початкової ланки, встановлюємо характер зміни її руху залежно від часу.

*Неусталений режим.* Розглянемо один з найпростіших випадків: механізм навантажений силовими факторами, що є функціями лише переміщення своїх точок прикладання.

Для визначення закону руху механізму при неусталеному режимі повинні бути відомі такі вихідні дані: кінематична схема механізму; маси, моменти інерції та положення центрів мас усіх рухомих ланок; механічні характеристики силових факторів; початкові умови руху. Останнє важливо для дослідження саме неусталеного режиму. Нехай зведений момент інерції розглядуваного механізму має змінну величину  $I_{3B} = \text{var}$ . Потрібно визначити залежність швидкості початкової ланки від її кута повороту, тобто  $\omega(\varphi)$ . Така задача є досить розповсюдженою (механізми дизель-компресорів, бурових верстатів і підймальних кранів з приводом від ДВЗ, різних пристроїв з пневмоприводом і т. ін.).

Для розв'язку даної задачі використовують рівняння руху механізму в енергетичному виді, яке розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини  $\omega$

$$\omega = \sqrt{2 \frac{\sum A}{I_{3B}} + \frac{I_{3B_0}}{I_{3B}} \omega_0^2}, \quad (16)$$

де  $\sum A$  визначається з (10).

Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Для цього будують діаграми  $M_{3B}(\varphi)$ ,  $I_{3B}(\varphi)$ ,  $\sum A(\varphi)$  (див. п. 5.7).

З рівняння (16), із урахуванням початкових умов, обчислюється для кожного положення механізму кутова швидкість  $\omega$ . У такій послідовності виконують розрахунок чисельним методом із застосуванням ЕОМ.

Для визначення часу  $t$  руху механізму можна скористатися умовою

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt},$$

звідки дістанемо

$$\int_{t_0}^{t_i} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)},$$

або

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (17)$$

Якщо дослідження руху механізму ведеться з початку пуску, то  $t_0 = 0$  і (17) набуває вигляду

$$t_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (18)$$

За формулами (17) та (18) можна визначити час руху механізму як функції кута повороту  $\varphi$  початкової ланки. Інтеграл у правій частині (17), (18) може бути визначений графічно, якщо побудувати графік  $\frac{1}{\omega(\varphi)}$  за відомою функцією  $\omega(\varphi)$ . За графіками  $\omega(\varphi)$  і  $t(\varphi)$ , якщо виключити з них кут  $\varphi$ , можна дістати функцію  $\omega(t)$  - залежність кутової швидкості  $\omega$  від часу  $t$ .

Кутове прискорення ланки зведення визначається графічним диференціюванням функції  $\omega(t)$ .

**Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать лише від швидкості.** Нехай зведений момент інерції механізму є величина постійна. Типовими прикладами таких машинних агрегатів можуть бути турбо- і гідрогенератори, прокатні стани, відцентрові помпи, повітродувки та вентилятори з електроприводом. Як приклад розглянемо пуск відцентрової помпи, що приводиться в рух від двигуна постійного струму. Для розв'язування задачі скористаємось рівнянням руху в диференційній формі (14) для випадку  $I_{зв} = const$ . Механічні характеристики двигуна та робочої машини наведені відповідно на рис. 3.1, а та рис. 3.2, б. Звернемо увагу на те, що залежності близькі до лінійних. Зведемо до однієї ланки, наприклад, валу двигуна, усі маси та обидва моменти, тобто обчислимо  $I_{зв}$  та  $M_{\Sigma} = M_{де} + M_{р.м.}$  (рис. 5.3). Графік  $M_{\Sigma} = (\dot{\phi})$  можна апроксимувати рівнянням прямої  $y = a - b\dot{\phi}$ , де  $a$  та  $b$  – сталі коефіцієнти, які не складно визначити за відомими механічними характеристиками.

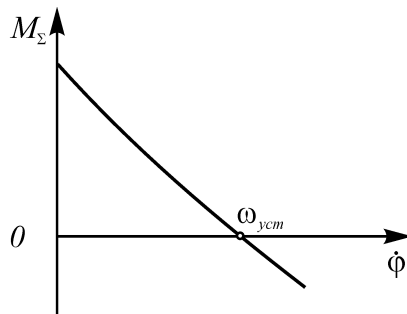


Рис. 5.3

Тоді рівняння руху можна записати у вигляді

$$I_{зв}\ddot{\phi} = a - b\dot{\phi}.$$

Розв'язок цього рівняння, як відомо з курсу вищої математики, для випадку пуску помпи з нерухомого стану ( $t=0, \dot{\phi}_0$ ) матиме вигляд

$$\dot{\phi} = \frac{a}{b} \left( 1 - e^{-\frac{b}{I_{зв}} t} \right). \quad (19)$$

За формулою (19) можна визначити закон зміни кутової швидкості ланки зведення під час розгону. Очевидно, що з часом швидкість  $\dot{\phi}$  наближається до усталеного значення  $\dot{\phi}_{уст} = a/b$ .

За формулою (19) також можна визначити ту величину  $I_{зв}$ , за якої час розгону відповідатиме заданому, або визначити час на протязі якого швидкість розгону набуде певного значення, наприклад  $\dot{\phi} = 0,995 \dot{\phi}_{уст}$ . Так з (14) маємо

$$e^{-\frac{b}{I_{зв}} t} = 0,005, \text{ або } -\frac{b}{I_{зв}} t = \ln 0,005, \text{ звідки } t = 5,3 I_{зв} / b.$$

Зазначимо, що в багатьох випадках лінійна апроксимація залежності  $M_{\Sigma}(\omega)$  неможлива, як, наприклад, у випадку розгону помпи від асинхронного двигуна з короткозамкненим ротором механічна характеристика якого зображена на рис. 3.2, а. Розглянемо дану задачу. Обмежимося лінійною моделлю статичної

характеристики електродвигуна (рис. 5.4). Нестійку ділянку  $AB$  характеристики показано в цій моделі у вигляді відрізка прямої, яка проходить через точки  $A(0, L_{\text{пуск}})$  та  $B(\omega_{\text{кр}}, L_{\text{max}})$ , стійку ділянку  $BC$  – у вигляді прямої, що проходить через точки  $B$  та  $C(\omega_c, 0)$ . Отже, обертальний момент на валу електродвигуна може бути обчислений таким чином

$$M_{\text{дв}} = \begin{cases} \frac{L_{\text{max}} - L_{\text{пуск}}}{\omega_{\text{кр}}} \dot{\phi} + L_{\text{пуск}}, & \text{у випадку } 0 \leq \dot{\phi} \leq \omega_{\text{кр}}; \\ \frac{L_{\text{max}}}{\omega_c - \omega_{\text{кр}}} (\omega_c - \dot{\phi}), & \text{у випадку } \omega_{\text{кр}} < \dot{\phi} \leq \omega_c, \end{cases}$$

де  $L_{\text{max}}, L_{\text{пуск}}$  – максимальний (критичний) та пусковий моменти двигуна;  $\omega_{\text{кр}}, \omega_c$  – критична та синхронна частоти обертання двигуна.

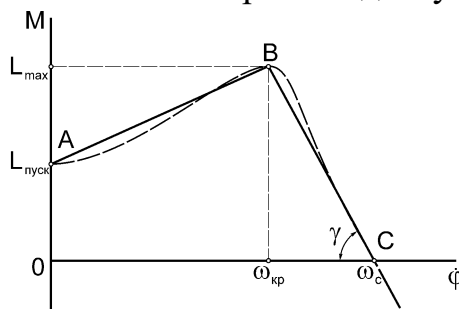


Рис. 5.4

Момент сил опору обертанню, що діє на ротор є пропорційним квадрату кутової швидкості. У цьому випадку рівняння руху вигляду  $I\ddot{\phi} = M_{\text{дв}}(\dot{\phi}) - M_o(\dot{\phi})$  можна розв'язати шляхом чисельного інтегрування на ЕОМ. На рис. 5.5 наведено результати розв'язування рівняння руху за допомогою пакета Maple – часові залежності: кутової швидкості ланки зведення (рис. 5.5, а); обертового моменту двигуна та моменту сил опору обертанню (рис. 5.5, б). З графіків випливає очевидний результат: чим більший момент інерції  $I$ , опір обертанню, менша потужність двигуна, тим триваліший час розгону; величина  $I$  не впливає на швидкість усталеного руху, водночас зменшення потужності двигуна, або зростання опору обертанню призводить до зниження швидкості усталеного руху.

Визначення закону руху механізму, навантаженого силами, що залежать як від положення, так і швидкості, у випадку чисельного розв'язування задачі на ЕОМ виконуються аналогічно. Розв'язок таких задач аналітичними методами наведено у повному курсі ТММ.

#### Усталений режим. Нерівномірність руху механізму

Головною ознакою роботи машини в усталеному режимі є сталість середньої швидкості обертання двигуна та виконавчого органу. Це можливо лише за умови рівності приведенного до вала двигуна моменту сил опору робочої машини та обертового моменту двигуна. Цей факт наочно демонструють графіки на рис. 5.5, а, б. Звичайно мається на увазі проміжок часу, більший за цикл усталеного руху. Так, для останнього прикладу підрозділу 5.5 можна записати, що при усталеному режимі руху має

виконуватися рівність  $M_{\text{дв}} = M_0$ . Оскільки, стійка ділянка характеристики асинхронного двигуна може бути апроксимована лінійною залежністю  $a - b\dot{\phi}$ , то

$$\dot{\phi}_{\text{уст}} = \frac{a - M_0}{b},$$

де  $a, b$  — сталі коефіцієнти.

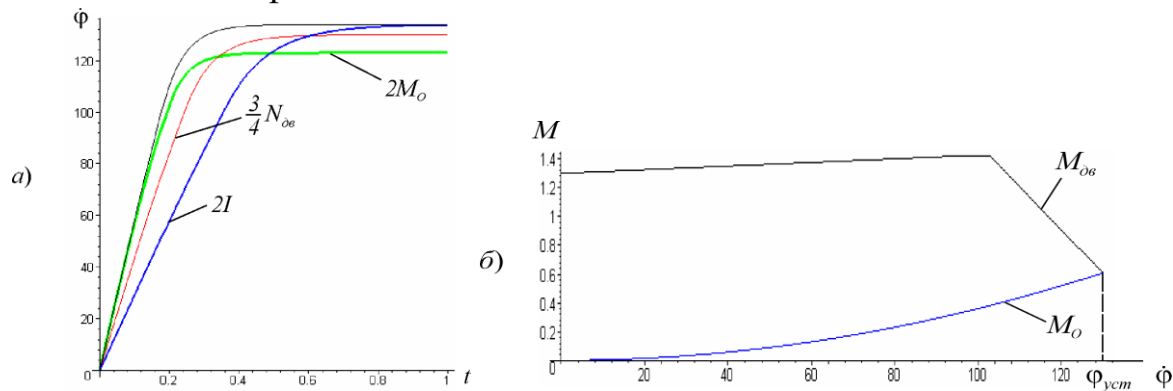


Рис. 5.5

Враховуючи, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки, має вигляд  $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ , можна записати  $\frac{x - \omega_n}{\omega_c - \omega_n} = \frac{y - M_n}{-M_n}$  (рис. 5.6), або  $y = \frac{M_n}{\omega_c - \omega_n}(\omega_c - \phi)$ .

Звідки  $a = M_n \frac{\omega_c}{\omega_c - \omega_n}$ ,  $b = M_n \frac{1}{\omega_c - \omega_n}$ .

Звернемо увагу на те, що апроксимуюча крива проходить не через ті точки, які взято у прикладі попереднього підрозділу (тобто, наведено інший спосіб ідеалізації статичної характеристики двигуна для усталеного режиму руху). Тоді формулу для усталеної швидкості можна подати у вигляді

$$\dot{\phi}_{\text{уст}} = \omega_c - \frac{M_o}{M_n}(\omega_c - \omega_n).$$

У розглядуваному прикладі швидкість є сталою (частковий випадок). Це є наслідком того, що як моменти, які прикладені до ланки зведення, так і зведений момент інерції машини є також сталі (не залежать від кутової координати вала).

Усталеним режимом руху називається такий рух, при якому швидкість початкової ланки (узагальнена швидкість) є періодичною функцією часу. На рис. 5.2 показано типовий приклад залежності швидкості руху початкової ланки механізму від часу  $t$ . Як бачимо, для усталеного режиму руху, кутова швидкість періодично коливається відносно деякого постійного середнього значення.

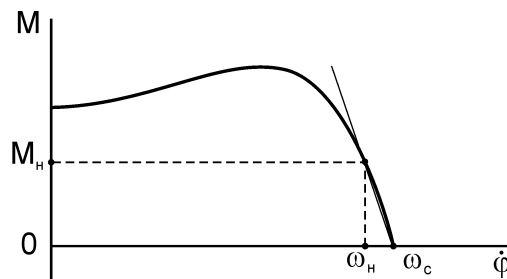


Рис. 5.6

Нерівномірність ходу машини є наслідком двох факторів: зміни упродовж

циклу миттєвих значень зведених моментів рушійних сил і сил опору; періодичної зміни зведеного моменту інерції механізму.

Нерівномірність обертання оцінюється коефіцієнтом нерівномірності

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_{cp}},$$

де  $\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\omega_{cp}$  - відповідно, максимальна, мінімальна та середня за цикл швидкість.

Величина  $\omega_{cp}$  рахується за формулою  $\omega_{cp} = \frac{\pi n}{30}$ , у якій  $n$  – частота обертання початкової ланки.

Коефіцієнт нерівномірності характеризує розмах коливань швидкості по відношенню до її середнього значення. Очевидно, що чим менше  $\delta$ , тим рівномірніше рухається початкова ланка.

Для кожного виду машин є своя допустима величина коефіцієнта нерівномірності  $[\delta]$ , встановлена практикою. Значення допустимих коефіцієнтів нерівномірності руху наведено у технічних довідниках; так для помпи 1/5-1/30; для металообробних верстатів 1/20-1/50, для ДВЗ 1/80-1/100, для електричних генераторів змінного струму 1/200-1/300, для авіаційних двигунів та турбогенераторів 1/200 і менше.

Коефіцієнт нерівномірності є величина досить мала, що дозволяє прийняти середню величину кутової швидкості рівною середньому арифметичному з її максимального і мінімального значень.

Звичайно, при проектуванні механізму задаються наперед бажаними для механізму значеннями коефіцієнта нерівномірності руху та середньої швидкості обертання головного вала.

В усталеному режимі працюють дуже багато машин. Найкращі умови для роботи таких машин – абсолютно рівномірне обертання їх головного вала. Як відомо, у загальному випадку швидкість початкової ланки механізму при усталеному русі є змінною величиною. Коливання швидкості початкової ланки за час усталеного руху бувають двох різних типів: *періодичні та неперіодичні*.

*Періодичними* коливаннями швидкостей машини називаються коливання, при яких швидкості всіх ланок машини в усіх їхніх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

Неперіодичні коливання швидкостей залежать від різних причин: раптової зміни корисних або шкідливих опорів, включення в машину додаткових мас і т.п. Раптова зміна навантаження на машину спричиняє раптове збільшення або зменшення швидкості головного вала машини і, оскільки ці коливання не мають певного циклу, то вони називаються неперіодичними. У більшості машин спостерігаються обидва види коливань швидкості.

Коливання швидкості обох типів небажані як з точки зору динаміки машини, так і виконання нею технологічного процесу. Коливання швидкості спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують *ККД* машини, довговічність та надійність її роботи.

Оскільки коливання швидкості повністю усунути неможливо, необхідно по можливості їх зменшити.

Задача про регулювання швидкостей під час усталеного руху машини або механізму має суттєве практичне значення в техніці, оскільки в більшості машин цей час є робочим часом її руху, тобто проміжком часу, протягом якого машина долає виробничі опори.

Розглянемо шляхи розв'язування цієї задачі. Маса є мірою інертності тіла. Всі ланки механізму мають інертність. Ця властивість полягає в тому, що чим інертніше матеріальне тіло, тим повільніше проходить зміна його швидкості, яка викликана дією прикладених до нього сил. Таким чином, щоб отримати обертання головного вала з нерівномірністю, що не перевищує заданої величини, інертність цього вала з усіма зв'язаними з ним деталями необхідно зробити достатньо великою. Практично, це збільшення інертності досягається посадкою на один із валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Ця деталь має назву маховик (колесо з великим моментом інерції). Підбираючи момент інерції маховика, можна забезпечити обертання головного вала машини із заданим коефіцієнтом нерівномірності.

Дія маховика полягає у тому, що при перевищенні роботи  $A_p$  над роботою  $A_0$  маховик приймає на себе надлишок кінетичної енергії механізму і, завдяки своєму великому моменту інерції, не дає швидкості надмірно зростати; коли ж робота  $A_0 > A_p$ , маховик віддає накопичену кінетичну енергію, протидіючи зменшенню швидкості.

Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії машини. Таким чином, основне призначення маховика є обмеження коливань кутової швидкості в межах, що встановлені величиною коефіцієнта нерівномірності  $[\delta]$ .

Акумуляуюча здатність маховика використовується не лише для забезпечення допустимої нерівномірності ходу машини. В деяких машинах (у яких корисне навантаження періодично змінюється в значних межах) маховик дозволяє використовувати накопичену енергію для подолання пікових корисних навантажень без збільшення потужності двигуна. Маховик неодмінно застосовується в машинах ударної дії – молотах, прокатних станах, дробарках і т. ін., допомагаючи електродвигуну при пікових навантаженнях. В автомобілях маховик сприяє рушати машині з місця.

Регулювання періодичних коливань швидкості здійснюється за допомогою маховика виконаного, як правило, у вигляді колеса з розвинутим ободом (з великим моментом інерції).

Регулювання неперіодичних коливань за допомогою маховика можливо здійснити, якщо вони незначні. При значних неперіодичних коливаннях встановлюють механізми, що називаються регуляторами – які регулюють закони зміни рушійних сил або сил опору.